BERTRAND RASEL
PRINCIPI MATEMATIKE

Biblioteka
GRADITELJI FILOZOFSKE MISLI
knjiga 9

Osnivač i urednik
Dragan Mojović

Glavni i odgovorni urednici
Dr Nebojša Kuzmanović
Sreten Stojanović

BERTRAND RASEL

PRINCIPI MATEMATIKE

S uvodom
DŽONA G. SLEJTERA

Preveo s engleskog
VLADISLAV NIKOLIĆ

Stručna redakcija prevoda
MILOŠ ARSENIJEVIĆ
SAŠA POPOVIĆ

АРХИВ ВОЈВОДИНЕ

ARHIV VOJVODINE
NOVI SAD

IZDAVAČKA KNJIŽARNICA
ZORANA STOJANOVIĆA
SREMSKI KARLOVCI • NOVI SAD

2024.

Naslov originala
Bertrand Russsell, *Principles of Mathematics*
First published in 1903 by Cambridge University Press
Second edition 1937
Paperback edition first published in 1992 by Routledge
Reprinted 1951, 1997, 2002, 2004
First published in the Routledge Classics in 2010 by Routledge
Routledge is an imprint of the Taylor & Francis Group, an informa business

Den Kindern und den Enkeln Sarah, Lazar und Maya

Prevodilac

SADRŽAJ

TREĆI DEO
KVANTITET

ČETVRTI DEO
POREDAK

ŠESTI DEO
PROSTOR

SEDMI DEO
MATERIJA I KRETANJE

UVOD DŽONA G. SLEJTERA UZ IZDANJE IZ 1992. GODINE

Principi matematike je Raselova četvrta knjiga, prvobitno objavljena 1903; preštampana je u neizmenjenom obliku 1937. godine sa novim uvodom. Originalno izdanje bilo je prva u jednoj od dve serije knjiga, koje je Rasel zamislio da napiše u toku svog života. U prvom tomu svoje *Autobiografije* (1967), koji pokriva godine od 1872. do 1914, Rasel se priseća jednog od najznačajnijih dana u svom životu: „Sećam se jednog hladnog vedrog dana u rano proleće kada sam se šetao u Tirgartenu i pravio planove za budući rad. Mislio sam kako bih mogao da napišem jednu seriju knjiga o filozofiji nauke, od čiste matematike do fiziologije, i drugu seriju knjiga o društvenim pitanjima. Nadao sam se da bi ove dve serije knjiga naposletku mogle da se spoje u jednu sintezu naučnog i praktičnog. Moja shema je bila uveliko inspirisana hegelijanskim idejama. U izvesnoj meri sam je se pridržavao u godinama koje su usledile, u onoj meri u kojoj je to moglo i da se očekuje. Taj trenutak u Tirgartenu odigrao je značajnu i formativnu ulogu u pogledu mojih daljih namera". Godina je bila 1895, a grad Berlin, gde su Rasel i njegova prva supruga došli da se upoznaju sa nemačkom socijaldemokratijom. U drugim spisima Rasel je dodao da bi prva serija knjiga trebalo da počne na jednom veoma visokom nivou apstrakcije i da postepeno postaje sve praktičnija, dok bi druga serija počela od praktičnih razmatranja i postepeno postajala sve apstraktnija; poslednja knjiga u svakoj seriji bi onda bila nalik mešavini praktičnog i apstraktnog, i tako bi omogućila veliku sintezu dve serije u jedan *magnum opus*.

Rasel nije navršio ni 23 godine kada mu se javila ova vizija ali, kao što jasno proizlazi iz gorenavedenog citata, inicijalno planiranje *Principa matematike* je tada već započeto. Na drugim mestima u njegovim rukopisima, on kaže da je njegovo interesovanje za zasnivanje matematike proisteklo iz njegovog ranijeg interesovanja za zasnivanje fizike ili „problem materije", kako ga je nazivao, a što je bilo osujećeno onda kada je shvatio zavisnost fizike od jedne dobro zasnovane matematike. Njegovo preliminarno ispitivanje problema materije mora da se dogodilo u otprilike isto vreme kada je doživeo iskustvo u Tirgartenu [zoološkom vrtu]. Do 1895. godine on je već radio na dve knjige: prva, *Nemačka socijaldemokratija* u kojoj su prikazani rezultati njegovih izučavanja iz Berlina; druga, *Ogled o zasnivanju geometrije*, bila je disertacija za članstvo na Triniti Koledžu u Kembridžu. Na osnovu nje bio je izabran za člana koledža 10. oktobra 1895. Knjiga je morala da se revidira pre objavljivanja, što objašnjava dve godine kašnjenja. Za vreme tog revidiranja počeo je i rad na *Principima*.

U Arhivu Bertrand Rasel, smeštenom na Univerzitetu Mekmaster u Hamiltonu, Ontario, Kanada, nalazi se veliki broj rukopisa koji donekle dokumentuju njegov spori napredak ka konačnoj verziji *Principa*. Raniji radovi sada su objavljeni u drugom tomu *Sabranih dela Betranda Rasela* (1990) u izdanju Nikolasa Grifina i Alberta Luisa; preostali radovi biće objavljeni u trećem tomu koji je priredio Greg Mur, a koji je skoro spreman za objavljivanje. Rasel je najraniji spis, od kojeg je preživeo samo deo, naslovio „Analiza matematičkog rasuđivanja kao istraživanje o predmetu, fundamentalnim koncepcijama i nužnim postulatima matematike". Započet 1. aprila 1898, završen je u nekom trenutku u julu iste godine. Grifin primećuje da je napisan dok je Rasel bio pod jakim uticajem prve knjige Alfreda Norta Vajtheda, *Rasprava o univerzalnoj algebri sa primenama* (1898). Vajthed je bio jedan od Raselovih učitelja na Kembridžu, a kasnije je prihvatio da sarađuje sa Raselom pri upotpunjavanju njegovog dela o osnovama matematike. Ova rana skica, slično disertaciji za članstvo u koledžu, otkriva snažan kantovski uticaj. Rasel je o ovom nacrtu u više navrata raspravljao i sa Dž. E. Murom i sa Vajthedom. Prema raspoloživoj evidenciji, izgleda da je Mur bio kritičnije nastrojen prema nacrtu od Vajtheda. Ne znamo zašto je Rasel napustio ovaj projekat. Neki njegovi delovi bili su inkorporirani u kasnije verzije, ali je veliki deo ostao netaknut.

Njegov sledeći pokušaj zvao se „O principima aritmetike" i raspoložive informacije pokazuju da je on takođe napisan 1898, ubrzo pošto je napustio prvi projekat. Preostale su samo dve glave ove planirane knjige: nezavršena glava o kardinalnim brojevima i završena glava o ordinalnim brojevima. Obim ovog projekta je mnogo uži od obima onog prvog koji je u velikoj meri prevazilazio okvire aritmetike. Kada je iz nama nepoznatih razloga napustio ovaj projekat, započeo je sa pisanjem „Fundamentalne ideje i aksiomi matematike", čija skica datira iz 1899. Postoji jedan prilično potpun sinoptički sadražaj cele knjige, kao i veliki broj preliminarnih beležaka za njene različite delove. Zašto je napustio i ovaj projekt, takođe ostaje misterija. Treba istaći da je Rasel ovde već bio stekao naviku da prerađuje prilično obimne delove napuštenih rukopisa u nove radove. Grifin ukazuje na jednu značajnu stvar, da su prvi i treći preliminarni nacrt, skoro sasvim sigurno, postojali izvesno vreme u obliku i obimu knjige, ali ih je Rasel rasformirao kada je uvideo da njihovi delovi mogu zgodno da se umetnu u neki kasniji rukopis.

Postojao je još jedan nacrt koji je rađen pre nego što su *Principi* bili spremni za štampu. U toku 1899. i 1900. godine Rasel je napisao knjigu koju je nazvao imenom pod kojim je ona kasnije objavljena. U *Mom filozofskom razvoju*, njegovoj intelektualnoj autobiografiji, Rasel je naveo da je ovaj nacrt završio „poslednjeg dana devetnaestog veka“ – to će reći 31. decembra 1900. U svojoj *Autobiografiji* on napominje da je pisao ceo nacrt od oko 200 000 reči tokom oktobra, novembra i decembra, prosečno oko deset stranica rukopisa dnevno. S obzirom na fragmentarnu prirodu trećeg nacrta, izgleda verovatnije da je Rasel inkorporirao njegove obimne delove u ovaj pretposlednji nacrt. Samo neki delovi ovog nacrta su kasnije prerađeni: delovi III i VI nisu zahtevali nikakve izmene, a delovi I, II i VII su bili znatno revidirani pre objavljivanja.

U julu 1900. Rasel i Vajthed su učestvovali na Međunarodnom filozofskom kongresu u Parizu, na kome je Rasel predstavio rad o ideji poretka i o apsolutnom položaju u prostoru i vremenu. Ispostavilo se da je Kongres imao ogroman značaj za njegov rad na zasnivanju matematike. Đuzepe Peano je takođe predstavio rad na ovom skupu, a prisustvovao je i drugim sesijama i učestvovao u diskusijama koje su se na njima vodile. U svojoj *Autobiografiji*, Rasel je ovaj Kongres nazvao prekretnicom u svom intelektualnom životu i odao je priznanje Peanu: „U diskusijama na Kongresu opazio sam da je on uvek bio precizniji od svih drugih i uvek je uspevao da pobedi u svakoj raspravi u koju bi se upustio. Kako su dani prolazili, zaključio sam da mora biti da je za to zaslužna njegova matematička logika“. Peano je Raselu obezbedio kopije svih svojih objavljenih radova i Rasel je proveo avgust proučavajući ih. U septembru je proširio Peanovu notaciju i na logiku relacija. Skoro svakog dana je otkrivao da neki problem koji ga je zbunjivao godinama, kao što su na primer, tačna analiza poretka ili kardinalnog broja, podvrgnut novom metodu, postaje definitivno rešiv. U toku tog meseca je više napredovao baveći se problemima koji su ga mučili nego tokom prethodnih godina. „Intelektualno, septembar 1900. godine bio je najviša tačka u mom životu. Bio sam sklon da sebi kažem da sam konačno uradio nešto vredno i imao sam osećaj da moram da pazim da me nešto ne zgazi na ulici pre nego što završim sa pisanjem“. Pretposlednji nacrt predstavlja pisani trag o ovom izvanrednom periodu.

Ali, unutar ovog logičkog raja vrebala je zmija koja se Raselu ukazala tokom proleća 1901. godine, dok je doterivao rukopis za objavljivanje. Stvar se ticala pojma klase i proistekla je iz premisa koje su prihvatali svi logičari počev od Aristotela. Svaki logičar je prihvatao princip po kojem svaki predikat određuje neku klasu. Klasa ljudskih bića, na primer, formirana je prikupljanjem svih onih stvari za koje je istinito reći da su ljudska bića. Kada govore o klasama, logičari misle na ekstenziju nekog predikata. Rasel je prlikom proveravanja dokaza da ne postoji najveći kardinalni broj razmatrao izvesne osobene klase. Primetio je da su neke klase članovi samih sebe, na primer, klasa apstraktnih ideja je i sama jedna apstraktna ideja, ali većina klasa nisu takve, na primer, klasa bicikala nije sama bicikl. Sve klase ovog drugog tipa imaju jedno zajedničko svojstvo, naime, da nisu članovi sebe samih; Rasel ih naziva „običnim“ klasama. Zatim je razmatrao predikat „*x* nije član od *x*“ i formirao je novu klasu koju možemo nazvati 0 (kako bismo se prisetili da su to obične klase), koja za članove ima sve i samo one klase koje nisu članovi sebe samih. Onda se zapitao da li je 0 član same sebe ili ne, i bio je i iznenađen i užasnut odgovorom. Pretpostavimo, s jedne strane, da je 0 član od 0, onda, pošto svi članovi od 0 nisu članovi sebe samih, sledi da 0 nije član od 0. Pretpostavimo sada, s druge strane, da 0 nije član od 0; onda direktno sledi da je 0 član od 0 zato što su sve klase koje nisu članovi sebe samih članovi od 0. Ova dva zaključka možemo da izrazimo kao paradoks: 0 je član od 0 ako i samo ako 0 nije član od 0. Ovo se danas naziva Raselov paradoks.

Kada je otkrio ovaj paradoks, Rasel je na svaki mogući način pokušavao da ga reši. Ali, svi njegovi pokušaji bili su uzaludni. Sa ovim paradoksom je upoznao i druge logičare i uvideo je da oni nisu mogli da pronađu išta pogrešno u njegovom rasuđivanju. Vajthed je uistinu lamentirao, “nikada više neće biti novog jutra koje uliva poverenje“, što je samo produbljivalo Raselov očaj. Ali jedna stvar je bila jasna, veliki deo *Principa* morao je da bude pre-rađen. Rasel je ovaj paradoks najpre objavio u *Principima* (§78). Otkriće protivrečnosti odgodilo je objavljivanje knjige. Ako je to uopšte bilo moguće, on je u knjigu želeo da uključi način na koji bi paradoks mogao da se ukroti. Godinu dana se rvao sa ovim problemom, isprobavajući jednu ideju za drugom, ali se uglavnom vraćao rešenju koje je nazvao „teorijom tipova" kao najboljem od razočaravajućeg mnoštva rešenja. Na kraju je odlučio da dalje ne odlaže objavljivanje, te je uključio apendiks u kome je ukratko prikazao teoriju tipova kao najbolji lek za paradoks koji je bio u stanju da otkrije.

Pored toga što je originalna i značajna knjiga iz logike i filozofije matematike, *Principi* su takođe i vrlo solidno delo iz metafizike. Šteta je što ova činjenica nije šire poznata. Ovo široko rasprostranjeno neznanje je dobrim delom uzrokovano samim naslovom knjige. *Principi matematike* bez podnaslova izgleda kao da potencijalnom čitaocu kaže da je njen sadržaj ograničen na matematiku. Međutim, u njoj se skoro svi klasični metafizički problemi podrobno razmatraju, pri čemu je izuzetak problem egzistencije ili ne-egzistencije boga. Prostor i vreme, materija i kretanje i uzročnost, jedno i mnogo, klase i brojevi, sve je to prošlo Raselov tretman i on o svemu tome ima interesantnih stvari da kaže. Postoji i drugi razlog zašto ova knjiga nije široko poznata kada je reč o metafizičkim razmatranjima. Kada je knjiga *Principia Mathematica* (1910–13) koju je Rasel napisao zajedno sa Vajthedom bila objavljena, sa svih strana je pretpostavljano da je ovo delo prevazišlo *Principe*. Ovo je sigurno delimično tačno, ali samo delimično. Većina Raselovih metafizičkih razmatranja nema pandan u *Principia*. Stoga *Principi matematike* mogu da se čitaju ne samo kao stepenica ka *Principia Mathematica* već takođe i kao značajan prikaz načina na koji je Rasel video svet, naročito u periodu *fin–de–siècle*.

Džon G. Slejter
Univerzitet u Torontu

UVOD BERTRANDA RASELA U DRUGO IZDANJE IZ 1937. GODINE

Principi matematike su bili objavljeni 1903, a veći deo bio je napisan 1900. godine. U godinama koje su sledile, predmeti kojima se ova knjiga bavi naširoko su razmatrani, a tehnika matematičke logike je znatno popravljena, i dok su neki novi problemi nastali, neki stari su bili rešeni, a neki drugi, iako i dalje imaju sporan status, dobili su posve novi oblik. U takvim okolnostima mi je izgledalo beskorisno da pokušavam da u knjizi popravim ovo ili ono, a što više ne izražava moje aktualno gledište. Interesovanje koje ova knjiga danas ima jeste istorijskog karaktera i sastoji se u činjenici da predstavlja izvesnu etapu u razvoju istraživanja predmeta kojim se bavi. Stoga nisam ništa menjao, ali ću u ovom uvodu nastojati da preciziram u kom smislu se i dalje slažem sa stavovima koje ona izražava, a u kom smislu su mi kasnija istraživanja ukazala na one stavove koji su pogrešni.

Fundamentalna teza knjige, da su matematika i logika identične, jeste nešto za šta nikada nisam video razloga da promenim. Ova teza isprva nije bila popularna zato što je logika tradicionalno povezivana sa filozofijom i Aristotelom, tako da su je matematičari doživljavali kao nešto što nema nikakve veze sa njihovim poslom, a oni koji su sebe smatrali logičarima odbijali su da ovladaju jednom novom i prilično teškom matematičkom tehnikom. Ali, ovakva osećanja se ne bi nipošto održala da nisu bila podržana ozbiljnijim razlozima za sumnju. Ovi razlozi su, uopšteno govoreći, razlozi dve suprotne vrste: prvo, to što postoje izvesne nerešene teškoće u matematičkoj logici koje čine da ona izgleda manje pouzdano nego što se za matematiku verovalo da je slučaj; drugo, to što logička osnova matematike, ako se prihvati, opravdava ili teži da opravda mnoga postignuća, kao što je ono Georga Kantora, a na koja mnogi matematičari gledaju sa podozrenjem zbog nerešenih paradoksa koje ona dele sa logikom. Ove dve suprotne kritike iznesne su od strane formalista predvođenih Hilbertom i intuicionista predvođenih Brauerom.

Formalistička interpretacija matematike ni u kojem slučaju nije nova, ali radi naših ciljeva možemo da ignorišemo njene starije oblike. Onako kako ju je predstavio Hilbert, u sferi broja, na primer, ona se sastoji u tome što se celi brojevi ostavljaju nedefinisanim, ali se o njima tvrde takvi aksiomi koji omogućavaju dedukciju uobičajenih aritmetičkih iskaza. Drugim rečima, simbolima 0, 1, 2, ... ne pripisuje se nikakvo značenje, izuzev toga da imaju izvesna svojstva koja su nabrojana u aksiomima. Dakle, ove simbole treba posmatrati kao promenljive. Drugi celi brojevi mogu da se definišu onda kada je data 0, ali 0 je naprosto nešto što ima određene pripisane karakteristike. Shodno tome, simboli 0, 1, 2, ... ne predstavljaju određeni niz već bilo koju progresiju. Formalisti su zaboravili da su nam brojevi potrebni ne samo radi sabiranja već i radi brojanja. Iskazi poput „ima dvanaest apostola“ ili „London ima 6.000.000 stanovnika“ ne mogu da se interpretiraju u njihovom sistemu. Jer, simbol „0“ može se uzeti da znači bilo koji konačan ceo broj a da se pri tome ne učini lažnim bilo koji od Hilbertovih aksioma. Tako svaki broj-simbol postaje beskonačno dvosmislen. Formalisti su kao sajdžija koji toliko obraća pažnju na to da satove učini što lepšim, da zaboravlja da je njihova svrha to da kazuju koliko je sati i stoga propušta da ubaci zupčanike.

Postoji još jedna druga teškoća sa kojom se susreće formalista, naime, ona koja se tiče egzistencije. Hilbert pretpostavlja da ako neki skup aksioma ne vodi protivrečnosti, onda mora da postoji neki skup objekata koji ih zadovoljavaju; shodno tome, umesto da nastoji da ustanovi teoreme egzistencije dajući primer, on se posvećuje metodama dokazivanja samo neprotivrečnosti njegovih aksioma. Po njemu je „egzistencija", onako kako se uobičajeno shvata, nepotreban metafizički pojam koji bi trebalo zameniti preciznim pojmom neprotivrečnosti. Ovde je on ponovo zaboravio na to da aritmetika ima i praktičnu primenu. Nema granice u pogledu broja sistema neprotivrečnih aksioma koji bi se mogli izumeti. Naši razlozi da budemo posebno zainteresovani za aksiome koji vode običnoj aritmetici leže izvan same aritmetike i tiču se primene broja na empirijski materijal. Sama ova primena ne predstavlja ni deo logike ni deo aritmetike, ali teorija koja čini ovu primenu *a priori* nemogućom ne može biti tačna. Logička definicija brojeva čini shvatljivom njihovu vezu sa realnim svetom objekata koji mogu da se broje; ne i teorija formalista.

Intuicionistička teorija čiji su zastupnici najpre Brauer, a kasnije Vajl, mnogo je ozbiljnija stvar. Ona je povezana sa jednom filozofijom koju ovde možemo ostaviti po strani: nas jedino interesuje njena veza sa logikom i matematikom. Ovde je suštinska stvar odbijanje da se iskaz smatra ili istinitim ili lažnim ukoliko ne postoji neki metod odlučivanja o alternativama. Dok nema nekog takvog metoda, Brauer poriče zakon isključenja trećeg. Ovim se, na primer, uništava dokaz da ima više realnih od racionalnih brojeva, kao i da u nizu realnih brojeva svaka progresija ima granicu. Sledstveno, znatni delovi analize koji su vekovima smatrani dobro zasnovanim, sada su učinjeni sumnjivim.

Sa ovom teorijom je povezano učenje koje se zove finitizam, a koje dovodi u pitanje iskaze koji uključuju beskonačne skupove ili beskonačne nizove, pod izgovorom da su takvi iskazi neproverlji-

vi. Ovo učenje je jedna forma radikalnog empirizma, a koji mora, ako se ozbiljno uzme, da ima još destruktivnije posledice od onih koje priznaju njegovi zastupnici. Ljude, na primer, iako predstavljaju konačnu klasu, praktično i empirijski je jednako nemoguće izbrojati kao i da ih ima beskonačno. Ako bi se finitistički princip prihvatio, onda ne bismo smeli da tvrdimo *nikakav* opšti iskaz – kao što je „svi ljudi su smrtni" – o skupu koji je definisan njenim svojstvima čak ni stvarnim pominjanjem svih njegovih članova. Ovim bismo ostali bez celokupne nauke i celokupne matematike, a ne samo onih delova koje intuicionisti smatraju problematičnim. Međutim, pogubne posledice ne mogu se uzeti kao dokaz da je neko učenje lažno; a finitističkom učenju, ako ono treba da bude opovrgnuto, može se odgovoriti samo jednom potpunom teorijom saznanja. Ja ne verujem da je ono istinito, ali ne mislim ni da je neko njeno kratko i jednostavno pobijanje moguće.

Odlična i veoma iscrpna rasprava u vezi sa pitanjem da li su matematika i logika identične može se pronaći u trećem tomu Jergensenove *Rasprave o formalnoj logici*, str. 57–200, gde će čitalac pronaći jedno nepristrano ispitivanje argumenata koji su bili upereni protiv ove teze, kao i zaključak koji je uopšte uzev isti kao i moj, naime, da, iako su prethodnih godina pruženi sasvim novi razlozi u prilog odbacivanju svođenja matematike na logiku, nijedan od ovih razloga nije ni u kojem slučaju konkluzivan.

Ovo nas vodi definiciji matematike koja predstavlja prvu rečenicu *Principa*. Neophodno je višestruko izmeniti ovu definiciju. Pre svega, forma „*p* implicira *q*" samo je jedna od mnogih logičkih formi koje matematički iskazi mogu imati. Geometrija me je pre svega navela na to da posebno naglasim baš ovu formu. Bilo je jasno da euklidski i neeuklidski sistemi treba da na isti način budu uključeni u čistu matematiku, kao i da ne moraju da se smatraju uzajamno protivrečnim; stoga moramo samo da tvrdimo da aksiomi impliciraju iskaze, a ne i da su askiomi istiniti i da su zbog toga iskazi koji su istiniti. Ovi primeri su me naveli da stavim neopravdan naglasak na implikaciju koja je samo jedna od istinosnih funkcija, a ne i važnija od drugih. Dalje, kada se kaže "*p* i *q* su iskazi koji sadrže jednu ili više promenljivih" bilo bi, naravno, tačnije reći da su oni iskazne funkcije; međutim, ono što se kaže može da se pravda time što iskazne funkcije još nisu bile definisane, a logičari i matematičari nisu na njih bili naviknuti.

Sada prelazim na nešto važnije, naime, na tvrđenje, „ni *p* ni *q* ne sadrže nikakve konstante izuzev logičkih konstanti". Za sada odlažem raspravu o tome šta su logičke konstante. Pretpostavljajući da je to poznato, moje trenutno mišljenje jeste da odsustvo konstanti koje nisu logičke, mada su nužan uslov za matematički karakter iskaza, nije ujedno i dovoljan uslov. Možda najbolji primeri ovoga jesu iskazi koji se odnose na broj stvari u svetu. Uzmimo recimo: „postoje barem tri stvari u svetu". Ovo je ekvivalentno sa „postoje objekti *x, y* i *z* i svojstva ϕ, ψ i χ takva da *x* ali ne *y* ima svojstvo ϕ, *x* ali ne *z* ima svojstvo ψ, i *y* ali ne *z* ima svojstvo χ". Ovaj iskaz može da se izrazi u isključivo logičkim terminima i može se logički dokazati da je istinit za klase klasa klasâ: od ovih zapravo mora da bude barem četiri, čak i da univerzum ne postoji. Jer, u tom slučaju bi postojala jedna klasa, nulta klasa; dve klase klasâ, naime, klasa koja ne sadrži nijednu klasu i klasa čiji je jedini član nulta klasa; i četiri klase klasa klasâ, naime, ona koja je nulta, ona čiji je jedini član nulta klasa klasâ, ona čiji je jedini član klasa čiji je jedini član nulta klasa, i ona koja predstavlja zbir ove dve poslednje. Ali u nižim tipovima, to jest u tipovima individua, tipovima klasa i tipovima klasa klasâ, ne možemo logički da dokažemo da postoje barem tri člana. Iz same prirode logike moglo bi da se očekuje nešto ove vrste; jer logika stremi nezavisnosti od empirijskih činjenica, a postojanje univerzuma je empirijska činjenica. Istina je da ako svet ne bi postojao, onda ne bi postojale ni knjige iz logike; ali postojanje knjiga iz logike nije jedna od logičkih premisa, niti može da se izvede iz bilo kog iskaza koji ima pravo da se nađe u knjizi iz logike.

U praksi, dobar deo matematike je moguć bez pretpostavljanja egzistencije bilo čega. Celokupna elementarna aritmetika konačnih celih brojeva i racionalnih razlomaka može da se konstruiše; ali na taj način sve ono što podrazumeva beskonačne klase celih brojeva postaje nemoguće. Ovo isključuje realne brojeve i celokupnu analizu. Da bi se izbeglo ovo isključivanje, potreban nam je „aksiom beskonačnosti", kojim se tvrdi da ako je *n* bilo koji konačan broj, onda postoji barem jedna klasa koja ima *n* brojeva. U vreme kada sam pisao *Principe*, pretpostavljao sam da bi to moglo da se dokaže, ali od trenutka kada smo dr Vajthed i ja objavili *Principia Mathematica* postali smo uvereni da je pretpostavljeni dokaz pogrešan.

Prethodni argument zavisi od teorije tipova, koja, iako se u sažetoj formi nalazi već u Apendiksu B *Principa,* ipak nije dostigla onaj nivo razvoja na kojem bi mogla da pokaže da egzistencija beskonačnih klasa ne može logički da se dokaže. Ono što je rečeno u vezi sa teoremama egzistencije u poslednjem paragrafu poslednje glave *Principa* (§474), više mi ne izgleda valjano: sada bih rekao da su takve teoreme egzistencije, uz izvesne izuzetke, primeri iskaza koji mogu da se *iskažu* u logičkim terminima, ali mogu da se dokažu ili opovrgnu samo na osnovu empirijske evidencije.

Drugi primer je aksiom množenja ili njegov ekvivalent, Cermelov aksiom izbora. On tvrdi da, ako je dat skup uzajamno isključujućih klasa od kojih nijedna nije nulta, onda postoji barem jedna klasa koja se sastoji od barem jednog reprezenta od svake klase skupa. Niko ne zna da li je ovo istinito ili ne. Lako je zamisliti univerzume u kojima bi ovo bilo istinito, a nemoguće je dokazati da postoje mogući univerzumi u kojima bi ovo bilo lažno, ali je takođe nemoguće (ili barem ja u to verujem) dokazati da ne postoje mogući univerzumi u kojima bi ovo bilo lažno. Nisam bio svestan neophodnosti ovog aksioma sve do godinu dana nakon objavljivanja *Principa*. Ova knjiga zbog toga sadrži izvesne greške, na primer, tvrđenje iz §119 (na strani 210) da su dve definicije beskonačnosti ekvivalentne, što se može dokazati samo ako se pretpostavi aksiom množenja.

Takvi primeri – koji mogu da se umnožavaju unedogled – pokazuju da neki iskaz može da zadovoljava definiciju kojom *Principi* počinju, a da ipak ne može da se logički ili matematčki dokaže ili pobije. Svi matematički iskazi uključeni su u definiciju (uz izvesne manje ispravke), ali nisu svi iskazi koji su uključeni matematički. Da bi neki iskaz mogao da pripada matematici, mora da ima jedno dodatno svojstvo: prema nekima, on mora da bude „tautološki“, a prema Karnapu on mora da bude „analitički“. Nipošto nije lako tačno definisati ovu karakteristiku; štaviše, Karnap je pokazao da je neophodno razlikovati „analitičko“ i „dokazivo“, zato što je ovo drugo nešto uži pojam. A pitanje da li neki iskaz jeste ili nije analitički ili dokaziv zavisi od aparata premisa kojim počinjemo. Dakle, ukoliko imamo neki kriterijum koji se tiče toga koje su premise prihvatljive, celo pitanje o tome šta su logički iskazi postaje u veoma velikoj meri proizvoljno. Ovo je krajnji nezadovoljavajući zaključak i ja ga ne prihvatam kao konačan. Ali, pre nego što išta više može da se kaže o ovom predmetu, neophodno je da raspravimo pitanje o „logičkim konstantama“ koje igraju suštinsku ulogu u definiciji matematike, u prvoj rečenici *Principa*.

Postoje tri pitanja u vezi sa logičkim konstantama. Prvo, da li tako nešto uopšte postoji? Drugo, kako se one definišu? Treće, da li se one javljaju u iskazima logike? Prvo i treće od ovih pitanja su dvismislena, ali njihova različita značenja mogu da se učine jasnijim pomoću kratke rasprave.

Prvo: da li postoje logičke konstante? Postoji jedan smisao ovog pitanja u kojem možemo da damo jedan, savršeno određen, potvrdan odgovor: u lingvističkom ili simboličkom izražavanju logičkih iskaza, postoje reči ili simboli koji igraju konstantnu ulogu, to jest daju isti doprinos značenju iskaza gde god da se javljaju. Takvi su, na primer, „ili“, „i“, „ne“, „ako-onda“, „nulta klasa“, „0“, „1“, „2“, ... Teškoća je ta što kada analiziramo zapis iskaza u kojem se takvi simboli javljaju, uviđamo da oni nemaju konstituente koji odgovaraju izrazima o kojima je ovde reč. U izvesnim slučajevima ovo je sasvim očevidno: čak ni najvatreniji platonista ne bi pretpostavljao da savršeno „ili“ obitava na nebu, a da su sva „ili“ ovde na zemlji nesavršene kopije nebeskog originala. Ali u slučaju brojeva ovo je daleko manje očigledno. Pitagorina učenja koja počinju aritmetičkim misticizmom uticala su na kasnije filozofe i matematičare mnogo dublje nego što je to uopšte shvaćeno. Brojevi su bili nepromenljivi i večni, slično nebeskim telima; oni su bili intelektom dokučivi: nauka o brojevima bila je ključ univerzuma. Poslednje od ovih verovanja zavodilo je matematičare i ministarstva obrazovanja sve do današnjih dana. Sledstveno, reći da su brojevi simboli koji ne znače ništa ispostavlja se kao najstrašniji oblik ateizma. U vreme kada sam pisao *Principe* delio sam s Fregeom verovanje u platonsku realnost brojeva, koji su u mojoj imaginaciji naseljavali vanvremeno carstvo Bića. To je bila vera koja teši, ali koju sam kasnije sa žaljenjem napustio. Ovde moram nešto da kažem o koracima koji su me vodili ovom napuštanju.

U Glavi IV *Principa* je rečeno da „svaka reč koja se javlja u rečenici mora imati *neko* značenje“; i još „sve ono što može da bude predmet mišljenja ili što može da se javi u bilo kojem istinitom ili lažnom iskazu, ili da bude uzeto kao *jedno*, ja nazivam *terminom*… čovek, trenutak, broj, klasa, relacija, himera, ili bilo koja druga stvar koja može da se navede, sasvim sigurno je termin; a negirati da je neka takva i takva stvar termin, uvek mora biti lažno“. Ovakav način razumevanja jezika ispostavio se kao pogrešan. Da reč „mora da ima *neko* značenje“ – pri čemu reč, naravno, nije brbljanje već reč koja ima razumljivu upotrebu – nije uvek istinito ako se uzme da se ovo primenjuje na izolovanu reč. Ono što je istinito jeste to da reč doprinosi značenju rečenice u kojoj se nalazi: ali to je sasvim različita stvar.

Prvi korak u ovom procesu bila je teorija deskripcije. Prema ovoj teoriji, u iskazu „Skot je autor Vejverlija“ nema konstituenta koji odgovara „autor Vejverlija“: analiza ovog iskaza izgleda otprilike ovako: „Skot je napisao Vejverlija i onaj koji je napisao Vejverlija bio je Skot“; ili još tačnije: „Iskazna funkcija "*x* je *napisao Vejverlija* ekvivalentno je sa *x je Skot*" istinita je za sve vrednosti od *x*“. Ova teorija uklonila je tvrđenje – koje je, na primer, zastupao Majnong – da u carstvu Bića moraju da postoje takvi objekti kao što su zlatna planina i okrugli kvadrat pošto o njima možemo da govorimo. „Okrugli kvadrat ne postoji“ je iskaz koji je oduvek predstavljao teškoću zato što je bilo prirodno postaviti pitanje: „Šta je to što ne postoji?“, a izgledalo je da svi mogući odgovori impliciraju da u izvesnom smislu postoji neki takav objekat kao što je okrugli kvadrat, mada ovaj objekt ima neobičnu osobinu da ne postoji. Teorija tipova je izbegla i ovu a i druge teškoće.

Sledeći korak bilo je ukidanje klasa. Ovaj korak je načinjen u delu *Principia Mathematica* gde je rečeno: „Simboli za klase, kao i oni za deskripcije, u našem sistemu jesu nepotpuni simboli, njihove *upotrebe* su definisane, ali za njih se ne pretpostavlja da uopšte imaju ikakvo značenje... Tako su klase, ukoliko ih uvodimo, puko simboličke ili lingvističke konvencije, a ne istinski objekti“ (Vol. I, str. 71–72). S obzirom na to da su kardinalni brojevi bili definisani kao klase klasa, i oni takođe postaju „puko simboličke ili lingvističke konvencije“. Tako, na primer, iskaz „1 + 1 = 2“, donekle pojednostavljen, postaje: „Formirajmo iskaznu funkciju "*a* nije *b*, i šta god da je *x*, *x je jedno γ* je uvek ekvivalentno sa *x je a ili x je* *b*"; formirajmo takođe iskaznu funkciju "*a* je jedno *γ*, i šta god da je *x*, *x je γ ali ne a* uvek je ekvivalentno sa *x je b*". Onda, šta god da je *γ*, tvrđenje da jedna od ovih iskaznih funkcija nije uvek lažna (za različite vrednosti od *a* i *b*) ekvivalentno je tvrđenju da ona druga nije uvek lažna". Ovde su brojevi 1 i 2 u potpunosti iščezli, a slična analiza može da se primeni na bilo koji aritmetički iskaz.

Dr Vajthed me je na ovom mestu ubedio da napustim tačke prostora, trenutke vremena i čestice materije, te da ih zamenim logičkim konstrukcijama sastavljenim od događaja. Na kraju je izgledalo da proizlazi da ništa od sirovog materijala sveta nema rafinirana logička svojstva, već da je sve što izgleda kao da ima takva svojstva veštaški konstruisano da bi ih imalo. Ne mislim time da su iskazi koji se odnose na tačke ili trenutke ili brojeve ili na neke druge entitete koje Okamov brijač ukida lažni, već samo da im je potrebna interpretacija koja pokazuje da je njihova lingvistička forma zavodljiva, i da se može uvideti, kada se pravilno izanaliziraju, da se pseudoentiteti o kojima je reč zapravo u njima uopšte ne pominju. „Vreme se sastoji od trenutaka", na primer, može ali ne mora da bude istinit iskaz, ali ma šta od toga da je slučaj, on ne pominje ni vreme ni trenutke. On se otprilike ovako može interpretirati: ako je dat neki događaj *x*, definišimo kao njegove „savremenike" one događaje koji se završavaju pošto on započne, ali počinju pre nego što se on završi; a među njima definišimo kao „inicijalne savremenike" od *x* one događaje koji nisu u potpunosti kasniji od bilo kog drugog savremenika od *x*. Onda je iskaz „vreme se sastoji od trenutaka" istinit ako, kada je dat neki događaj *x*, svaki događaj koji je u potpunosti kasniji od nekog savremenika od *x*, mora biti i u potpunosti kasniji od nekog inicijalnog savremenika od *x*. Sličan proces interpretacije je neophodan i u pogledu većine ako ne i u pogledu svih čisto logičkih konstanti.

Tako pitanje da li se logičke konstante javljaju u iskazima logike postaje teže nego što je izgledalo na prvi pogled. To je u stvari pitanje na koje, kako stvari sada stoje, ne može da se da nikakav određen odgovor zato što ne postoji tačna definicija „javljanja u" iskazu. Ali, nešto ipak može da se kaže. Pre svega, nijedan iskaz logike ne sme da pominje neki pojedinačni objekat. Iskaz „Ako je Sokrat čovek i ako su svi ljudi smrtni, Sokrat je smrtan" nije iskaz logike; logički iskaz čiji je prethodni iskaz samo pojedinačan slučaj jeste: „Ako x ima svojstvo ϕ, i ako sve ono što ima svojstvo ϕ ima svojstvo ψ, onda x ima svojstvo ψ, šta god x, ϕ i ψ bili". Reč "svojstvo" koje se ovde javlja iščezava iz korektno simbolički izraženog iskaza; ali "ako-onda" ili nešto što služi istoj svrsi ostaje. Posle najvećih mogućih napora da se broj nedefinisanih elemenata u logičkom kalkulusu svede, preostaće nam (barem) dva koji izgledaju neophodni: jedan je inkompatibilnost, a drugi istinitost svih vrednosti iskazne funkcije. (Pod inkompatibilnošću dva iskaza podrazumevam da nisu oba istinita). Nijedan od dva elementa ne izgleda naročito supstantivno. Ono što je ranije rečeno o „ili" jednako se primenjuje i na inkompatibilnost, a izgledalo bi apsurdno reći da je opštost konstituent opšteg iskaza.

Logičke konstante, ako uopšte o njima možemo da kažemo bilo šta određeno, moraju da se tretiraju kao deo jezika, a ne kao deo onoga o čemu jezik govori. Na ovaj način logika postaje mnogo više lingvistička nego što sam verovao da je to slučaj u vreme kada sam pisao *Principe*. I dalje ostaje istinito da se nijedne druge konstante, izuzev logičkih konstanti, ne javljaju u verbalnom ili simboličkom izražavanju logičkih iskaza, ali neće biti istina da su logičke konstante imena objekata, kao što bi "Sokrat" trebalo da bude.

Dakle, definisati logiku ili matematiku nipošto nije lako, osim u odnosu na neki dati skup premisa. Logička premisa mora da ima *izvesne* odredive karakteristike: njena opštost mora da bude potpuna u smislu da ne sme da navodi bilo koju posebnu stvar ili kvalitet, a mora da bude istinita na osnovu njene forme. Ako je dat neki određeni skup logičkih premisa, logiku *s obzirom na njih* možemo da definišemo kao bilo šta što nam one omogućavaju da dokažemo. Ali (1) teško je reći šta je to što jedan iskaz čini istinitim na osnovu njegove forme; (2) teško je videti bilo kakav način da se dokaže da je sistem koji proizlazi iz nekog datog skupa premisa potpun u smislu da obuhvata sve ono što bismo želeli da uključimo među logičke iskaze. Što se tiče ovog drugog, bio je običaj da se trenutna logika i matematika uzimaju kao neka datost i da se traži najmanji mogući broj premisa na osnovu kojih bi ta datost mogla da se rekonstruiše. Ali, kada nastanu sumnje – kao što su nastale – u pogledu valjanosti izvesnih delova matematike, ovaj metod nas uvek ostavlja na cedilu.

Deluje jasno da mora da postoji neki način definisanja logike koji se razlikuje od onog koji bi se odnosio na neki pojedinačan logički jezik. Fundamentalna karakteristika logike je očigledno ona na koju se ukazuje kada se kaže da su logički iskazi istiniti na osnovu njihove forme. Pitanje dokazivosti ovde ne može da se postavi zato što bi svaki iskaz koji je izvodiv iz premisa u nekom sistemu mogao i sâm da se uzme kao premisa u nekom drugom sistemu. Ako je iskaz složen, to je nezgodno, ali ne treba da bude nemoguće. Svi iskazi koji su dokazivi u nekom prihvatljivom logičkom sistemu moraju da sa premisama dele svojstvo da su istiniti na osnovu njihove forme; a svi iskazi koji su istiniti na osnovu njihove forme mogli bi da se uključe u bilo koju adekvatnu logiku. Neki logičari, poput Karnapa u njegovoj *Logičkoj sintaksi jezika*, tretiraju ceo ovaj problem kao da je mnogo više stvar lingvističkog izbora nego što ja to mogu da verujem. U pomenutom delu Karnap ima dva logička jezika, jedan koji priznaje aksiom množenja i aksiom beskonačnosti, i drugi koji ih ne priznaje. Ja ne mogu da vidim kako jedna takva stvar može da se reši našim proizvoljnim izborom. Izgleda mi da ovi aksiomi ili imaju ili nemaju karakteristiku formalne istine koja karakteriše logiku, a ako je imaju onda svaka logika mora da ih uključuje, a u suprotnom mora da ih isključuje. Međutim, priznajem da ne mogu da pružim nikakvo jasnije objašnjenje onoga što se podrazumeva kada se kaže da je iskaz „istinit na osnovu njegove forme“. Ali ova fraza, neadekvatna kakva je, jasno ukazuje na prirodu problema koji mora da se reši kako bismo pronašli adekvatnu definiciju logike.

Za kraj prelazim na pitanje protivrečnosti i teorije tipova. Anri Poenkare, koji je smatrao da matematička logika nije ni od kakve koristi u kontekstu otkrića, te da je samim tim sterilna, radovao se protivrečnostima: „La logistique n'est plus stérile; elle engendre la contradiction“*! Međutim, jedino je matematička logika učinila očiglednim protivrečnosti koje slede na osnovu premisa koje su ranije prihvatali svi logičari, ma koliko neupućeni u matematiku. Niti su sve ove protivrečnosti nove, jer neke od njih potiču još iz vremena Grka.

U *Principima* se pominju samo tri protivrečnosti: Burali Fortijeva protivrečnost koja se tiče najvećeg ordinala, protivrečnost koja se tiče najvećeg kardinala i moja, koja se tiče klasa koje nisu članovi sebe samih (Glava X, §100ff; §344; takođe i Appendix B, §500). Ono što je tamo rečeno u pogledu mogućih rešenja, može da se ignoriše izuzev Apendiksa B koji se odnosi na teoriju tipova, a čak i to je izloženo samo kao gruba skica. Literatura o ovim protivrečnostima je nepregledna i predstavlja predmet sporenja. Najpotpuniji tretman ovih protivrečnosti koji je meni poznat može se naći u Karnapovoj *Logičkoj sintaksi jezika* (*Logical Syntax of Language*, Kegan Paul, 1937). Ono što Karnap o njima kaže izgleda mi ili tačno ili tako da je teško to pobiti, zbog čega pobijanje ne bi moglo ni da se pokuša u malo prostora. Stoga ću se ograničiti samo na nekoliko opštih primedbi.

Na prvi pogled izgleda da su protivrečnosti trojake vrste: one matematičke, logičke i one za koje se može posumnjati da poči-

* „Logika nije više jalova, ona rađa protivrečnost!“ (prim. prev.).

vaju na nekom više ili manje trivijalnom jezičkom triku. Od onih protivrečnosti koje su definitivno matematičke, one koje se tiču najvećeg ordinala i najvećeg kardinala mogu se uzeti kao tipične.

Prva od ovih, Burali Fortijeva, glasi: poređajmo sve ordinalne brojeve u poredak po veličini; poslednji od njih koji ćemo nazvati N jeste najveći od ordinala. Ali broj svih ordinala od 0 do N jeste $N + 1$ koji je veći od N. Ne možemo da izvrdamo sugerisanjem da niz ordinalnih brojeva nema poslednji termin; jer i u tom slučaju isto tako sam ovaj niz ima ordinalni broj koji je veći od bilo kog člana tog niza, to jest, veći od bilo kog ordinalnog broja.

Druga protivrečnost, ona koja se odnosi na najveći kardinalni broj, ima tu zaslugu da čini naročito očiglednom potrebu za teorijom tipova. Zahvaljujući elementarnoj aritmetici znamo da je broj kombinacija od n stvari, gde je n bilo koji broj, 2^n te tako klasa od n termina ima 2^n potklasa. Možemo da dokažemo da ovaj iskaz ostaje istinit čak i kada je n beskonačno. A Kantor je dokazao da je 2^n uvek veće od n. Stoga ne može da postoji najveći kardinalni broj. Ipak, moglo bi se pretpostaviti da bi klasa koja sadrži sve morala da ima najveći mogući broj članova. Međutim, pošto broj klasa stvari premašuje broj stvari, jasno je da klase stvari nisu stvari. (Ukratko ću objasniti šta ovo tvrđenje znači).

Od protivrečnosti čija je logička priroda očigledna, jedna je razmatrana u Glavi X; među protivrečnostima iz lingvističke grupe, najpoznatija je ona o lažljivcu, koju su smislili Grci. Ona glasi: pretpostavimo da neki čovek kaže „ja lažem“. Ako on laže, njegov iskaz je istinit te stoga on ne laže; ako on ne laže, onda, kada kaže da laže, on laže. Dakle, svaka od hipoteza implicira ono što joj protivreči.

Logičke i matematičke protivrečnosti, kao što i može da se očekuje, ne mogu zapravo da se razluče jedne od drugih: ali prema Remziju[1] lingvistička grupa može da se razreši onim što u širokom

---

[1] *Foundations of Mathematics*, Kegan Paul, 1931, str. 20 ff.

smislu može da se nazove lingvističkim razmatranjima. Lingvističke protivrečnosti se razlikuju od logičkih time što uvode empirijske pojmove, poput onoga što neko tvrdi ili ima na umu; a pošto ovi pojmovi nisu logički, moguće je pronaći rešenja koja zavise od drugih a ne od logičkih razmatranja. Ovo omogućava znatno pojednostavljenje teorije tipova koja, kao što to proizlazi iz Remzijevih razmatranja, u celini prestaje da deluje kao vestačka ili puka *ad hoc* hipoteza, skrojena za izbegavanje protivrečnosti.

Tehnička suština teorije tipova svodi se na sledeće: ako je data iskazna funkcija „ϕx“ čije su sve vrednosti istinite, postoje izrazi kojima nije legitimno zameniti „x“. Na primer: sve vrednosti od „ako je x čovek, x je smrtno“ jesu istinite i možemo da izvedemo „ako je Sokrat čovek, Sokrat je smrtan“; ali ne možemo da izvedemo „ako je zakon protivrečnosti čovek, zakon protivrečnosti je smrtan“. Teorija tipova kaže da je ovaj drugi skup reči besmislen, i daje nam pravila koja se tiču dopustivosti za vrednosti od „x“ u „ϕx“. Postoje teškoće i komplikacije u vezi sa detaljima, ali je ovaj opšti princip samo precizniji oblik jednog principa koji je oduvek bio opšte priznat. U starijoj konvencionalnoj logici, uobičajeno se isticalo da oblici reči poput „Vrlina je trouglasta“ nisu niti istiniti niti lažni, ali niko nije pokušao da dođe do nekog pravila na osnovu kojeg bi moglo da se odluči da li je dati niz reči smislen ili ne. To je ostvarila teorija tipova. Tako, na primer, gore sam tvrdio da „klase stvari nisu stvari“. Ovim se zapravo hoće reći sledeće: „Ako su "x je član klase α" i "ϕx" iskazi, onda "$\phi \alpha$" nije iskaz već besmileni skup simbola“.

Ima još puno kontroverznih pitanja u matematičkoj logici koja na prethodnim stranicama nisam ni pokušao da rešim. Pominjao sam samo one stvari u pogledu kojih se, po mom mišljenju, od vremena od kada sam napisao *Principe,* desio neki prilično značajan napredak. Uopšteno govoreći, i dalje mislim da je ova knjiga u pravu tamo gde se ne slaže sa onim što se prethodno verovalo, ali da bi mogla da bude u krivu tamo gde se slaže sa starijim teorijama. Promene u filozofiji koje mi deluju neophodno, delom potiču od tehničkog napretka u matematičkoj logici u proteklih trideset četiri godine, koji je pojednostavio aparat ideja i primitivnih iskaza i uklonio brojne prividne entitete poput klasa, tačaka i trenutaka. Uopšte uzev, dobijeni rezultat je manje platonski ili manje realistički u sholastičkom smislu reči. Koliko daleko je moguće ići putem nominalizma, po mom mišljenju jeste pitanje koje ostaje nerešeno, ali koje, nezavisno od toga da li je u potpunosti rešivo ili ne, jedino može da se adekvatno istraži sredstvima matematičke logike.

1937. godine Bertrand RASEL

PREDGOVOR

Ova knjiga ima dva glavna cilja. Jedan od njih – dokaz da se celokupna čista matematika bavi isključivo pojmovima koji mogu da se definišu pomoću veoma malog broja fundamentalnih logičkih pojmova, i da su svi njeni iskazi izvodivi iz veoma malog broja fundamentalnih logičkih principa – biće predmet istraživanja u delovima II–VII ovog toma, a biće ostvaren strogo simboličkim rasuđivanjem u drugom tomu*. Dokaz ove teze, ako se ne varam, isvestan je i precizan koliko i bilo koji drugi matematički dokaz. Pošto se ova teza tek nedavno javila među matematičarima, a skoro univerzalno je poricana od strane filozofa, u ovom tomu sam nastojao da branim njene različite aspekte, kada god se za to ukazala prilika, od različitih teorija koje su ili najšire zastupane ili ih je pak najteže pobiti.Takođe sam nastojao da, što je moguće manje, tehnički predstavim najznačajnije faze u izvođenjima na osnovu kojih je ova teza ustanovljena.

Drugi cilj ovog rada, kome je posvećen Prvi deo, jeste objašnjenje fundamentalnih pojmova koje matematika prihvata kao

* Čitalac bi trebalo da ima na umu da se „drugi tom" *Principa* o kojem Rasel ovde govori nikada nije pojavio. Ono što on ovde ima u vidu jeste tom za koji je obezbedio saradnju s Vajthedom, odakle je proizašlo trotomno delo *Principia Mathematica* (prim. stručnih redaktora prevoda).

nedefinljive. Ovo je čisto filozofski posao i ne mogu sebi da laskam da sam učinio išta više nego što sam ukazao na jedno široko polje istraživanja i ponudio jednostavne metode pomoću kojih to istraživanje može da se sprovodi. Diskusija o onome što ne može da se definiše – koja čini glavni deo filozofske logike – sastoji se u naporu da se jasno sagledaju entiteti, i omogući da i drugi to učine, o kojima je tu reč, tako da duh s tim entitetima bude upoznat na isti način kao što je upoznat sa crvenim ili sa ukusom ananasa. Tamo gde su, kao i u slučaju koji trenutno razmatramo, nedefinljive dobijene, pre svega, kao neminovni ostatak analize, često je lakše znati da mora biti takvih entiteta nego te entitete i stvarno opaziti, a što je rezultat procesa koji je analogan onom koji je doveo do otkrića Neptuna, uz tu razliku što je poslednji stadijum – traganje pomoću mentalnog teleskopa za entitetom koji je izveden – često i najteži deo poduhvata. Moram da priznam da u slučaju klasa nisam uspeo da uvidim bilo koji pojam koji bi ispunjavao uslove koje zahteva pojam *klase*. I protivrečnost koja je ispitivana u Glavi X dokazuje da tu ima nečeg pogrešnog, ali šta je to tačno do sada nisam uspeo da otkrijem.

Drugi tom za koji sam imao sreće da osiguram saradnju sa gospodinom A. N. Vajthedom, biće namenjen isključivo matematičarima; on će sadržati nizove izvođenja, od premisa simboličke logike, preko konačne i beskonačne aritmetike, do geometrije, po redu koji odgovara onom koji je usvojen u ovom tomu; taj drugi tom će takođe da sadrži više originalnih postignuća, pri čemu se metod profesora Peana, dopunjen logikom relacija, pokazao kao moćni instrument matematičkog istraživanja.

Ovaj tom koji može da se smatra ili komentarom drugog toma ili pak uvodom u njega, namenjen je u jednakoj meri i filozofima i matematičarima, ali će neki delovi biti interesantniji jednima, a neki drugi drugima. Savetovao bih matematičarima da, osim ukoliko nisu posebno zainteresovani za matematičku logiku, počnu od Dela IV i da se vraćaju ranijim delovima već prema prilici. Sledeći delovi su specifičnije filozoski: Deo I (izuzev glave II); Deo II, Glave XI, XV, XVI i XVII; Deo III; Deo IV, §207, Glave XXIV, XXVII, XXXI; Deo V, Glave XLI, XLII, XLIII; Deo VI, Glave L, LI, LII; Deo VII, Glave LIII, LIV, LV, LVII, LVIII; a dva Apendiksa koji pripadaju Delu I trebalo bi čitati u vezi sa njim. Rad profesora Fregea, koji uveliko anticipira moj sopstveni, bio mi je najvećim delom nepoznat kada je započet rad na štampanju ove knjige; pročitao sam njegove *Grundgesetze der Arithmetik* ali zbog njegovog simbolizma koji je predstavljao veliku teškoću nisam stigao da razumem njihovu važnost i da shvatim njihov sadržaj. Jedini način da odam priznanje njegovom delu bio je da mu posvetim, makar i u poslednjem trenutuku, jedan apendiks; mišljenje koje je u njemu sadržano razlikuje se od onoga u Glavi VI, a posebno u §§71, 73 i 74. U vezi sa pitanjima koja se razmatraju u ovim odeljcima, otkrio sam neke greške pošto sam već predao rukopis u štampu; ove greške, od kojih su glavne poricanje nulte klase i poistovećivanje termina s klasom čiji je on jedini član, ispravljene su u apendiksima. Razmatrane teme su toliko teške da imam slabo poverenje u moja trenutna gledišta i sva rešenja koja mogu da se brane smatram suštinski hipotetičkim.

Nekoliko reči o nastanku ove knjige bi moglo da ukaže na značaj pitanja koja su u njoj razmatrana. Pre otprilike šest godina počeo sam sa istraživanjem filozofije dinamike. Pri tome sam naišao na teškoću da, kada je neka čestica podvrgnuta različitim silama, nijedno od komponentnih ubrzanja se ne javlja aktualno, već je aktualno samo rezultantno ubrzanje kojeg komponentna ubrzanja nisu delovi; ova činjenica je učinila iluzornim onaj tip uzročnosti među partikularijama o kojem, na prvi pogled, govori zakon gravitacije. Takođe je delovalo da je teškoća u pogledu apsolutnog kretanja nerešiva pomoću relacionističke teorije prostora. Ova dva problema su me navela da preispitam principe geometrije, a zatim i filozofiju kontinuiteta i beskonačnosti, što me je na kraju odvelo i značenju reči *bilo koji* i simboličkoj logici. Krajnji rezultat u pogledu filozofije dinamike izgledao je možda prilično mršavo; razlog tome jeste činjenica da su mi skoro svi problemi dinamike izgledali empirijski, te stoga izvan domena jednog ovakvog rada. Brojna, veoma zanimljiva, pitanja bila su izostavljena, naročito u Delovima VI i VII, zato što su bila irelevantna za moju svrhu koju je, zbog straha od nerazumevanja, bolje da preispitam sada.

Kada brojimo stvarne objekte, ili kada se geometrija i dinamika primene na aktualni prostor ili aktualnu materiju, ili kada se na bilo koji drugi način matematičko rasuđivanje primeni na ono što postoji, to rasuđvanje ima formu koja ne zavisi od objekata na koje je primenjeno, zato što su ti objekti naprosto takvi kakvi jesu, već zavisi samo od toga što ti objekti imaju izvesna opšta svojstva. U čistoj matematici nikada se neće raditi o stvarnim objektima koji postoje u svetu, već samo o hipotetičkim objektima koji imaju ona opšta svojstva od kojih zavisi bilo koje izvođenje; a ova opšta svojstva biće uvek izražena pomoću fundamentalnih pojmova koje nazivam logičkim konstantama. Tako, kada se u čistoj matematici govori o prostoru ili o kretanju, tu se ne govori o onakvom stvarnom prostoru ili o onakvom stvarnom kretanju kakve ih znamo u našem iskustvu, već o bilo kojem entitetu koji ima ona apstraktna opšta svojstva prostora ili kretanja koja se upotrebljavaju u rasuđvanjima u geometriji ili dinamici. Pitanje da li ova svojstva stvarno pripadaju aktualnom prostoru ili aktualnom kretanju irelevantno je u čistoj matematici, te samim tim i u ovoj knjizi, a pošto je, po mom mišljenju, to jedno čisto empirijsko pitanje, ono treba da se istraži u laboratoriji ili u opservatoriji. Indirektno, istina je da su diskusije povezane sa čistom matematikom veoma značajne za takva empirijska pitanja pošto su za matematički prostor i kretanje mnogi, a možda i većina filozofa, tvrdili da su samoprotivrečni te stoga i nužno različiti od stvarnog prostora i kretanja, dok, ako su gledišta koja branim na sledećim stranama valjana, nikakve takve protivrečnosti ne mogu da se pronađu u matematičkom prostoru i kretanju. Ali, izvan-matematička razmatranja ove vrste su skoro potpuno isključena iz ove knjige.

U pogledu fundamentalnih pitanja filozofije, moja pozicija u svim njenim glavnim crtama potiče od gospodina Dž. E. Mura. Od njega sam prihvatio da iskazi nemaju egzistencijalnu prirodu (osim onih koji tvrde egzistenciju) i da su nezavisni od bilo kog saznajućeg subjekta; a takođe sam prihvatio i pluralizam koji se tiče sveta, kao i egzistencije i entiteta koji se sastoje od beskonačnog broja međusobno nezavisnih entiteta, pri čemu su relacije fundamentalne i nisu svodive na prideve njihovih termina ili na celine koje ti termini sačinjavaju. Pre nego što sam kod Mura otkrio takve ideje nisam uopšte mogao da konstruišem bilo kakvu filozofiju aritmetike, dok me je prihvatanje Murovih ideja odmah oslobodilo velikog broja teškoća za koje sam inače verovao da su nepremostive. Ove teze su, po mom mišljenju, neophodne za svaku iole zadovoljavajuću filozofiju matematike, a što će, nadam se, biti pokazano na stranama koje slede. Ali, moram ostaviti mojim čitaocima da prosude u kojoj meri rasuđivanje pretpostavlja ovakva učenja, a u kojoj meri ono podupire njih. Formalno, moje premise su naprosto pretpostavljene; ali činjenica da one omogućavaju matematici da bude istinita, dok većina tekućih filozofija to ne čini, zasigurno je snažan argument u prilog mojim premisama.

Što se matematike tiče, najviše dugujem, a što je zaista očigledno, Georgu Kantoru i profesoru Peanu. Da sam se ranije upoznao sa delom profesora Fregea, moj dug njemu bio bi mnogo veći, ali kako je tako je, i ja sam nezavisno od njega došao do mnogih rezultata koje je on već ustanovio. U svakoj etapi mog rada, više nego što to mogu da izrazim, svojim sugestijama, kritikama i uopšte ohrabrenjima podupirao me je gospodin A. N. Vajthed; on je takođe pažljivo isčitavao moje dokaze i u velikoj meri je poboljšavao konačni izgled vrlo velikog broja pasusa. I gospodinu Džonsonu takođe dugujem zahvalnost za mnoge korisne ideje, a za delove koji su više filozofski, ponajviše dugujem gospodinu Dž. E. Muru, nezavisno od opšteg stanovišta koje je u osnovi celog ovog projekta.

U nastojanju da pokrijem jedno tako široko polje, bilo je nemoguće da steknem iscrpno znanje o postojećoj literaturi. Bez sumnje ima mnogo značajnih dela sa kojima nisam upoznat; ali tamo gde napor mišljenja i pisanja neminovno oduzima tako mnogo vremena, takvo neznanje, koliko god ono bilo za žaljenje, deluje neizbežno.

Videćete da su mnoge reči tokom razmatranja definisane u smislu koji očigledno, u velikoj meri, odudara od njihove uobičajene upotrebe. Takvo odstupanje, moram zamoliti čitaoca da mi veruje, nipošto nije stvar hira već je svaki put učinjeno uz veliko opiranje. U filozofskim pitanjima, takva odstupanja su neophodna iz dva razloga. Prvo, često se dešava da moramo da razmatramo dva srodna pojma, a da jezik raspolaže sa dva imena za jedan od njih, ali ni sa jednim za onaj drugi. Onda je mnogo zgodnije da napravimo razliku između dva imena koja su uobičajeno sinonimi, zadržavajući jedno za uobičajeni smisao, a drugo za smisao za koji do sada nije bilo imena. Drugi razlog nastaje iz filozofskog neslaganja sa nekim vladajućim gledištima.Tamo gde se uobičajeno pretpostavljalo da su dva kvaliteta spojena, ali ih ovde smatramo razdvojivim, ime koje se primenjivalo za njihovu kombinaciju biće uglavnom rezervisano za jedan od njih. Na primer, obično se smatra da su iskazi (1) istiniti ili lažni i (2) mentalni. Pošto smatram da ono što je istinito ili lažno uopšte uzev nije mentalno, zahtevam ime za istinito ili lažno kao takvo i to ime teško da može da bude neka druga stvar nego iskaz. U takvom slučaju, odudaranje od uobičajene upotrebe nije ni u kojoj meri proizvoljno. U pogledu matematičkih termina, neophodnost uspostavljanja teorema egzistencije u svakom slučaju – to jest dokaz da postoje entiteti vrste o kojoj je reč – vodila je mnogim definicijama koje su naizgled znatno različitije od pojmova koji su se uobičajeno povezivali sa terminima o kojima se tu radi. Primeri ovoga jesu definicije kardinalnih, ordinalnih i kompleksnih brojeva. U prvom od ovih, a i u mnogim drugim slučajevima, njihova definicija kao klase koja je izvedena iz principa apstrakcije preporučljiva je zato što ne ostavlja nikakvu sumnju u pogledu teoreme egzistencije. Ali, u brojnim slučajevima ovakvih očiglednih odstupanja od tekuće upotrebe, može se posumnjati da li je učinjeno išta više od toga što je pojam koji je do sada bio manje-više nejasan postao precizniji.

Moje izvinjenje zbog objavljivanja dela koje sadrži toliko nerešenih teškoća sastoji se u tome što istraživanje nije otkrilo nikakvu mogućnost da se u skorijoj budućnosti na adekvatan načn razreši protivrečnost koju sam ispitao u Glavi X, ili da se stekne bolji uvid u prirodu klasa. Ponovno otkriće grešaka u rešenjima koja su me barem neko vreme zadovoljavala, učinilo je da ovi problemi izgledaju onako kakvi bi bili da su samo bili skriveni bilo kojim naizgled zadovoljavajućim teorijama koje je moglo da proizvede neko malo duže promišljanje. Zato mi je izgledalo da je bolje da jednostavno izložim teškoće nego da čekam kako bih se uverio u istinitost neke skoro sigurno pogrešne teorije.

Dugujem zahvalnost članovima administracije Cambridge University Press i njihovom sekretaru, gospodinu R.T. Rajtu, za njihovu ljubaznost i pažnju koju su pokazali prema ovom tomu.

London, decembar 1902.

Prvi deo

NEDEFINLJIVO U MATEMATICI

Glava I

DEFINICIJA ČISTE MATEMATIKE

1. Čista matematika je klasa svih iskaza forme „*p* implicira *q*“, gde su *p* i *q* iskazi koji sadrže jednu ili više promenljivih, koje su iste u oba iskaza, i gde ni *p* ni *q* ne sadrže ništa drugo do samo logičke konstante. Ove logičke konstante su, pak, svi oni pojmovi koji mogu da budu definisani pomoću: implikacije, relacije termina prema klasi koje je član, pojma *takvo da*, pojma relacije i svih drugih pojmova koji, uopšte uzev, mogu da budu obuhvaćeni u opštem pojmu iskaza prethodno navedene forme. Pored ovih, matematika *upotrebljava* jedan pojam koji nije konstituent iskaza koje razmatra, naime, pojam istine.

2. Prethodna definicija čiste matematike je, nesumnjivo, donekle neobična. Međutim, njeni različiti delovi mogu egzaktno da se opravdaju – a što je opravdanje koje ova knjiga treba da obezbedi. Pokazaće se i da je sve ono što se u prošlosti mislilo da pripada čistoj matematici uključeno u našu definiciju, i da sve drugo što je u nju uključeno ima one karakteristike po kojima se matematika uobičajeno, na donekle nejasan način, razlikovala od drugih disciplina. Ova definicija upotrebljava jednu običnu reč u neobičnom značenju, ali ne na osnovu neke proizvoljne odluke već pre na osnovu jedne precizne analize ideja koje su, više ili manje nesvesno, implicirane u redovnoj upotrebi ovog termina. Naš metod će, dakle, da bude metod analize, a ovaj problem može da bude nazvan filozofskim – u smislu da nastojimo da pređemo od složenog ka prostom, od dokazivih do nedokazivih premisa. Ali, ne mali broj naših razmatranja će u ovom pogledu da se razlikuje od onih koja se obično smatraju filozofskim. Zahvaljujući radovima samih matematičara moći ćemo da dođemo do izvesnosti u pogledu većine pitanja kojima ćemo se baviti, a među onima koja su takva da mogu da se egzaktno reše, naći ćemo mnoge probleme koji su u prošlosti bili sadržani u neizvesnosti tradicionalnih filozofskih sporova. Priroda broja, beskonačnosti, prostora, vremena i kretanja, a i samog matematičkog zaključivanja, sve su to pitanja na koja će u ovom radu biti dat odgovor sa matematičkom izvesnošću – ovaj odgovor će se, međutim, sastojati u svođenju navedenih problema na probleme čiste logike, za koje, naposletku, u onom što sledi, nećemo naći sasvim zadovoljavajuće rešenje.

3. Filozofija matematike je do sada bila opskurna, bogata kontroverzama i nije se razvijala kao druge grane filozofije. Iako je bilo opšte prihvaćeno da je matematika u izvesnom smislu istinita, filozofi su raspravljali o tome šta matematički iskazi stvarno znače: premda je nešto bilo istinito, ni dve osobe nisu mogle da se slože oko toga šta je to što je bilo istinito i, ako je nešto bilo poznato, niko nije znao šta je to što je bilo poznato. Međutim, sve dok se istrajavalo u sumnji, bilo je teško tvrditi da je neko egzaktno i izvesno saznanje moglo da se dobije od matematike. Uviđamo, otuda, da su idealisti sve više težili tome da matematiku u celini shvataju kao da se bavi pukim pojavama, dok su empiristi smatrali da sve što je matematičko samo predstavlja približavanje nekoj egzaktnoj istini o kojoj nisu mogli ništa da nam kažu. Mora se priznati da je ovo stanje stvari bilo sasvim nezadovoljavajuće. Filozofija pita matematiku: šta je značenje matematike? Matematika u prošlosti nije mogla na to da odgovori, a filozofija je odgovarala uvođenjem sasvim irelevantnog pojma duha. Ali, matematika danas može da odgovori, barem utoliko što celinu svojih iskaza svodi na izvesne fundamentalne pojmove logike. Na ovom mestu rasprava mora da bude nastavljena unutar filozofije. Ja ću nastojati da navedem koji su to fundamentalni pojmovi, da detaljno dokažem da se u matematici osim njih ne nalaze nikakvi drugi pojmovi i da ukratko ukažem na filozofske teškoće sadržane u njihovoj analizi. Potpuno bavljenje ovim teškoćama zahteva raspravu o logici, ali ta rasprava se neće naći na stranicama koje slede.

4. Principi matematike su se doskora suočavali sa posebnom teškoćom. Izgledalo je očigledno da je matematika sačinjena od dedukcija; ortodoksno shvatanje dedukcije se, međutim, pokazalo, delom ili u celini, neprimenljivo na postojeću matematiku. Ne samo aristotelovski silogizam već i moderne doktrine simboličke logike su se u matematičkom rasuđivanju ispostavile ili kao teorijski neadekvatne ili su u svakom slučaju zahtevale toliko veštačke forme tvrđenja da su bile praktično neprimenljive. Na ovoj činjenici je počivala snaga kantovskog gledišta koje je tvrdilo da matematičko rasuđivanje nije strogo formalno nego da uvek koristi opažaj, naime, *a priori* saznanje prostora i vremena. Zahvaljujući napretku simboličke logike, a posebno radovima profesora Peana, ovaj deo kantovske filozofije danas može da se definitivno i neopozivo ospori. Pomoću deset principa dedukcije i deset drugih premisa opšte logičke prirode (na primer, „implikacija je jedna relacija“), celokupna matematika može da bude strogo i formalno dedukovana, a svi entiteti koji se javljaju u matematici mogu da budu definisani pomoću onih koji se javljaju u prethodnih dvadeset premisa. Ovde matematika uključuje ne samo aritmetiku i analizu nego i euklidsku i neeuklidsku geometriju, racionalnu dinamiku i brojne druge discipline koje još nisu ugledale svetlost dana ili koje su još u povoju. Činjenica da matematika u celini nije ništa drugo do simbolička logika, jeste jedno od najvećih otkrića našeg vremena. Kada je jednom tako utemeljena, ostaje da se principi matematike svedu na analizu same simboličke logike.

5. Opšte učenje da je celokupna matematika dedukcija iz i pomoću logičkih principa, snažno je zastupao još Lajbnic koji je neprestano tvrdio da bi aksiomi trebalo da se dokažu i da bi svi pojmovi, izuzev nekoliko fundamentalnih, trebalo da budu definisani. Ali, delom usled neispravne logike, delom usled verovanja u logičku nužnost euklidske geometrije, Lajbnic je bio vođen beznadežnim greškama u svom naporu da ostvari jedan projekat za koji se danas ispostavilo da je ispravan[1]. Na primer, Euklidovi iskazi, onako kako ih je tvrdio, ne slede samo iz logičkih principa; zapažanje te činjenice je vodilo i Kanta njegovim inovacijama u teoriji saznanja. Ali, pojavom neeuklidske geometrije, pokazalo se da u čistu matematiku ni ne spada pitanje da li su Euklidovi aksiomi i iskazi valjani za realni prostor ili ne; to je pitanje za primenjenu matematiku koja treba da ga, ukoliko je to moguće, razreši eksperimentom i posmatranjem. Ono što čista matematika tvrdi je samo to da euklidski iskazi slede iz euklidskih aksioma – na primer, ona tvrdi implikaciju: ma koji prostor koji ima takva i takva svojstva ima takođe takva i takva druga svojstva. Isto tako, sa stanovišta čiste matematike, i euklidska i neeuklidska geometrija podjednako su istinite: u svakoj od ovih geometrija ne tvrdi se ništa drugo do implikacije. Svi iskazi koji se odnose na ono što postoji, kao što je prostor u kome živimo, pripadaju eksperimentalnoj ili empirijskoj nauci, a ne matematici; kada pripadaju primenjenoj matematici, oni proizlaze iz zamene jedne ili više promenljivih u iskazu čiste matematike nekom konstantnom vrednošću koja zadovoljava hipotezu i tako nam omogućavaju da, za tu vrednost promenljive, aktualno tvrdimo i hipotezu i posledicu umesto da tvrdimo samo implikaci-

[1] O tome cf. Couturat, *La logique de Leibniz*, Paris, 1901.

ju. U matematici uvek tvrdimo da ako je izvesna tvrdnja p istinita za bilo koji entitet x ili bilo koji skup entiteta x, y, z, …, onda je neka druga tvrdnja q istinita za ove iste entitete; ali, ne tvrdimo bilo p bilo q odvojeno od naših entiteta. Tvrdimo relaciju između p i q koja se naziva *formalna implikacija*.

6. Matematički iskazi nisu okarakterisani samo time što tvrde implikacije, već ujedno i time što sadrže *promenljive.* Pojam promenljive je jedan od najtežih pojmova s kojima logika ima posla i, uprkos dugim diskusijama, u ovom delu će se teško naći zadovoljavajuća teorija u pogledu njene prirode. Za sada samo želim da učinim jasnim da u svim matematičkim iskazima postoje promenljive, čak i tamo gde na prvi pogled izgleda da ih nema. Moglo bi, na primer, da se pomisli da elementarna aritmetika predstavlja izuzetak: $1 + 1 = 2$ izgleda kao da niti sadrži promenljivu, niti da tvrdi implikaciju. Ali, u stvari, kao što ćemo videti u Drugom delu, pravo značenje ovog iskaza glasi: „ako je x jedan i y jedan, i ako se x razlikuje od y, onda su x i y dva“. Tako, ovaj iskaz sadrži i promenljive i tvrdi implikaciju. Videćemo da se u svim matematičkim iskazima uvek javljaju reči *bilo koji* ili *neki* i da one upućuju na promenljivu i formalnu implikaciju. Tako, gorenavedeni iskaz može da se izrazi u formi „bilo koja jedinica i bilo koja druga jedinica su dve jedinice“. Tipičan matematički iskaz je forme „$\phi(x, y, z, \ldots)$ implicira $\psi(x, y, z, \ldots)$, za bilo koje vrednosti $x, y, z, \ldots$“, gde su $\phi(x, y, z, \ldots)$ i $\psi(x, y, z, \ldots)$ iskazi za svaki skup vrednosti $x, y, z, \ldots$ Ovde nije tvrđeno da je ϕ uvek istinito niti da je ψ uvek istinito, već samo da u svakom slučaju, kada je ϕ lažno, kao i kada je ϕ istinito, iz njega sledi ψ.

Distinkcija između promenljive i konstante je matematičkom upotrebom donekle zamagljena. Uobičajeno je, na primer, reći za parametre da su u izvesnom smislu konstante, ali je to upotreba koju ćemo morati da odbacimo. Konstanta je nešto apsolutno određeno u vezi sa čim ne postoji nikakva dvosmislenost. Tako su 1, 2, 3, *e*, π, Sokrat konstante, a to su i *čovek*, ljudska rasa, prošlost, sadašnjost i budućnost, uzeti kolektivno. Iskaz, implikacija, klasa itd. su konstante; ali, jedan iskaz, bilo koji iskaz, neki iskaz nisu konstante zato što ovi izrazi ne označavaju određeni objekat. I tako, sve ono što je smatrano parametrima zapravo jesu promenljive. Uzmimo, na primer, jednačinu $ax + by + c = 0$ kao jednačinu prave linije u ravni. Tu možemo reći da su x i y promenljive, dok su a, b i c konstante. Ali, osim ako je reč o pojedinačnoj liniji, na primer, liniji između neke posebne tačke u Londonu i neke posebne tačke u Kembridžu, naše a, b i c nisu određeni brojevi nego predstavljaju *bilo koji* broj, te su prema tome isto tako promenljive. Ni u geometriji se ne bavimo pojedinačnim linijama već uvek govorimo o *bilo kojoj* liniji. U stvari, mi okupljamo različite parove x, y u klase klasa, gde svaku klasu čine određeni parovi koji imaju fiksiranu relaciju sa nekom trijadom (a, b, c). Ali, od jedne klase do druge, a, b, c takođe variraju, te su stoga prave promenljive.

7. Uobičajeno je da se u matematici naše promenljive tretiraju kao da su ograničene na izvesne klase: u aritmetici, na primer, za njih se pretpostavlja da predstavljaju brojeve. Ali, to samo znači da *ako* predstavljaju brojeve, one zadovoljavaju neku formulu, to jest hipoteza da su one brojevi implicira formulu. Ovo je, onda, ono što je stvarno tvrđeno i u ovom iskazu nije više nužno da naše promenljive budu brojevi: implikacija je podjednako valjana čak i kada one to nisu. Tako, na primer, iskaz „x i y su brojevi implicira $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$“ podjednako važi ako x i y zamenimo sa Sokrat i Platon[1]: i antecedens i konsekvens su u ovom slučaju lažni, ali je implikacija istinita. Tako u svakom iskazu čiste matematike, kada je on potpuno izražen, promenljive imaju apsolutno neograničeno

[1] Nužno je pretpostaviti da su aritmetičko sabiranje i množenje definisani na takav način (što se lako može učiniti) da ova formula ostaje smislena čak i kada x i y nisu brojevi.

polje: bilo koji shvatljivi entitet može da bude na mestu bilo koje od naših promenljivih, a da se time ne ukine istinitost našeg iskaza.

8. Sada možemo da shvatimo zašto konstante u matematici moraju da budu ograničene na logičke konstante u gore određenom smislu. Proces transformacije konstanti u promenljive u jednom iskazu vodi onome što se naziva uopštavanje i takoreći nam daje formalnu suštinu iskaza. Matematika se isključivo interesuje za *tipove* iskaza; ako dati iskaz *p* sadrži samo konstante i za jedan od njegovih termina zamislimo da je sukcesivno zamenjen drugima, rezultat će, uopšte uzev, ponekada biti istinit, a ponekad lažan. Tako, na primer, ako u iskazu „Sokrat je čovek“, Sokrata zamenimo promenljivom, dobijamo „*x* je čovek“. Izvesne hipoteze u pogledu prirode *x*, na primer „x je Grk“, garantuju nam istinu od „*x* je čovek“; tako „*x* je Grk“ implicira „*x* je čovek“, i to važi za sve vrednosti od *x*. Ali, ovaj izraz ne pripada čistoj matematici pošto zavisi od posebne prirode *Grk* i *čovek*. Međutim, ovo takođe možemo da variramo: ako su *a* i *b* klase, i ako je *a* sadržano u *b*, onda „*x* je *a*“ implicira „*x* je *b*“. Ovde naposletku imamo posla sa iskazom čiste matematike koji sadrži tri promenljive i konstante *klasa*, *sadržano u*, kao i one koje su implicirane pojmom formalne implikacije sa promenljivima. Sve dok bilo koji termin u našem iskazu može da se transformiše u promenljivu, naš iskaz može da se generalizuje; i sve dok je ovo moguće, posao matematike jeste da to i učini. U slučaju više deduktivnih lanaca koji se razlikuju samo u pogledu značenja njihovih simbola, tako da iskazi koji su simbolički identični postaju podložni za više interpretacija, najpogodniji način postupanja u tom slučaju, matematički govoreći, jeste da se formira klasa značenja koja mogu da se pridaju simbolima i da se tvrdi da formula koja je u pitanju proizlazi iz pretpostavke da simboli pripadaju klasi o kojoj je reč. Na ovaj način, simboli koji su predstavljali konstante bivaju transformisani u promenljive, a nove konstante kojima su oni zamenjeni sačinjavaju klase kojima su pripadale stare konstante. Slučajevi ovakvih generalizacija su toliko česti da će se one odmah javiti svakom matematičaru, a nebrojeno mnogo takvih primera će biti dato upravo u ovoj knjizi. Kada god dva skupa termina stoje u uzajamnim relacijama istog tipa, ista forma dedukcije će se primenjivati na oba. Na primer, međusobne relacije tačaka u euklidskoj ravni su istog tipa kao relacije kompleksnih brojeva, pošto geometrija ravni, kao grana čiste matematike, ne treba da odlučuje da li su njene promenljive tačke ili kompleksni brojevi ili neki drugi skup entiteta koji ima isti tip uzajamnih relacija. Govoreći uopšteno, u svakoj grani matematike treba da se bavimo sa bilo kojom klasom entiteta čije su uzajamne relacije određenog tipa; tako klasa, kao i bilo koji poseban termin, postaje promenljiva, a prave konstante su samo tipovi relacija i ono što one obuhvataju. Sada, u ovoj diskusiji, *tip* relacije označava klasu relacija okarakterisanih prethodnim formalnim identitetom dedukcija koje su moguće u pogledu različitih članova klase; prema tome, tip relacija je, kao što će se potpunije pokazati kasnije, ako već sada nije očigledno, uvek klasa koja je definljiva pomoću logičkih konstanti[1]. Prema tome, tip relacije moramo definisati kao klasu relacija definisanih nekim svojstvom koje je definljivo pomoću samih logičkih konstanti.

9. Tako, čista matematika ne sme da sadrži nedefinljive izuzev logičkih konstanti, i, prema tome, nikakve druge premise ili nedokazive iskaze osim onih koji se isključivo tiču logičkih konstanti i promenljivih. To je upravo ono što čistu matematiku razlikuje od primenjene matematike. U primenjenoj matematici, rezultati prikazani čistom matematikom koji proizlaze iz neke pretpostavke koja se odnosi na promenljive jesu stvarno tvrđeni putem izvesnih konstanti koje zadovoljavaju pretpostavku o kojoj je reč. Tako, termini

[1] Jedan-jedan, mnogo-jedan, tranzitivna, simetrična jesu instance tipova relacija sa kojima ćemo se često susretati.

koji su bili promenljive postaju konstante, i uvek nam je potrebna neka nova premisa, naime: ovaj pojedinačni entitet zadovoljava hipotezu koja je u pitanju. Tako je, na primer, euklidska geometrija, kao grana čiste matematike, cela konstituisana od iskaza koji sadrže hipotezu „*S* je euklidski prostor“. Ako odavde pređemo na „prostor koji postoji je euklidski“, onda smo u stanju da tvrdimo posledice svih hipotetičkih iskaza koji konstituišu euklidsku geometriju, gde je promenljiva *S* sada zamenjena konstantom *aktualni prostor.* Ali, ovim korakom prelazimo iz čiste matematike u primenjenu matematiku.

10. Veza matematike i logike je, shodno prethodnom objašnjenju, krajnje bliska. Verujem da činjenica da su sve matematičke konstante logičke konstante, i da su sve premise matematike u vezi sa njima, predstavlja precizan izraz onoga što su filozofi hteli da kažu tvrđenjem da je matematika nešto *a priori.* Činjenica je da čim se jednom usvoji ovaj logički aparat, nužno proizlazi celokupna matematika. Same logičke konstante moraju da budu određene samo nabrajanjem zato što su one toliko fundamentalne da sva svojstva posredstvom kojih bi njihova klasa mogla da se definiše pretpostavljaju izvesne termine te klase. Ali u praksi, metod otkrivanja logičkih konstanti jeste analiza simboličke logike koja je predmet sledeće glave. Razlikovanje matematike od logike je veoma proizvoljno ali, ako se tako želi, ono može da se načini na sledeći način. Logika obuhvata sve premise matematike kao i sve druge iskaze koji se isključivo odnose na logičke konstante i promenljive, što pak ne zadovoljava gorenavedenu definiciju matematike (§1). Matematika obuhvata sve posledice gorenavedenih premisa koje tvrde formalne implikacije, koje sadrže promenljive, kao i same te premise koje se odnose na iste ove karakteristike. Tako će neke premise matematike, na primer, princip silogizma da „ako *p* implicira *q*, a *q* implicira *r*, onda *p* implicira *r*“, pripadati matematici, dok će druge, kao što je „implikacija je relacija“ pripadati logici a ne matematici. Ali, bez želje da sledimo ustaljeni običaj, mogli bismo da poistovetimo matematiku i logiku tako što bismo svaku od njih definisali kao klasu iskaza koji sadrže samo promenljive i logičke konstante; ali, poštovanje prema tradiciji me navodi da zadržim navedenu distinkciju, uz priznanje da izvesni iskazi pripadaju obema naukama.

Iz svega onoga što je do sada rečeno, čitalac će uvideti da ova knjiga treba da ispuni dva cilja: prvo, da pokaže da celokupna matematika proizlazi iz simboličke logike i, drugo, da otkrije, u meri u kojoj je to moguće, koji su principi same simboličke logike. Svi naredni delovi biće posvećeni sleđenju prvog cilja, dok drugi pripada Prvom delu. Ali, pre svega će biti nužno da – kao pripremna faza za sprovođenje kritičke analize – okvirno izložimo simboličku logiku kao granu čiste matematike. Time će se baviti sledeća glava.

Glava II

SIMBOLIČKA LOGIKA

11. Simbolička ili formalna logika – ove termine ću upotrebljavati kao sinonime – predstavlja izučavanje različitih opštih tipova dedukcije. Reč *simbolička* označava samo nebitnu karakteristiku jer ona matematičke simbole upotrebljava, ovde kao i drugde, samo kao pogodnost bez ikakve teorijske relevantnosti. Silogizam u svim njegovim figurama pripada simboličkoj logici i on bi iscrpeo ceo njen predmet ako bi sva dedukcija bila silogistička, onako kako se to pretpostavljalo u sholastičkoj tradiciji. Moderna simbolička logika, od Lajbnica naovamo, svoj nastanak i motivaciju za razvoj duguje otkriću nesilogističkog oblika zaključivanja. Od objavljivanja Bulovih *Zakona mišljenja* izučavanje ovog predmeta je vršeno sa izvesnom strogošću i doseglo je veoma visok stepen tehničkog razvoja[1]. Uprkos tome, ovaj predmet nije bio skoro ni od kakve koristi kako za filozofiju tako i za druge grane matematike, sve dok nije bio transformisan Peanovim metodama[2]. Simbolička

---

[1] Daleko najpotpunije objašnjenje nepeanovskog metoda nalazi se u trećem tomu Schröder, *Vorlesungen über die Algebra der Logik*, Leipzig, 1890, 1891, 1895.

[2] Vidi *Formulaire de Mathématiques*, Torino, 1895 kao i izdanja koja su izašla u godinama nakon toga; takođe vidi i *Revue de Mathématiques*; Vol. VII,

logika je sada u apsolutnom smislu postala značajna ne samo za celokupnu filozofsku logiku već je postala i nužna za razumevanje matematike uopšte, a i za praktične uspehe izvesnih grana matematike. Koliko je uspešna u praksi mogu da procene samo oni koji su doživeli rast moći izveden iz njenih tekovina; a njene teorijske funkcije moraju ukratko da se izlože u ovoj glavi[1].

12. Simbolička logika[2] se u suštini bavi izvođenjem uopšte, a razlikuje se od izvesnih posebnih grana matematike, pre svega, svojom opštošću. Ni matematika ni simbolička logika neće da izučavaju takve specijalne relacije kao što je (recimo) relacija vremenskog prioriteta, već će matematika eksplicitno da se bavi klasama relacija koje poseduju formalna svojstva vremenskog prioriteta – svojstva koja su sadržana u pojmu kontinuiteta[3]. A ova formalna svojstva relacije mogu da se definišu kao ona koja mogu da se izraze pomoću logičkih konstanti, ili, još, kao ona koja, dok su očuvana, dopuštaju da se naša relacija varira a da se time ne učini nevalidnim bilo koje izvođenje u kojem se ta relacija razmatra u svetlu neke promenljive. Ali simbolička logika, u užem smislu, koji je ovde u pitanju, ne nastoji da odredi koji su mogući zaključci u pogledu kontinuiranih relacija (to će reći, relacija koje generišu kontinuirane nizove); ovo ispitivanje pripada matematici jer je još isuviše specifično za simboličku logiku. Ono što simbolička logika

br. 1 (1900). Izdanja *Formulaire* biće citirana i obeležavana kao *F*. 1985, *F*. 1986 itd. *Revue de Mathématiques* koja je originalno bila *Rivista di Matematica* biće navođen kao *R.d.M*.

[1] U izlaganju koje sledi u glavnim crtama najviše dugujem profesoru Peanu, izuzev onoga što se odnosi na relacije; a čak i u onim slučajevima gde odstupam od njegovih gledišta, na probleme koje tamo razmatram su mi ukazala njegova dela.

[2] Odmah mogu da kažem da ne pravim razliku između izvođenja i dedukcije. Ono što se naziva indukcijom je ili maskirana dedukcija ili naprosto metod plauzibilnog nagađanja.

[3] Videti Deo V, Glava XXXVI.

mora da ispita jesu opšta pravila po kojima su zaključi izvedeni i ona zahteva klasifikaciju relacija ili iskaza samo utoliko ukoliko ova opšta pravila uvode neke pojedinačne pojmove. Pojedinačni pojmovi, koji se javljaju u iskazima simboličke logike, kao i svi drugi pojmovi definljivi pomoću njih, jesu logičke konstante. Broj nedefinljivih logičkih konstanti nije veliki; zapravo izgleda da ih ima osam ili devet. Ovi pojmovi sami obrazuju predmet čitave matematike: ništa drugo se ne javlja u aritmetici, geometriji ili racionalnoj dinamici osim onoga što je definljivo pomoću ovih osam ili devet primitivnih konstanti. Za tehničko izučavanje simboličke logike poželjno je uzeti kao jedini nedefinljivi pojam formalne implikacije, to jest, pojam takvih iskaza kao što je „x je čovek implicira x je smrtan, za sve vrednosti od x“ – iskaza čiji je opšti tip: „$\phi(x)$ implicira $\psi(x)$ za sve vrednosti od x“, gde su $\phi(x)$ i $\psi(x)$ iskazi za sve vrednosti od x. Analiza ovog pojma formalne implikacije pripada principima logike, ali nije neophodna za njeno formalno razvijanje. Pored ovog pojma, zahtevaćemo još i sledeće nedefinljive: implikaciju među iskazima koji ne sadrže promenljive, relaciju termina prema klasi koje je on član, pojam *takvo da*, pojam relacije i pojam istine. Posredstvom ovih pojmova mogu da se utemelje svi iskazi simboličke logike.

13. Predmet simboličke logike se sastoji iz tri dela: računa iskaza, računa klasa i računa relacija. Između prva dva, u izvesnim granicama postoji izvestan paralelizam koji nastaje na sledeći način: u bilo kom simboličkom izrazu slova mogu da se interpretiraju kao klase ili kao iskazi, a relacija uključivanja u jednom slučaju može da se zameni relacijom formalne implikacije, u drugom. Tako, na primer, u principu silogizma, ako su a, b i c klase, i ako je a sadržano u b, a b u c, onda je i a sadržano u c; dok ako su a, b i c iskazi i ako a implicira b, a b implicira c, onda i a implicira c. Veliki posao je napravljen na osnovu ovog dualiteta, a u kasnijim izdanjima *Formulara (Formulaire)* izgleda da je Peano žrtvovao logičku preciznost upravo kako bi taj dualitet održao[1]. Ali, strogo uzev, iskazni račun se razlikuje od računa klasa više nego samo u jednom pogledu. Razmotrimo, na primer, sledeći iskaz: „Ako su *p*, *q* i *r* iskazi, i ako *p* implicira *q* ili *r*, onda *p* implicira *q* ili *p* implicira *r*“. Ovaj iskaz je istinit ali je njegov korelat lažan, naime: „ako su *a*, *b* i *c* klase, i ako je *a* sadržano u *b* ili *c*, onda je *a* sadržano u *b* ili je *a* sadržano u *c*“. Na primer, Englezi su svi ili muškarci ili žene, ali oni nisu ni svi muškarci niti su pak svi žene. Činjenica je da dualitet važi za iskaze koji tvrde da termin koji označava promenljivu pripada klasi, što znači za takve iskaze, kao što je iskaz „*x* je čovek“, pod uslovom da je implikacija ili formalna ili da važi za sve vrednosti od *x*. Ali, sâmo „x je čovek“ uopšte i nije iskaz pošto nije ni istinito ni lažno, a iskazni račun se ne bavi entitetima takve vrste nego pravim iskazima. Nastavimo sa prethodnom ilustracijom: istinito je da za sve vrednosti od *x* „*x* je čovek ili žena“ implicira ili „*x* je čovek“ ili „*x* je žena“. Ali, lažno je da „*x* je čovek ili žena“ implicira ili „*x* je čovek“ za sve vrednosti od *x* ili pak „*x* je žena“ za sve vrednosti od *x*. Tako, data implikacija koja je uvek jedna od dve moguće nije formalna pošto ne važi za sve vrednosti od *x* zato što nije uvek jedna ista od te dve moguće. Simbolička srodnost logike klasa i logike iskaza je u stvari nešto poput zamke i moramo da odlučimo koju od njih dve ćemo uzeti za fundamentalnu. Gospodin Makol (McColl) je u jednoj značajnoj seriji članaka[2] zastupao gledište da su *implikacija* i *iskazi* fundamentalniji od *uključivanja* i *klasa* i ja se u tom pogledu sa njim slažem. Ali izgleda mi da on nije ispravno shvatio razliku između

[1] Na mestima gde ovaj dualitet nestaje, vidi Schröder, *op. cit*, Vol. II, predavanje br. 21.

[2] Cf. „The Calculus of Equivalent Statements“, *Proceedings of the London Mathematical Society,* Vol. IX i naredni tomovi; „Symbolic Reasoning“, *Mind*, Jan. 1880, Oct. 1897 i Jan. 1900; „La logique symbolique et ses applications“, *Bibliothèque du Congrès International de Philosophie*, Vol. III (Paris, 1901). Ubuduće ću referirati na ovaj zbornik sa *Congrès*.

pravih iskaza i takvih iskaza koji sadrže realnu promenljivu: tako je naveden da o iskazima govori kao o ponekad istinitim, a ponekad lažnim; što je, naravno, nemoguće činiti sa pravim iskazima. Pošto je ova distinkcija od vrlo velikog značaja, zadržaću se na njoj pre nego što nastavim dalje. Iskaz je, možemo reći, sve ono što je istinito ili lažno. Prema tome, izraz „*x* je čovek" nije iskaz jer nije ni istinit ni lažan. Ako *x* pridamo ma koju konstantnu vrednost, onda ovaj izraz postaje iskaz: on je tako kao jedna shematska forma predstavljanja bilo kog iskaza iz cele klase iskaza. A kada kažemo „*x* je čovek implicira *x* je smrtan za sve vrednosti od *x*", tada ne tvrdimo neku pojedinačnu implikaciju već klasu implikacija; sada imamo jedan pravi iskaz u kome, iako se javlja slovo *x*, nema realne promenljive: ova promenljiva je apsorbovana na isti način kao i *x* pod znakom za integral u određenom integralu, tako da rezultat više nije funkcija od *x*. Peano promenljivu koja se javlja na ovaj način karakteriše kao *prividnu,* pošto iskaz ne zavisi od te promenljive; dok u iskazu „*x* je čovek" postoje različiti iskazi za različite vrednosti promenljive i ta promenljiva je ona koju Peano naziva *realnom*[1]. O iskazima ću govoriti isključivo onda kada nema realne promenljive: tamo gde postoji jedna ili više realnih promenljivih, i gde je za sve vrednosti promenljive izraz iskaz, taj izraz ću nazivati *iskaznom funkcijom*. Izučavanje pravih iskaza je, po mom mišljenju, fundamentalnije od onog koje se tiče klasa; ali izučavanje iskaznih funkcija izgleda da je strogo govoreći na istom nivou kao ono koje se tiče klasa i uistinu ih je i teško razlikovati. Peano je, kao i Makol, najpre iskaze smatrao fundamentalnijim od klasa ali je, još određenije, više imao u vidu iskazne funkcije nego same iskaze. Šreder ne pada pod udar ove kritike: u njegovom drugom tomu tretiraju se pravi iskazi i povlače se formalne razlike koje ih odvajaju od klasa.

---

[1] *F.* 1901, str. 2.

14. Račun iskaza je okarakterisan činjenicom da svi njegovi iskazi imaju kao hipotezu i kao konsekvens tvrđenje materijalne implikacije. Hipoteza je uobičajeno forme „*p* implicira *p*“ itd. što je ekvivalentno tvrđenju (§16) da su slova koja se javljaju u konsekvensu iskazi. Tako se konsekvensi sastoje od iskaznih funkcija koje su istinite za sve iskaze. Važno je primetiti da iako su upotrebljena slova simboli za promenljive i iako su konsekvensi istiniti kada su date vrednosti promenljivih iskazi, te vrednosti moraju da budu pravi iskazi, a ne iskazne funkcije. Hipoteza „*p* je iskaz“ nije zadovoljena ako *p* zamenimo sa „*x* je čovek“ ali je zadovoljena ako *p* zamenimo sa „Sokrat je čovek“ ili sa „*x* je čovek, implicira *x* je smrtno za sve vrednosti od *x*“. Ukratko, možemo reći da su iskazi predstavljani pojedinačnim slovima iskaznog računa promenljive, ali da sami ne sadrže promenljive – to će reći, u slučaju u kome su hipoteze iskaza koji se tvrde, u računu zadovoljene.

15. Naš račun izučava relaciju *implikacije* između iskaza. Ova relacija se mora razlikovati od relacije *formalne* implikacije koja povezuje dve iskazne funkcije onda kada jedna implicira onu drugu za sve vrednosti promenljive. Formalna implikacija je u ovom računu takođe implicirana, ali ne i eksplicitno izučavana: mi ne razmatramo iskazne funkcije uopšte nego samo izvesne određene iskazne funkcije koje se javljaju u iskazima našeg računa. U kojoj meri je formalna implikacija definljiva pomoću proste implikacije ili, kako se može nazvati, materijalne implikacije, jeste teško pitanje koje će biti razmotreno u Glavi III. Jedan primer će ilustrovati razliku koja ih razdvaja. Peti Euklidov stav sledi iz četvrtog: ako je četvrti istinit, takav je i peti, dok, ako je peti lažan, takav je i četvrti. Ovo je slučaj materijalne implikacije zato što su oba stava apsolutne konstante i u pogledu svog značenja ne zavise od pridavanja vrednosti promenljivoj. Ali, svaki od stavova *izražava* formalnu implikaciju. Četvrti nam kaže da ako su *x* i *y* trouglovi koji ispunjavaju izvesne uslove, onda su *x* i *y* trouglovi koji ispunjavaju i izvesne druge uslove, kao i da ova implikacija važi za sve vrednosti od *x* i od *y*; dok nam peti kaže da ako je *x* jednakokraki trougao, *x* ima jednake uglove na osnovici. Formalna implikacija sadržana u svakom od ova dva stava sasvim je različita stvar od materijalne implikacije koja važi između iskaza u celini; oba ova pojma su neophodna u iskaznom računu, ali ono što ga posebno karakteriše jeste izučavanje materijalne implikacije, zato što se formalna implikacija javlja u celoj matematici.

Ove dve vrste implikacije su u spisima logike obično bile brkane, zapravo se formalna implikacija često javljala na mestu gde je, po svemu sudeći, bila u pitanju samo materijalna implikacija. Kada se, na primer, kaže „Sokrat je čovek, dakle Sokrat je smrtan“, *oseća* se da je Sokrat ovde promenljiva: on stoji za tip čoveštvo i osećamo da bi svaki drugi čovek mogao da igra istu ulogu. Ako umesto *dakle,* koje implicira istinitost veze između hipoteze i konsekvensa, kažemo „Sokrat je čovek implicira Sokrat je smrtan“, neposredno deluje da Sokrata možemo ne samo da zamenimo bilo kojim drugim čovekom, već i bilo kojim drugim entitetom. Tako, mada je ono što je u ovom slučaju eksplicitno izraženo materijalna implikacija, ono što je označeno zapravo jeste formalna implikacija, te je potreban izvestan napor da bi se naša imaginacija ograničila samo na materijalnu implikaciju.

16. Generalno uzev, definicija implikacije je nemoguća. Ako *p* implicira *q*, onda ako je *p* istinito i *q* je istinito, što znači da istinitost *p* implicira istinitost *q*; a isto tako, ako je *q* lažno i *p* je lažno, što znači da lažnost *q* implicira lažnost *p*[1]. Tako nam istinitost i lažnost daju samo nove implikacije, ali ne i definiciju implikacije.

[1] Čitaocu ostaje da uoči da su u ovim izrazima glavne implikacije formalne, to jest „*p* implicira *q*“ *formalno* implicira „istinitost od *p* implicira istinitost od *q*“, dok su subordinirane implikacije materijalne.

Ako *p* implicira *q*, onda su ili oba lažna ili oba istinita, ili je *p* lažno, a *q* istinito; nemoguće je da *q* bude lažno, a *p* istinito, a nužno je da *q* bude istinito ili *p* lažno[1]. U stvari, tvrđenje da je *q* istinito ili *p* lažno znači da je ono strogo ekvivalentno sa „*p* implicira *q*"; ali, pošto ekvivalencija znači međusobnu implikaciju, implikacija ipak ostaje fundamentalni element i nije definljiva pomoću disjunkcije. Disjunkcija je, s druge strane, kao što ćemo uskoro videti, definljiva pomoću implikacije. Iz gornje ekvivalencije sledi da od bilo koja dva iskaza jedan mora da implicira onaj drugi, da lažni iskazi impliciraju sve iskaze i da su istiniti iskazi implicirani svim iskazima. Ali, ove rezultate treba dokazati; logičke premise imaju veze samo sa pravilima zaključivanja.

Može se primetiti da *iskaz* može biti definisan, premda je implikacija nedefinljiva. Svaki iskaz implicira samog sebe, a sve ono što nije iskaz ne implicira ništa. Otuda je reći „*p* je iskaz" ekvivalentno sa „*p* implicira *q*", te ekvivalencija može da se upotrebi za definisanje iskaza. Pošto je matematički smisao *definicije* daleko različitiji od onog koji je raširen među filozofima, može biti korisno primetiti da se, u matematičkom smislu, za novu iskaznu funkciju kaže da je definisana onda kada je ustanovljeno da je ekvivalentna (to jest da implicira ili da je implicirana) iskaznoj funkciji koja je ili prihvaćena kao nedefinljiva ili je pak definisana pomoću nedefinljvih. Definicija entiteta koji nisu iskazne funkcije izvedena je iz onih koji to jesu i to na načine koji će biti objašnjeni u vezi sa klasama i relacijama.

17. Dakle, u iskaznom računu ne zahtevamo nikakve druge nedefinljive izuzev ove dve vrste implikacije – ali, treba imati u vidu da je formalna implikacija složen pojam, čija analiza tek treba

[1] Mogu odmah reći, jednom za svagda, da alternative u disjunkciji nikada nećemo smatrati međusobno isključujućim, osim ako nije izričito naznačeno da su one zaista takve.

da se obavi. U pogledu naše dve nedefinljive, zahtevamo izvesne nedokazive iskaze koje do sada nisam uspeo da svedem na manje od deset. Nekih nedokazivih mora biti; a neki iskazi, kao što je silogizam, moraju biti o broju pošto nikakav dokaz nije moguć bez njih. Ali, što se tiče nekih drugih, može biti sumnjivo da li su nedokazivi ili samo nedokazani; i primetimo da metod koji se sastoji u pretpostavljanju lažnosti aksioma i u dedukovanju posledice iz te pretpostavke, a koji je u nekim slučajevima kao što je onaj u aksiomu o paralelama ovde nije univerzalno dostupan. Jer, svi naši aksiomi su principi dedukcije i, ako su istiniti, posledice koje izgleda da slede iz upotrebe nekog suprotnog principa neće u stvari da slede, tako da su argumenti koji se pozivaju na pretpostavku lažnosti aksioma ovde podložni naročitim greškama. Tako je broj nedokazivih iskaza možda podložan svođenju i za izvesne među njima ne vidim nikakav razlog da ih smatramo nedokazivim izuzev toga što su do sada ostali nedokazani.

18. Ovih deset aksioma su sledeći. (1) Ako *p* implicira *q*, onda *p* implicira *q*[1]*;* drugim rečima, šta god da su *p* i *q*, „*p* implicira *q*" je iskaz. (2) Ako *p* implicira *q*, onda *p* implicira *p*; drugim rečima, sve ono što nešto implicira jeste iskaz. (3) Ako *p* implicira *q*, onda *q* implicira *q*; drugim rečima, sve što je nečim implicirano jeste iskaz. (4) U implikaciji, ako je istinita, hipoteza može da se napusti, a konsekvens da se tvrdi. Ovaj princip ne može simbolički da se formuliše i on ilustruje bitna ograničenja formalizma – na to ću se vratiti kasnije. Pre nego što nastavimo dalje, poželjno je da definišemo zajedničko tvrđenje dva iskaza kao ono što se naziva njihovim logičkim proizvodom. Ova definicija je sasvim veštačka i ona ilustruje veliku razliku između matematičkih i filozofskih definicija. Ona je sledeća: ako *p* implicira *p*, onda ako *q* implicira

[1] Imajmo u vidu da su implikacije u ovim aksiomima označene sa *ako* i *onda* formalne, a one označene sa *implicira* materijalne.

q, *pq* (logički proizvod *p* i *q*) znači da ako *p* implicira da *q* implicira *r*, onda je *r* istinito. Drugim rečima, ako su *p* i *q* iskazi, zajedničko tvrđenje je ekvivalentno tome da je svaki iskaz istinit, koji je takav da prvi implicira da ga drugi implicira. Našu definiciju ne možemo da izrazimo u ovoj kraćoj formi a da ne naškodimo njenoj formalnoj tačnosti zato što je hipoteza „*p* i *q* su iskazi" već logički proizvod od „*p* je iskaz" i „*q* je iskaz". Sada možemo da izrazimo šest glavnih principa zaključivanja od kojih svakom zbog njegovog značaja mora da se da ime i koji se, svi osim poslednjeg, mogu pronaći u Peanovim radovima koji se odnose na ovaj predmet. (5) Ako *p* implicira *p* i *q* implicira *q*, onda *pq* implicira *p*. Ovaj princip se naziva *simplifikacija* i on naprosto tvrdi da zajedničko tvrđenje dva iskaza implicira tvrđenje prvog od ta dva. (6) Ako *p* implicira *q*, a *q* implicira *r*, onda *p* implicira *r*. Ovaj princip se naziva *silogizam*. (7) Ako *q* implicira *q* i *r* implicira *r*, i ako *p* implicira da *q* implicira *r*, onda *pq* implicira *r*. Ovaj princip se naziva princip *importacije*. U hipotezi imamo proizvod tri iskaza; ali, naravno, to može biti definisano pomoću proizvoda od dva. Ovaj princip izražava da ako *p* implicira da *q* implicira *r*, onda *r* sledi iz dodatnog tvrđenja *p* i *q*. Na primer: „ako pozovem tu i tu osobu, onda, ako je ona kod kuće, biću primljen" implicira „ako pozovem tu i tu osobu i ona je kod kuće, biću primljen". (8) Ako *p* implicira *p* i *q* implicira *q*, onda ako *pq* implicira *r*, onda *p* implicira da *q* implicira *r*. Ovaj princip je konverzan prethodnom principu i naziva se princip *eksportacije*[1]. *Ovaj princip ilustrovan je prethodnim primerom kada se on obrne. (9)* Ako *p* implicira *q*, a *q* implicira *r*, onda *p* implicira *qr*: drugim rečima, iskaz koji implicira bilo koji od dva iskaza, implicira oba. Ovaj princip se naziva princip *kompozicije*. (10) Ako *p* implicira *p* i *q* implicira *q*, onda „"*p* implicira

---

[1] Mislim da (7) i (8) ne mogu da se izdedukuju iz definicije logičkog proizvoda zato što su potrebni za prelaz sa „ako je *p* iskaz, onda "*q* je iskaz" implicira itd". na „ako su *p* i *q* iskazi, onda itd"...

q" implicira *p*“ implicira *p*. Ovaj princip se naziva princip *redukcije*; on je manje samoočigledan nego što su to prethodni principi, ali je ekvivalentan mnogim iskazima koji su samoočigledni. Ja ga volim zato što se, kao i njegovi prethodnici, eksplicitno odnosi na implikaciju i istog je logičkog karaktera kao i oni. Ako se prisetimo da je „*p* implicira *q*“ ekvivalentno sa „*q* ili ne-*p*“, lako možemo da se uverimo da je gorenavedeni princip istinit; jer, „"*p* implicira *q*" implicira *p*“ je ekvivalentno sa „*p* ili negacija od "*q* ili ne-*p*"“, to jest sa „*p* ili "*p* i ne-*q*"“, to jest, sa *p*. Ali, ovaj način uveravanja da je princip redukcije istinit implicira mnoge logičke principe koji još nisu dokazani i ne mogu da se dokažu drugačije do redukcijom ili nečim njoj ekvivalentnim. Ovaj princip je posebno koristan u vezi sa negacijom. Bez njegove pomoći, a pomoću prethodnih devet principa, možemo da dokažemo zakon kontradikcije; možemo da dokažemo da, ako su *p* i *q* iskazi, *p* implicira ne ne-*p*; da je „*p* implicira ne-*q*“ ekvivalentno sa „*q* implicira ne-*p*“ i sa ne-*pq*; da „*p* implicira *q*“ implicira „ne-*q* implicira ne-*p*“, da *p* implicira da ne-*p* implicira *p*; da je ne-*p* ekvivalentno sa „*p* implicira ne-*p*“ i da je „*p* implicira ne-*q*“ ekvivalentno sa „ne-ne-*p* implicira ne-*q*“. Ali, bez redukcije ili nečeg njoj ekvivalentnog (barem do sada nisam uspeo to da otkrijem) ne možemo da dokažemo da *p* ili ne-*p* mora da bude istinito (zakon isključenja trećeg); da je svaki iskaz ekvivalentan negaciji nekog drugog iskaza; da ne-ne-*p* implicira *p*; da „ne-*q* implicira ne-*p*“ implicira „*p* implicira *q*“; da „ne-*p* implicira *p*“ implicira *p*, ili da „*p* implicira *q*“ implicira „*q* ili ne-*p*“. Svaka od ovih pretpostavki je ekvivalentna principu redukcije i, ako hoćemo, možemo da je zamenimo nekom od njih. Neke od njih – naročito isključenje trećeg i dvostruka negacija – izgleda da imaju daleko veću samoočiglednost od drugih. Ali, kada budemo videli kako se definišu disjunkcija i negacija pomoću implikacije, videćemo da se pretpostavljena jednostavnost gubi, i da je, barem s formalnog stanovišta, redukcija jednostavnija od svake druge moguće alternative. Iz ovog razloga je zadržavam među mojim premisama i preferiram je nad drugim uobičajenijim i po izgledu očiglednijim iskazima.

19. Disjunkcija ili logičko sabiranje definiše se na sledeći način: „*p* ili *q*" je ekvivalentno sa „"*p* implicira *q*" implicira *q*". Lako je uveriti se u ovu ekvivalenciju ako se prisetimo da lažni iskaz implicira svaki drugi iskaz zato što ako je *p* lažno, *p* mora da implicira *q* i, prema tome, ako „*p* implicira *q*" implicira *q*, sledi da je *q* istinito. Ali, ovaj argument isto tako upotrebljava principe koji još nisu bili dokazani i samo je naznačen kako bismo osvetlili definiciju anticipacijom. Polazeći od ove definicije, pomoću principa redukcije možemo da dokažemo da je „*p* ili *q*" ekvivalentno sa „*q* ili *p*". Jedna alternativna definicija koja je izvodiva iz one gorenavedene glasi: „bilo koji iskaz koji je impliciran sa *p* i impliciran sa *q* je istinit" ili, drugim rečima, „"*p* implicira *s*" i "*q* implicira *s*" zajedno impliciraju *s*, ma šta da je *s*". Otuda prelazimo na definiciju negacije: ne-*p* je ekvivalentno tvrđenju da *p* implicira sve iskaze, to jest da „*r* implicira *r*" implicira „*p* implicira *r*", ma šta da je *r*[1].

Onda možemo da dokažemo zakone kontradikcije, isključenja trećeg i dvostruke negacije i možemo da ustanovimo sva formalna svojstva logičkog množenja i sabiranja – asocijativne, komutativne i distributivne zakone. Tako je sada logika iskaza kompletna.

---

[1] Princip da lažan iskaz implicira sve iskaze razrešava paradoks Luisa Kerola (Lewis Carroll) iz *Mind*, N.S. br. 11 (1894). Tvrđenje koje je sadržano u ovom paradoksu jeste da, ako su *p*, *q* i *r* iskazi, i ako *q* implicira *r* dok *p* implicira da *q* implicira ne-*r*, onda *p* mora biti lažno, pošto je pretpostavljeno da su „*q* implicira *r*" i „*q* implicira ne-*r*" inkompatibilni. Ali, na osnovu naše definicije negacije, ako je *q* lažno, obe ove implikacije će biti validne: one zajedno su zapravo, ma šta da je iskaz *r*, ekvivalentne sa ne-*q*. Tako, jedini zaključak koji je zagarantovan Kerolovim premisama jeste da, ako je *p* istinito, *q* mora biti lažno, to jest, da *p* implicira ne-*q* i da je to zaključak koji bi, što je zaista čudno, zdrav razum izveo u ovom posebnom slučaju koji on ispituje.

Filozofi će sigurno uputiti primedbu na gornje definicije disjunkcije i negacije, tvrdeći da je ono što podrazumevamo pod ovim pojmovima nešto što je sasvim različito od onoga što definicije njima pridaju kao značenje, i da su ekvivalencije koje one ustanovljuju u stvari smisleni iskazi, a ne jednostavne indikacije u pogledu načina na koje treba koristiti simbole. Mislim da je ovakva primedba opravdana, ako je gorenavedeno objašnjenje zastupano da bi se pridala istina filozofskoj analizi stvari. Ali, u slučajevima u kojima je u pitanju neka čisto formalna svrha, svaka ekvivalencija u kojoj se javlja izvestan pojam na jednoj strani ali ne i na drugoj, poslužiće za definiciju. Prednost da pred sobom imamo jedno čisto formalno izlaganje sastoji se u tome da ono opskrbljuje filozofsku analizu njenim materijalom u jednoj određenijoj formi nego što bi to inače bilo moguće. Dakle, biće bolje da kritiku formalne logičke procedure odložimo za kasnije, dok ovo kratko objašnjenje ne privedemo kraju.

B. *Račun klasa*

20. U ovom računu postoji mnogo manji broj novih prvobitnih iskaza – u stvari, izgleda da su samo dva dovoljna –, ali postoje mnogo veće teškoće u načinu nesimboličkog izlaganja ideja ugrađenih u naš simbolizam. Ove teškoće će biti, koliko god je to moguće, odložene za kasnije glave. Za sada ću se truditi da izlaganje bude onoliko jasno i jednostavno koliko je to moguće.

Račun klasa može da se izloži uzimanjem *klase* za fundamentalni pojam kao i relacije nekog člana klase prema toj klasi. To je metod koji usvaja Peano i on je možda filozofski ispravniji od jednog drugačijeg metoda za koji smatram da je podesniji za svrhu formalizma. U ovom metodu i dalje uzimamo relaciju individue prema klasi kojoj pripada za fundamentalnu (koju ću, sledeći Peana, označiti sa ε); na primer, relacija Sokrata prema ljudskoj rasi koja je izražena kad kažemo da je Sokrat čovek. Pored toga, uzimamo kao nedefinljive pojam iskazne funkcije i pojam *takvo da*. Ova tri pojma karakterišu ceo račun klasa. Nekoliko reči objašnjenja je neophodno u vezi sa svakim od njih.

21. Insistiranje na razlici između ε i relacije između celine i dela među klasama dugujemo Peanu i ona je od vrlo velikog značaja za ukupni tehnički razvoj logike i njenih primena u matematici. U sholastičkoj doktrini silogizma i u svoj prethodnoj simboličkoj logici, izuzev u Fregeovom delu, ove dve relacije su brkane[1]. Razlika je ista kao i ona između relacije individue prema vrsti i vrste prema rodu, između relacije Sokrata prema klasi Grka i relacije Grka prema ljudima. O filozofskoj prirodi ove razlike ću govoriti opširno kada budem prešao na kritičko ispitivanje prirode klasa; za sada je dovoljno reći da je relacija celine i dela tranzitivna, dok relacija ε nije takva: imamo Sokrat je čovek, i čovek je klasa, ali ne i Sokrat je klasa. Istaknimo da klasa mora da se razlikuje od klasnog pojma (*class-concept*) ili od predikata pomoću kojeg je definisana: tako, ljudi su klasa, dok je čovek klasni pojam. Relacija ε se mora smatrati za ono što povezuje Sokrata i ljude uzete kolektivno, a ne Sokrata i *čoveka*. Na ovo ću se vratiti u Glavi VI. Peano smatra da sve iskazne funkcije koje sadrže samo jednu promenljivu mogu da se izraze u formi „*x* je *a*“, gde je *a* konstantna klasa, ali ćemo videti da postoji razlog za sumnju u ovo gledište.

22. Sledeći fundamentalni pojam jeste pojam iskazne funkcije. Premda se iskazne funkcije javljaju u iskaznom računu, one su tamo, svaka ponaosob, definisane prema njihovom javljanju, tako da nije zahtevan neki opšti pojam iskazne funkcije. Ali u računu klasa je neophodno eksplicitno uvesti opšti pojam. Peano ga ne zahteva zahvaljujući njegovoj pretpostavci da je, za jednu promenljivu, forma „*x* je *a*“ opšta, i da su ekstenzije ove iste forme

[1] Vidi njegov *Begriffsschrift*, Halle, 1879, i *Grundgesätze der Arithmetik*, Jena, 1893, str. 2.

dostupne za bilo koji broj promenljivih. Ali, mi moramo izbeći ovu pretpostavku i, prema tome, uvesti pojam iskazne funkcije. Ovaj pojam možemo da objasnimo (ali ne i da ga definišemo) na sledeći način: ϕx je iskazna funkcija ako, za svaku vrednost od x, ϕx je iskaz, određen onda kada je x dato. Tako je „*x* je čovek" iskazna funkcija. U bilo kom iskazu, ma koliko komplikovanom, koji ne sadrži realne promenljive, možemo zamisliti da jedan od termina, ali ne glagol ili pridev, može da se zameni drugim terminom: umesto „Sokrat je čovek" možemo staviti „Platon je čovek", „broj 2 je čovek", itd.[1] Tako dobijamo iskaze koji se slažu u svakom pogledu izuzev u pogledu jednog termina, termina promenljive. Ako na mesto termina promenljive stavimo x, „*x* je čovek" onda izražava tip svih iskaza ove vrste. Iskazna funkcija će, uopšte uzev, biti istinita za neke vrednosti promenljive, a lažna za druge. Instance u kojima je istinita za *sve* vrednosti promenljive, barem one koje su mi poznate, sve izražavaju implikacije kao što je „*x* je čovek implicira *x* je smrtan"; ali, koliko mi je poznato, ne postoji nikakav *a priori* razlog za tvrđenje da nijedna druga iskazna funkcija nije istinita za sve vrednosti promenljive.

23. Ovo me dovodi do pojma *takvo da*. Vrednosti od x koje čine iskaznu funkciju ϕx istinitom nalik su korenima jednačine – oni su, u stvari, poseban slučaj prethodnih – i moramo razmatrati sve vrednosti od x koje su *takve da* je ϕx istinito. Uopšte uzev, ove vrednosti obrazuju *klasu* i, u stvari, klasa može biti definisana kao svi termini koji zadovoljavaju neku iskaznu funkciju. Međutim, ovaj izraz zahteva izvesno ograničenje, mada ne mogu precizno da otkrijem kakvo je to ograničenje. Ono proizlazi iz izvesne protivrečnosti koju ću detaljno da razmatram kasnije (u Glavi X). Razlozi za definisanje klase na ovaj način tiču se činjenice

[1] Glagoli i pridevi koji se javljaju kao takvi razlikuju se time što ako bi bili uzeti kao promenljiva, funkcija koja bi odatle rezultirala bila bi samo iskaz za neke vrednosti promenljive, to jest za takve kakvi su glagoli ili pridevi. Vidi Glavu IV.

da moramo da osiguramo nultu-klasu, što nas sprečava da klasu definišemo kao termin sa kojim neki drugi termin stoji u relaciji $\in$* i što želimo da budemo u stanju da klasu definišemo pomoću relacija – to će reći, svi termini koji stoje prema drugim terminima u relaciji *R* moraju da formiraju klasu – a takvi slučajevi zahtevaju donekle komplikovane iskazne funkcije.

24. U pogledu ova tri fundamentalna pojma, zahtevamo i dva prvobitna iskaza. Prvi tvrdi da ako *x* pripada klasi termina koji zadovoljavaju iskaznu funkciju ϕx, onda je ϕx istinito. Drugi tvrdi da ako su ϕx i ψx ekvivalentni iskazi za sve vrednosti od *x*, onda je klasa *x*-ova takvih da je ϕx istinito, identična sa klasom *x*-ova takvih da je ψx je istinito. Identitet koji se ovde javlja definisan je na sledeći način: *x* je identično sa *y* ako *y* pripada svakoj klasi kojoj pripada i *x*, drugim rečima, ako „*x* je *u*" implicira „*y* je *u*" za sve vrednosti od *u*. Što se tiče samog primitivnog iskaza, treba primetiti da on presuđuje u prilog ekstenzionalnom gledišta o klasama. Dva pojma klase ne moraju da budu identična samo zato što su njihove ekstenzije takve: *čovek* i *dvonožac bez perja* nipošto nisu identični, a ništa više nisu ni *paran prost broj* i *ceo broj između* 1 *i* 3. Oni su klasni *pojmovi* i, ako je naš aksiom valjan, oni ne moraju da budu oni pojmovi o kojima smo govorili baveći se klasama. Nas ovde mora da interesuje stvarna skupina termina, a ne bilo koji pojam koji označava tu skupinu. Sa stanovišta matematike ovo je veoma bitno. Razmotrimo, na primer, problem koliko kombinacija može da se formira od jednog datog skupa termina, uzimajući svaki put bilo koji broj što se svodi na problem koliko klasa je sadržano u

---

* Sledeći Peana i usvajajući njegovu notaciju iz *Formulario mathematico* to jest iz *Formulaire de Mathématiques* (1895), Rasel u *Principima* koristi grčko slovo ε kako bi njime označio relaciju pripadnosti klasi ($x\varepsilon a$ se kod Peana čita „*x* pripada klasi *a*" ili „*x* je jedno *a*"; videti *Formulaire*, §1, *Notations*). Budući da Rasel u nastavku knjige često koristi slovo ε i kao promenljivu, stručni redaktori prevoda su u cilju izbegavanja eventualnih nedoumica sistematski zamenili ε sa $\in$ u svim i samo onim slučajevima u kojima se ono odnosilo na relaciju pripadnosti klasi (prim. stručnih redaktora prevoda).

nekoj datoj klasi. Ako različite klase mogu da imaju istu ekstenziju, ovaj problem postaje sasvim neodređen. I sigurno je da bi prema uobičajenoj upotrebi trebalo smatrati klasu određenom onda kada su svi njeni termini dati. Ekstenzionalno gledište o klasama je tako, u nekom obliku, suštinsko za simboličku logiku i matematiku, a njegova neophodnost je izražena gornjim aksiomom. Ali, sam aksiom neće biti upotrebljen sve dok ne dođemo do aritmetike; barem nije potrebno da bude upotrebljen ako odlučimo da razlikujemo jednakost klasa koja je definisana kao uzajamno uključivanje od identiteta individua. Formalno, ovo dvoje je posve različito; identitet se definiše kao gore, a jednakost od *a* i *b* je definisana ekvivalencijom od „*x* je *a*" i „*x* je *b*" za sve vrednosti od *x*.

25. Većina iskaza računa klasa lako je izvodiva iz iskaza računa iskaza. Logički proizvod ili zajednički deo dve klase *a* i *b* je klasa *x*-ova takvih da je logički proizvod od „*x* je *a*" i „*x* je *b*" istinit. Slično definišemo i logički zbir dve klase (*a* ili *b*), i negaciju klase (ne-*a*). Logičkim proizvodom i zbirom klasa uvodi se jedna nova ideja. Ako je *k* klasa klasâ, njen logički proizvod je klasa termina koji pripadaju svakoj od klasa *k,* to jest klasa termina *x* takvih da „*u* je *k*" implicira „*x* je *u*", za sve vrednosti od *u*. Logički zbir je klasa koja je sadržana u svakoj klasi u kojoj je sadržana svaka klasa klase *k*, što znači klasa termina *x* takvih da, ako „*u* je *k*" implicira „*u* je sadržano u *c*" za sve vrednosti od *u*, onda za sve vrednosti od *c*, *x* je *c*. Kažemo da je klasa *a* sadržana u klasi *b* kada „*x* je *a*" implicira „*x* je *b*" za sve vrednosti od *x*. Na osnovu prethodno rečenog na sličan način možemo da definišemo proizvod i zbir klase iskaza. Drugi vrlo značajan pojam jeste pojam koji se naziva *egzistencija* klase – reč koju ne treba uzeti kao da ima ono značenje koje ima u filozofiji. Za jednu klasu se kaže da postoji kada ima barem jedan termin. Formalna definicija je sledeća: *a* je klasa koja postoji onda i samo onda kada je iskaz istinit pod uslovom da ga „*x* je *a*" uvek implicira, za bilo koju vrednost od *x*. Treba imati na umu da implicirani iskaz mora da bude pravi iskaz, a ne samo iskazna funkcija od *x*. Klasa *a* postoji onda kada je logički zbir svih iskaza oblika „*x* je *a*“ istinit, to jest, onda kada nisu svi takvi iskazi lažni.

Značajno je da jasno shvatimo način na koji su iskazi u računu klasa dobijeni iz iskaza računa iskaza. Razmotrimo, na primer, silogizam. Imamo „*p* implicira *q*“ i „*q* implicira *r*“ impliciraju „*p* implicira *r*“. Uzmimo sada „*x* je *a*“, „*x* je *b*“, „*x* je *c*“ za *p*, *q* i *r*, gde *x* mora da ima neku određenu vrednost, ali nije nužno da tačno odredimo koju. Onda uviđamo da, ako za vrednost *x* o kojoj je reč, *x* je *a* implicira *x* je *b* i *x* je *b* implicira *x* je *c*, onda *x* je *a* implicira *x* je *c*. Pošto je vrednost *x* irelevantna, možemo da variramo *x*, te tako uviđamo da ako je *a* sadržano u *b*, a *b* u *c*, onda je *a* sadržano u *c*. Ovo je silogizam klasa. Ali, prilikom primene ovakve vrste postupanja, neophodna je krajnja opreznost kako bi se izbegle greške. U vezi s tim bilo bi poučno da ispitamo jednu stvar koja je podstakla raspravu između Šredera i Makola[1]. Šreder tvdi da ako su *p*, *q* i *r* iskazi, „*pq* implicira *r*“ je ekvivalentno disjunkciji „*p* implicira *r* ili *q* implicira *r*“. Makol prihvata da disjunkcija implicira ovaj drugi iskaz, ali negira obrnutu implikaciju. Razlog ovom neslaganju jeste taj što Šreder ima u vidu iskaze i materijalnu implikaciju, dok Makol ima u vidu iskazne funkcije i formalnu implikaciju. Što se tiče iskazâ, istinitost ovog principa je lako učiniti očiglednom pomoću sledećeg razmatranja. Ako *pq* implicira *r*, onda, ako je ili *p* ili *q* lažno, ono od njih koje je lažno implicira *r* zato što lažan iskaz implicira sve iskaze. Ali, ako su oba istinita, *pq* je istinito, prema tome i *r* je istinito, te opet, *p* implicira *r* i *q* implicira *r* zato što su istiniti iskazi implicirani svakim iskazom. Tako, u bilo kom slučaju, barem jedan od iskaza *p* i *q* mora da implicira *r*. (Ovo nije dokaz već samo razjašnjenje). Ali, Makol na to upućuje primedbu: pretpostavimo da su *p* i *q* uzajamno kontradiktorni i da je *r* nulti iskaz, onda *pq* implicira *r* ali ni

---

[1] Schröder, *Algebra der Logik*, Vol. II, str. 258–9; McColl, „Calculus of Equivalent Statements“, peti članak. *Proc. Lond. Math. Soc*, Vol. XXVIII, str. 182.

p ni *q* ne implicira *r*. Ovde imamo posla sa iskaznim funkcijama i sa formalnom implikacijom. Za iskaznu funkciju se kaže da je nulta kada je lažna za sve vrednosti od *x*; a klasa *x*-ova koji zadovoljavaju takvu funkciju naziva se nulta klasa, pošto je to zapravo klasa bez termina. Sledeći Peana, bilo klasu, bilo funkciju označavaću sa *Λ*. Zamenimo sada naše *r* sa *Λ*, naše *p* sa *φx,* a *q sa ne-φx,* gde je *φx* bilo koja iskazna funkcija. Tada je *pq* lažno za sve vrednosti od *x* te stoga implicira *Λ*. Ali, uopšte uzev, *φx* nije uvek lažno niti je, pak, ne-*φx* uvek lažno; dakle, nijedan od njih neće uvek implicirati *Λ*. Tako, prethodna formula može da bude istinito interpretirana samo u računu iskaza: u računu klasa ona je lažna. Ovo se može lako učiniti očiglednim sledećim razmatranjima. Neka su *φx*, *ψx*, *χx* tri iskazne funkcije. Tada „*φx.ψx** implicira *χx*" implicira, za sve vrednosti od *x*, ili da *φx* implicira *χx* ili da *ψx* implicira *χx*. Ali, to ne implicira da ili *φx* implicira *χx* za sve vrednosti od *x*, ili pak da *ψx* implicira *χx* za sve vrednosti od *x*. Ova disjunkcija je ono što nazivam *varijabilnom* disjunkcijom, nasuprot konstantnoj disjunkciji, što znači da je u nekim slučajevima jedna od alternativa istinita, a u drugima ona druga, dok u konstantnoj disjunkciji postoji jedna od alternativa (premda se ne zna koja) koja je uvek istinita. U svim slučajevima u kojima se javljaju disjunkcije koje se odnose na iskazne funkcije, one će moći da se transformišu u račun klasa samo u onim slučajevima u kojima je disjunkcija konstantna. Ovaj aspekt je značajan sam po sebi, a poučan je po posledicama. Ovo može da se formuliše još i na sledeći način. U iskazu: ako *φ φx.ψx* implicir*a χx,* onda ili *φx* implicira *χx* ili *ψx* implicira *χx*; implikacija označena sa *ako* i *onda* je formalna, dok su subordinirane implikacije materijalne; tako,

---

* Tačke kojima Rasel razdvaja izraze funkcionišu ili kao zagrade ili pak kako bi označile logički proizvod (što je ovde slučaj). Ova notacija je izvorno Peanova (iz *Formulario Mathematico*), a Rasel i Vajthed su je kasnije usvojili u *Principia Mathematica*, a koristili su je, na primer, Čerč (A. Church) i Kvajn (W. V. O. Quine). Slična upotreba tačaka javiće se i kasnije u §197 (prim. stručnih redaktora prevoda).

subordinirane implikacije ne vode uključivanju jedne klase u drugu, što rezultira samo iz formalne implikacije.

Formalni zakoni sabiranja, množenja, tautologije i negacije su isti kako u pogledu klasa, tako i u pogledu iskaza. Zakon tautologije tvrdi da nikakva promena ne nastaje kada se klasa ili iskaz sabere ili pomnoži samim sobom. Novu karakteristiku računa klasa predstavlja nulta klasa, to jest klasa koja nema termine. Ona može da se definiše kao klasa termina koji pripadaju svakoj klasi, kao klasa koja ne postoji (u gore definisanom smislu), kao klasa koja je sadržana u svakoj klasi, kao klasa Λ koja je takva da je iskazna funkcija „x je Λ" lažna za sve vrednosti od x, ili pak kao klasa x-ova koji zadovoljavaju bilo koju iskaznu funkciju ϕx koja je lažna za sve vrednosti od x. Lako je pokazati da su sve ove definicije ekvivalentne.

26. Neka značajna pitanja nastaju u vezi sa teorijom identiteta. Mi smo već definisali dva termina kao identična onda kada drugi termin pripada svakoj klasi kojoj pripada i prvi. Lako je pokazati da je ova definicija simetrična i da je identitet tranzitivan i refleksivan (to će reći, ako su x i y i y i z identični, onda su identični i x i z i, bilo koje x da je u pitanju, x je identično sa x). Razlika je definisana kao negacija identiteta. Ako je x bilo koji termin, nužno je razlikovati od x klasu čiji je x jedini član: ovo može da se definiše kao klasa termina koji su identični sa x. Nužnost ovog razlikovanja koje primarno proizlazi iz čisto formalnih razmatranja otkrio je Peano; na to ću se vratiti kasnije. Tako klasa parnih prostih brojeva ne treba da se poistoveti sa brojem 2, a klasa brojeva koji predstavljaju zbir od 1 i 2 ne treba da se poistoveti sa 3. U čemu se, filozofski rečeno, sastoji ova razlika razmotrićemo u Glavi VI.

C. *Račun relacija*

27. Račun relacija je savremeniji od računa klasa. Premda je moguće pronaći neke nagoveštaje kod De Morgana[1], ovaj predmet prvi je razvio Č. S. Pers (C. S. Peirce)[2]. Jedna pažljiva analiza matematičkog rasuđivanja pokazuje (kao što ćemo i videti u toku ovog rada) da tipovi relacija predstavljaju pravi predmet rasprave, ma koliko loša frazeologija mogla da skriva ovu činjenicu; dakle, logika relacija ima neposredniji odnos sa matematikom nego što ga ima račun klasa ili iskaza; a svaki teorijski adekvatan i korektan izraz matematičkih istina jeste moguć samo zahvaljujući logici relacija. Pers i Šreder su shvatili sav njen značaj, ali, na nesreću, njihovi metodi su toliko nezgrapni i teški zato što nisu bili zasnovani na Peanovoj nego na starijoj simboličkoj logici izvedenoj (uz nekoliko modifikacija) iz Bulove algebre, da većina primena koje bi mogle da se izvrše nisu uopšte praktično ostvarive. Pored ovih nedostataka stare simboličke logike, njihovi metodi pate čak i tehnički (da li pate i filozofski ili ne, to za sada ostavljam po strani) od toga što oni u suštini posmatraju relaciju kao klasu parova, što zahteva elaborirane formule sabiranja kako bi uopšte mogle da se tretiraju pojedinačne relacije. Mislim da je ovaj način posmatranja nastao, i to verovatno nesvesno, iz jedne filozofske greške: uglavnom se pretpostavljalo da su relacioni iskazi manje fundamentalni od iskaza o klasama (ili subjekat-predikat iskaza, sa kojima su iskazi o klasama često bili mešani), što je vodilo želji da se relacije tretiraju kao neka vrsta klasa. Bilo kako bilo, metod o kojem je ovde reč je sasvim sigurno

---

[1] *Camb. Phil. Trans.*, Vol. X, „On the Syllogism No. IV, and on the Logic of Relations". Cf. *ib*, Vol. IX, str. 104; takođe, vidi njegovu *Formal Logic* (London, 1847), str. 50.

[2] Vidi naročito njegove članke o logičkoj algebri, *American Journal of Mathematics*, Vol. III i Vol. VII. Ovaj predmet je detaljno obrađen Persovim metodama i kod Šredera, *op. cit.*, Vol. III.

proizašao iz suprotnog filozofskog verovanja od onog do kojeg sam ja došao preko mog prijatelja gospodina Dž. E. Mura[1], a koje me je odvelo drugačijem formalnom tretiranju relacija. Ovaj tretman, bilo da je filozofski ispravniji ili ne, sigurno je daleko pogodniji i daleko moćniji kao instrument otkrića u aktualnoj matematici[2].

28. Ako je *R* relacija, sa *xRy* izražavamo iskaznu funkciju „*x* je u relaciji *R* sa *y*". Zahtevamo i jedan prvobitan (nedokaziv) iskaz koji će izraziti da je „*xRy*" iskaz za sve vrednosti od *x* i *y*. Onda moramo da razmotrimo sledeće klase: klasu termina koji su u relaciji *R* sa ovim ili onim terminom a koju nazivam klasom *referencija* s obzirom na *R*, kao i klasu termina prema kojima neki termin stoji u relaciji *R* a koju nazivam klasom *relata*. Tako, ako je *R* očinstvo, referencije će biti očevi, a relati će biti deca. Moramo takođe da razmotrimo i klase koje odgovaraju pojedinačnim terminima ili klasama termina: deca toga-i-toga ili deca londonjera, pružaju dobre ilustracije.

Ovde zastupano intenzionalno gledište o relacijama vodi nas rezultatu da dve relacije mogu da imaju istu ekstenziju, a da nisu identične. Za dve relacije *R* i *R'* kaže se da su jednake ili ekvivalentne ili da imaju istu ekstenziju kada *xRy* implicira ili je implicirano sa *xR'y*, za sve vrednosti od *x* i *y*. Ali, ovde nema potrebe za prvobitnim iskazom, kao u slučaju klasa, kako bi se dobila relacija koja je određena onda kada je određena ekstenzija. Relaciju *R* možemo da zamenimo logičkim zbirom ili proizvodom klase relacija ekvivalentnim sa *R*, to jest tvrđenjem nekih ili svih tih relacija, što je identično sa logičkim zbirom ili sa proizvodom klase relacija koje su ekvivalentne sa *R'*, ako je *R'* ekvivalentno sa *R*. Ovde koristimo identitet dve klase koji proizlazi iz prvobitnog iskaza o identitetu

[1] Vidi njegov članak „On the Nature of Judgment", *Mind*, N. S., br. 30.

[2] Vidi moje članke u *R. d. M.*, Vol. VII, br. 2 i u narednim brojevima.

klasa kako bismo ustanovili identitet dve relacije – postupak koji ne može da se primeni na same klase bez upadanja u logički krug.

Jedan od prvobitnih iskaza koji se odnosi na relacije jeste taj da svaka relacija poseduje konvers, što će reći, ako je *R* bilo koja relacija, onda postoji jedna relacija *R*ʾ takva da je *xRy* ekvivalentno sa *xR*ʾ*y* za sve vrednosti *od x* i *y*. Sledeći Šredera, konvers od *R* ću označavati sa $\breve{R}$. Veće ili manje, pre ili kasnije, implicirati i biti impliciran jesu uzajamno konverzne relacije. Za neke relacije kao što su relacija identiteta, različitosti, jednakosti, nejednakosti, konvers je isti kao i originalna relacija: za takve relacije se kaže da su simetrične. Kada je konvers inkompatibilan sa originalnom relacijom kao, na primer, u slučaju veće i manje, takva relacija naziva se *asimetrična*, a u nekim specijalnim slučajevima i *nesimetrična*.

Ovde je najznačajniji od prvobitnih iskaza taj da između bilo koja dva termina postoji relacija koja ne postoji između bilo koja druga dva termina. Ovo je analogno principu da je bilo koji termin samo član izvesne klase; ali, dok ovo može da se dokaže zahvaljujući ekstenzionalnom gledištu o klasama, ovaj princip, koliko mogu da vidim, ne može da se dokaže. U ovom pogledu ekstenzionalno gledište o relacijama pruža izvesnu prednost, ali izgleda da se ta gubi u svetlu daljih razmatranja. Kada se relacije razmatraju intenzionalno, možemo posumnjati da li je gorenavedeni princip uopšte istinit. Međutim, biće uopšte uzev prihvaćeno da za svaki par termina postoji neka istinita iskazna funkcija koja neće biti istinita za neki dati različiti par termina. Ako ovo prihvatimo, onda gorenavedeni princip sledi na osnovu razmatranja logičkog proizvoda svih relacija koje važe između našeg prvog para termina. Tako, gorenavedeni princip može da se zameni sledećim, koji mu je ekvivalentan: ako *xRy* implicira *x*'*Ry*', o bilo kojem *R* da je reč pod uslovom da je *R* uopšte neka relacija, onda su *x* i *x*' kao i *y* i *y*' identični. Ali, ovaj princip proizvodi jednu logičku teškoću koje smo do sada bili pošteđeni, naime, on uvodi promenljivu sa ograničenim poljem; jer, ukoliko *R* nije relacija, *xRy* uopšte nije istinit ili lažan iskaz, te tako izgleda da *R* ne može da uzme *sve* vrednosti već samo one koje su relacije. Na ovo ću se vratiti kasnije.

29. Druge pretpostavke koje se ovde zahtevaju jesu da je negacija relacije relacija i da je logički proizvod klase relacija (to jest jednovremeno tvrđenje svake od njih) relacija. Takođe, *relativan proizvod* dve relacije mora biti relacija. Relativan proizvod dve relacije *R* i *S* je relacija koja važi između *x* i *x* svaki put kada postoji neki termin *y* sa kojim je *x* u relaciji *R* i koji je u relaciji *S* sa *z*. Tako, relacija dede po majci prema njegovom unuku jeste relativan proizvod oca i majke; relacija babe po ocu prema njenom unuku jeste relativan proizvod majke i oca; relacija dede i babe prema unucima jeste relativan proizvod roditelja i roditelja. Relativan proizvod, kako ovi primeri pokazuju, nije komutativan i, uopšte uzev, ne podleže zakonu tautologije. Relativan proizvod je pojam od vrlo velikog značaja. Pošto ne podleže zakonu tautologije, on vodi stepenima relacija: kvadrat relacije roditelja i deteta jeste relacija dede ili babe i unuka ili unuke, itd. Pers i Šreder takođe razmatraju i ono što oni nazivaju relativnim zbirom dve relacije *R* i *S*, koje važe između *x* i *z* kada, ako je *y* bilo koji drugi termin, ili je *x* u relaciji *R* sa *y*, ili je *y* u relaciji *S* sa *z.* Ovo je jedan komplikovan pojam koji nisam imao prilike da do sada upotrebim i koji je uveden samo zato da bi se održala dualnost sabiranja i množenja. Ova dualnost ima izvestan tehnički šarm kada se na ovaj predmet gleda kao na nezavisnu granu matematike; ali, kada se na njega gleda isključivo u odnosu prema principima matematike, dualnost o kojoj je reč izgleda kao da je lišena svakog filozofskog značaja.

30. Matematika, koliko mi je poznato, zahteva samo još dva dodatna prvobitna iskaza; jedan, da je materijalna implikacija relacija, i drugi, da je $\in$ (relacija termina prema klasi kojoj pripada) relacija[1]. Sada možemo da razvijemo celu matematiku bez ikakvih daljih pretpostavki i nedefinljivih. Izvesni iskazi u logici relacija, pošto su značajni, zaslužuju da ovde budu pomenuti, ali može se posumnjati da li mogu i formalno da se dokažu. Ako su *u* i *v* bilo koje dve klase, postoji relacija *R* koja može da se tvrdi o bilo koja dva termina *x* i *y*, što je ekvivalentno tvrđeno da *x* pripada *u* i da *y* pripada *v*. Ako je *u* bilo koja klasa koja nije nulta, postoji relacija u kojoj svi njeni termini stoje prema njoj samoj, i koja ne povezuje nikoji drugi par termina. Ako je *R* bilo koja relacija, a *u* bilo koja klasa sadržana u klasi referencija od *R*, postoji relacija koja ima *u* za klasu svojih referencija i koja je ekvivalentna sa *R* u celoj ovoj klasi; ova relacija je ista kao i *R* tamo gde ona važi ali ima ograničeniji domen. (Upotrebljavam reč *domen* kao sinonim sa *klasom referencija*). Pošavši odavde, dalje razvijanje ovog predmeta jeste čisto tehničko: pristupa se izučavanju posebnih tipova relacija, odakle onda proizlaze i posebne grane matematike.

D. *Peanova simbolička logika*

31. Prethodni kratak pregled simboličke logike je u tolikoj meri inspirisan Peanom da je poželjno da njegovo delo eksplicitno razmotrimo i da ujedno izložimo kritike, po nekim pitanjima, koje opravdavaju moje neslaganje s njim.

Pitanje koji pojmovi simbličke logike treba da se uzmu kao nedefinljivi, a koji iskazi kao nedokazivi jeste, kao što je i Peano to podvukao[2], u izvesnoj meri proizvoljno. Ali, značajno je izdvojiti sve uzajamne relacije najprostijih pojmova logike i ispitati koje posledice proizlaze iz uzimanja nekih pojmova kao nedefinljivih. Neophodno je shvatiti da definicija u matematici, za razliku od

[1] U pogledu ovog prvobitnog iskaza postoji teškoća koju ćemo razmotriti u §§53 i 94.

[2] Na primer, *F.* 1901, str. 6; *F.* 1897, Deo I, str. 62–3.

filozofije, ne znači analizu neke ideje koja bi trebalo da se definiše preko ideja koje bi trebalo da budu njeni konstituenti. Ovakvo shvatanje je, u svakom slučaju, primenljivo samo na pojmove, dok je u matematici moguće definisati termine koji nisu pojmovi[1]. Tako, simbolička logika definiše mnoge pojmove koji nisu podložni filozofskoj definiciji pošto su prosti i neanalizabilni. Matematička definicija se sastoji u ukazivanju na fiksiranu relaciju prema nekom fiksiranom terminu koju samo taj jedan termin može da ima: ovaj termin je onda definisan pomoću te fiksirane relacije i pomoću tog fiksiranog termina. Ono po čemu se ova definicija razlikuje od filozofske definicije može da se objasni zapažanjem da matematička definicija ne označava termin o kojem je reč i da samo ono što možemo nazvati filozofskim uvidom otkriva o kom se terminu među svim prisutnim terminima tu uopšte radi. Ovo sledi iz činjenice da je termin definisan pojmom koji ga nedvosmisleno *označava*, a ne stvarnim pominjanjem označenog termina. Smisao označavanja, kao i različiti načini označavanja, moraju da se prihvate kao prvobitne ideje u bilo kojoj simboličkoj logici[2]; u tom pogledu, prihvaćeni redosled izlaganja ni u kojem stepenu ne izgleda proizvoljno.

32. Radi veće preciznosti, ispitajmo jedno od Peanovih izlaganja o ovom predmetu. U njegovim kasnijim razmatranjima[3] on je napustio nastojanje da jasno razlikuje izvesne ideje i iskaze kao prvobitne. Verovatno zato što je shvatio u kojoj je meri jedna takva distinkcija proizvoljna. Ali, ta distinkcija se ipak pokazuje korisnom zato što se njom uvodi veća određenost i zato što se pokazuje da je izvestan skup prvobitnih ideja i iskaza dovoljan; dakle,

---

[1] Vidi Glavu IV.

[2] Vidi Glavu V.

[3] *F*. 1901 i *R.d.M*. Vol. VII, br. 1 (1900).

daleko od toga da se odbaci, baš naprotiv, treba nastojati da se ova distinkcija svim mogućim sredstvima jasno ustanovi. Ja ću zbog toga u nastavku da izložim jedno od Peanovih ranijih razmatranja, ono iz 1897[1].

Prvobitni pojmovi od kojih Peano polazi su sledeći: klasa, relacija individue prema klasi koje je ona član, pojam termina, implikacija čija oba termina sadrže iste promenljive, što znači formalna implikacija, jednovremena afirmacija dva iskaza, pojam definicije i negacija iskaza. Iz ovih pojmova, zajedno sa podelom složenih iskaza na delove, Peano nastoji da posredstvom izvesnih prvobitnih iskaza izdedukuje celokupnu simboličku logiku. Ispitajmo ovu njegovu dedukciju u opštim crtama.

Za početak možemo da primetimo da bi jednovremena afirmacija *dva* iskaza na prvi pogled mogla da izgleda nedovoljno ako bi se uzela kao prvobitna ideja. Jer, iako ona u narednim koracima može da se proširi na jednovremenu afirmaciju bilo kojeg konačnog broja iskaza, time se i dalje ne dobija sve ono što želimo; zahtevamo da se mogu jednovremeno tvrditi svi iskazi bilo koje klase, konačne ili beskonačne. Ali, što je zaista dosta čudno, mnogo je lakše definisati jednovremeno tvrđenje klase iskaza od tvrđenja samo dva iskaza [vidi §34, (3)]. Ako je *k* klasa iskaza, njena jednovremena afirmacija jeste tvrđenje da „*p* je *k*“ implicira *p*. Ako ovo važi, svi iskazi te klase biće istiniti; a ako ne važi, barem jedan od ovih iskaza mora biti lažan. Videli smo da logički proizvod dva iskaza može da se definiše na sasvim veštački način; ali, on bi skoro isto tako dobro mogao i da se uzme kao nedefinljiv pošto nijedno drugo svojstvo ne može da se dokaže pomoću ove definicije. Isto tako možemo da primetimo da su kod Peana formalna i materijalna implikacija kombinovane u jednu jedinu prvobitnu ideju, iako one moraju da budu razdvojene.

---

[1] *F.* 1897, Deo I.

33. Pre nego što navede sve prvobitne iskaze, Peano izlaže neke definicije. (1) Ako je *a* klasa, „*x* i *y* su *a*-ovi“ znači „*x* je *a* i *y* je *a*“. (2) Ako su *a* i *b* klase, „svako *a* je *b*“ znači „*x* je *a* implicira *x* je *b*“. Ako formalnu implikaciju prihvatimo kao prvobitni pojam, ova definicija je besprekorna; ali, moglo bi da se tvrdi da je relacija uključivanja između klasa jednostavnija od formalne implikacije i da ne bi trebalo da se definiše pomoću nje. Ovo je teško pitanje čije ispitivanje odlažem za kasnije. Izgleda da je formalna implikacija tvrđenje cele klase materijalnih implikacija. Komplikacija koja je ovde uvedena nastaje iz prirode promenljive, što izgleda da je mesto koje Peano, iako je mnogo učinio kako bi istakao njegov značaj, ipak nije dovoljno ispitao. Pojam iskaza koji sadrži promenljivu i implicira drugi iskaz iste vrste koji on prihvata kao prvobitan pojam jeste složen, te bi otuda trebalo da se rastavi na konstituente; ovo rastavljanje čini nužnim razmatranje istovremene afirmacije cele klase iskaza pre interpretacije iskaza kao što je „*x* je *a* implicira *x* je *b*“. (3) Sada prelazimo na jednu sasvim nepotrebnu definiciju koja je kasnije bila napuštena[1]. To je definicija *takvo da.* Kaže nam se da *x*-ovi takvi da *x* je *a* treba da znače klasu *a*. Ali, ovo daje smisao *takvo da* samo onda kada se stavi ispred iskaza tipa „*x* je *a*“. Sada, često je nužno uzeti *x* koje je takvo da je neki iskaz istinit a da nije oblika „*x* je *a*“. Peano tvrdi (mada to ne postavlja kao aksiom) da je svaki iskaz koji sadrži samo jednu promenljivu svodiv na oblik „*x* je *a*“[2]. Ali, videćemo (u Glavi X) da barem jedan iskaz ove vrste nije svodiv na ovu formu. Ma kako bilo, jedina korist od *takvo da* jeste vršenje ovog svođenja za koje stoga ne može da se pretpostavi da je već ostvareno bez njega. Činjenica je da *takvo da* sadrži neku prvobitnu ideju, ali ideju koju nije lako jasno razdvojiti od drugih ideja.

---

[1] Sledeći kritike Padoe (Padoa), *R. d. M.*, Vol. VI, str. 112.

[2] *R.d.M.*, Vol. VII, Br. 1, str. 25; *F.* 1901, str. 21, §2, Prop. 4.0, napomena.

Da bi se shvatilo značenje *takvo da*, nužno je da pre svega uočimo da je ono što Peano i matematičari uopšte nazivaju *jednim* iskazom koji sadrži promenljivu, u stvari, ako je ta promenljiva samo prividna, konjunkcija izvesne klase iskaza definisane nekom konstantnošću forme; dok, ako je promenljiva realna, tako da imamo iskaznu funkciju, to uopšte i nije iskaz već samo jedna vrsta shematskog predstavljanja *bilo kog* iskaza izvesne vrste. „Zbir uglova u trouglu jednak je dvama pravim uglovima“, na primer, kada se izrazi posredstvom promenljive, postaje: ako je neko x trougao, onda je zbir uglova od x jednak dvama pravim ulovima. Ovo izražava konjunkciju svih iskaza u kojima se o određenim pojedinačnim entitetima kaže da ako su to trouglovi, zbir njihovih uglova jeste jednak dvama pravim uglovima. Ali, jedna iskazna funkcija, onda kada je promenljiva realna, predstavlja *bilo koji* iskaz izvesnog tipa, a ne *sve* iskaze tog tipa (vidi §§59–62). Postoji, za svaku iskaznu funkciju, jedna nedefinljiva relacija između iskaza i entiteta koja može da se izrazi time što se kaže da svi ti iskazi imaju istu formu ali da sadrže različite entitete. Ovo je ono iz čega nastaju iskazne funkcije. Ako su, na primer, dati jedna konstantna relacija i jedan konstantan termin, postoji jedan-jedan korespondencija između iskaza koji tvrde da različiti termini stoje u navedenoj relaciji prema navedenom terminu i različitim terminima koji se javljaju u ovim iskazima. Ovaj pojam je ono što je potrebno za razumevanje *takvo da.* Neka je x promenljiva čije vrednosti formiraju klasu a i neka je $f(x)$ jednovrednosna funkcija od x koja je istinit iskaz za sve vrednosti od x unutar klase a, a lažan iskaz za sve druge vrednosti od x. Onda su termini od a klasa termina *takvih da* je $f(x)$ istinit iskaz. Ovo predstavlja objašnjenje za *takvo da*. Ali, uvek moramo da imamo na umu da to što izgleda da postoji *jedan* iskaz $f(x)$ koji je zadovoljen izvesnim brojem vrednosti od x može biti lažno: $f(x)$ uopšte nije iskaz već iskazna funkcija. Ono što je osnovno jeste relacija između različitih iskaza date forme prema različitim terminima koji ulaze u njih kao argumenti ili kao vrednosti promenljive; ova relacija je podjednako potrebna i za interpretaciju iskazne funkcije *f*(*x*) i pojma *takvo da*, ali ona sama jeste fundamentalna i neobjašnjiva. (4) Zatim možemo da definišemo logički proizvod ili zajednički deo dve klase. Ako su *a* i *b* dve klase, njihov zajednički deo se sastoji od terminâ *x* takvih da *x* je *a* i *x* je *b*. Kako to ističe Padoa (*loc. cit.)*, ovde je već nužno prošireno značenje *takvo da* preko onih slučajeva u kojima naši iskazi tvrde pripadnost članova nekoj klasi, pošto je samo pomoću definicije moguće pokazati da je zajednički deo neka klasa.

34. Ostale definicije prethodnih prvobitnih iskaza manje su značajne i možemo preći preko njih. Među prvobitnim iskazima, neki izgledaju kao da se odnose samo na simbolizam i kao da ne izražavaju nikakva realna svojstva onoga što je simbolizovano, dok su, nasuprot tome, neki drugi od velikog logičkog značaja.

(1) Prvi od Peanovih aksioma jeste „svaka klasa sadrži samu sebe“. Ovo je ekvivalentno sa „svaki iskaz implicira samog sebe“. Izgleda da ne postoji nikakvo sredstvo kojim bi se izbegao ovaj aksiom koji je ekvivalentan zakonu identiteta, izuzev metoda prihvaćenog ranije, koji se koristi samoimplikacijom prilikom definisanja iskaza. (2) Sledeći aksiom kaže da je proizvod dve klase klasa. Ovo bi, kao i definiciju logičkog proizvoda, trebalo proširiti i na klasu klasa jer, kada bismo se ograničili samo na dve klase, to onda ne bi moglo da se proširi na logički proizvod beskonačne klase klasa. Ako se *klasa* uzima kao nedefinljiva, ovaj aksiom je autentičan i neophodan je u rasuđivanju. Ali, možda bi mogao donekle da se uopšti pomoću aksioma koji se odnosi na termine koji zadovoljavaju iskaze neke date forme: na primer, „termini koji su u jednoj ili u više datih relacija sa jednim ili sa više datih termina formiraju klasu“. U Odeljku B *supra* ovaj aksiom je u celosti izbegnut korišćenjem njegove uopštene forme kao definicije *klase*.

(3) Zatim imamo dva aksioma koji su u stvari samo jedan aksiom a izgledaju različito samo zato što Peano definiše zajednički deo dve klase umesto da definiše zajednički deo klase klasa. Ova dva aksioma kažu nam da, ako su *a* i *b* klase, njihov logički proizvod *ab* sadržan je u *a* i sadržan je u *b*. Ovi aksiomi izgledaju kao da su različiti zato što, što se simbolizma tiče, *ab* bi moglo da bude različito od *ba*. Jedna od mana većine simbolizama jeste to što pridaju poredak terminima koji ovi ili intrinsično ne poseduju ili pak nijedan koji bi bio relevantan. Tako, u ovom slučaju imamo: ako je *K* klasa klasâ, logički proizvod od *K* sastoji se od svih termina koji pripadaju svim klasama koje pripadaju klasi *K*. Ova definicija neposredno pokazuje da se u ovome nikakav poredak termina ne pretpostavlja. Tako, ako *K* ima samo dva termina *a* i *b*, svejedno je da li je logički proizvod od *K* predstavljen sa *ab* ili sa *ba*, pošto poredak postoji samo u simbolima, ali ne i u onome što je simbolizovano. Trebalo bi primetiti da ovaj aksiom s obzirom na iskaze tvrdi da jednovremeno tvrđenje klase iskaza implicira bilo koji iskaz te klase, i možda je ovo najbolji oblik ovog aksioma. Ipak, iako nikakav aksiom ovde nije neophodan, nužno je, ovde kao i drugde, imati neko sredstvo za povezivanje slučaja u kojem polazimo od klase klasa ili iskaza ili relacija, sa slučajem u kojem klasa predstavlja rezultat nabrajanja njenih termina. Tako, mada nikakav poredak nije sadržan u proizvodu *klase* iskaza, on nije sadržan ni u proizvodu neka dva određena iskaza *p* i *q*, te je značajno tvrditi da su proizvodi *pq* i *qp* ekvivalentni. Ali, ovo može da se dokaže pomoću aksioma sa kojima smo započeli račun iskaza (§18). Primetimo da ovaj dokaz prethodi onom da je klasa čiji su termini *p* i *q* identična sa klasom čiji su termini *q* i *p*. (4) Zatim imamo i dve forme silogizma, od kojih su obe prvobitni iskazi. U prvoj se tvrdi da, ako su *a*, *b* i *c* klase, i ako je *a* sadržano u *b*, a *x* u *a*, onda *x* je *b*; u drugoj se tvrdi da ako su *a*, *b* i *c* klase, i ako je *a* sadržano u *b*, a *b* u *c*, onda je *a* sadržano u *c*. Jedna od najvećih Peanovih zasluga

sastoji se u tome što je jasno razdvojio relaciju individue prema njenoj klasi od relacije uključivanja među klasama. Ova razlika je sasvim fundamentalna: prva relacija je najjednostavnija i najbitnija od svih relacija, a druga je komplikovana i izvedena je iz logičke implikacije. Iz ove razlike proizlazi da silogizam Barbara ima dve forme koje su često mešane: jedna je proslavljeno tvrđenje da je Sokrat čovek i da je stoga smrtan; druga jeste tvrđenje da su Grci ljudi i da su stoga smrtni. Ove dve forme su izražene Peanovim aksiomima. Treba primetiti da na osnovu definicije onoga na šta se misli kada se kaže da je neka klasa sadržana u drugoj, prva forma proizlazi iz aksioma da, ako su *p*, *q* i *r* iskazi i ako *p* implicira da *q* implicira *r*, onda proizvod od *p* i *q* implicira *r*. Ovim aksiomom Peano zamenjuje prvu formu ovog silogizma[1]: ta forma je opštija i ne može da se izdedukuje iz navedene forme. Kada se primeni na iskaze umesto na klase, ova druga forma silogizma tvrdi da je implikacija tranzitivna. Ovaj princip, naravno, predstavlja ono što pokreće sve lance rasuđivanja. (5) Zatim imamo princip rasuđivanja koji Peano naziva *kompozicijom*: njime se tvrdi da, ako je *a* sadržano u *b* a takođe i u *c*, onda je *a* sadržano u zajedničkom delu od *b* i *c*. U pogledu iskaza, ovaj princip tvrdi da ako iskaz implicira svaki od dva druga, onda on implicira i njihovo zajedničko tvrđenje ili logički proizvod, a ovaj princip jeste onaj koji smo gore nazvali *kompozicijom*.

35. Odavde lako nastavljamo sve dok se ne javi potreba za *negacijom*. Ona je u izdanju *Formulara* koje sledimo pretpostavljena kao nova prvobitna ideja, a disjunkcija je definisana pomoću nje. Naravno, sasvim je lako definisati negaciju klase pomoću negacije iskaza: jer, „*x* je ne-*a*“ ekvivalentno je sa „*x* nije *a*“. Ali, potreban nam je jedan aksiom da bi se dobilo da je ne-*a* klasa, kao i jedan drugi da bi se dobilo ne-ne-*a* je *a*. Peano nam daje i jedan

---

[1] Vidi, na primer, *F.* 1901, Deo I, §1, Prop. 3.3 (str. 10).

treći aksiom, naime: ako su *a*, *b* i *c* klase, i ako je *ab* sadržano u *c*, i ako *x* jeste *a* ali ne i *c*, onda *x* nije *b*. Ovo je jednostavnije ako se izrazi u obliku: ako su *p*, *q* i *r* iskazi, i ako *p* i *q* zajedno impliciraju *r*, i ako je *q* istinito a *r* lažno, onda je *q* lažno. Ovo bi se dodatno poboljšalo stavljanjem u sledeći oblik: ako su *q* i *r* iskazi, i ako *q* implicira *r*, onda ne-*r* implicira ne-*q*, što je oblik koji Peano dobija dedukcijom. Bavljenjem iskazima pre nego klasama ili iskaznim funkcijama moguće je, kao što smo videli, izbeći tretiranje negacije kao prvobitne ideje, a sve aksiome koji se odnose na negaciju zameniti principom redukcije.

Sada prelazimo na definiciju disjunkcije ili logičkog zbira dve klase. Na ovom mestu je Peano često menjao način postupanja. U izdanju na koje se oslanjamo, „*a* ili *b*" definisano je kao negacija logičkog proizvoda od ne-*a* i ne-*b*, to jest klasa termina od kojih nisu oba ne-*a* i ne-*b*. U kasnijim izdanjima (na primer, *F*. 1901, str. 19) nalazimo nešto manje veštačku definiciju, naime: „*a* ili *b*" se sastoji od svih termina koji pripadaju bilo kojoj klasi koja sadrži *a* i sadrži *b*. I jedna i druga definicija izgledaju logički besprekorno. Treba primetiti da su *a* i *b* klase i da za filozofsku logiku ostaje nerešeno pitanje da li možda postoji neki sasvim različit pojam disjunkcije individua kao, na primer, „Braun ili Džons". Ovo pitanje ću da razmotrim u Glavi V. Treba se prisetiti da, kada počnemo sa računom iskaza, disjunkcija je definisana pre negacije, dok je kod druge definicije (one iz 1897), očigledno nužno da počnemo sa negacijom.

36. Sada sledi analiza pojmova u vezi sa nultom klasom i egzistencijom klase. U izdanju iz 1897. klasa je definisana kao nulta kada je sadržana u svakoj klasi. Ako se prisetimo definicije kojom se za klasu *a* kaže da je sadržana u drugoj klasi *b* („*x* je *a*" implicira „*x* je *b*" za sve vrednosti od *x*), vidimo da implikaciju treba smatrati kao da važi za *sve* vrednosti, a ne samo za one vrednosti za koje je *x* zaista *a*. Na ovom mestu Peano nije eksplicitan i pitam se da li se njegovo razmišljanje ovde završilo. Ako bi implikacija važila samo kada je *x* zaista *a*, ona ne bi obezbedila nikakvu definiciju nulte klase za koju je takva hipoteza lažna za sve vrednosti od *x*. Ne znam da li je iz ovog ili iz nekog drugog razloga Peano napustio definiciju uključivanja klasa pomoću formalne implikacije između iskaznih funkcija: izgleda da je uključivanje klasa uzeto kao nedefinljivo. Druga definicija koju je Peano nekada podržavao (na primer, *F.* 1895, *Errata*, str. 116) jeste ona prema kojoj nulta klasa predstavlja proizvod bilo koje klase i njene negacije – definicija na koju su primenljive slične primedbe. U *R.d.M*, Vol. VII, br. 1 (§3, Prop. 1.0) nulta klasa je definisana kao klasa onih termina koji pripadaju svakoj klasi, to jest kao klasa termina *x* takvih da „*a* je klasa“ implicira „*x* je *a*“, za sve vrednosti od *a*. Naravno, ne postoji nikakav termin *x* ove vrste, a postoji ozbiljna logička teškoća u nastojanju da se ekstenzionalno interpretira klasa koja nema ekstenziju. Na ovo mesto ću se vratiti u Glavi VI.

Odavde nadalje, Peanova logika odvija se regularno. Ali, u jednom pogledu ona je ostala defektna – ne prepoznaje kao nesvodive relacione iskaze koji ne tvrde pripadnost klasi. Iz tog razloga definicije funkcije[1] i drugih bitnih relacionih pojmova postaju manjkave; ali, ovaj nedostatak je lako ukloniti primenjujući na gore objašnjen način principe iz *Formulara* na logiku relacija[2].

---

[1] Vidi, na primer, *F*. 1901. Deo I, §10, Prop. 1.0.01 (str. 33).

[2] Vidi moj članak „Sur la logique des relations“, *R.d.M.*, Vol. VII, br. 2 (1901).

Glava III

IMPLIKACIJA I FORMALNA IMPLIKACIJA

37. U prethodnoj glavi sam nastojao da ukratko i nekritički, u obliku formalnih fundamentalnih ideja i iskaza predstavim sve ono što zahteva čista matematika. U delovima koji slede ću pokazati, dajući definicije različitih matematičkih pojmova – broja, beskonačnosti, kontinuiteta, različitih vrsta geometrija i kretanja – da matematici nisu potrebne nikakve druge činjenice. U ostatku Prvog dela ukazaću, što bolje mogu, na to koji filozofski problemi nastaju pri analizi navedenih pojmova, kao i pravce u kojima ti problemi, po mom mišljenju, verovatno mogu da se reše. Iznećemo na videlo neke logičke pojmove koji, iako u logici izgledaju kao sasvim fundamentalni, u samim knjigama iz logike uglavnom nisu bili ispitivani; a razmatranje ovih problema, oslobođenih ruha matematičkog simbolizma, biće zadatak filozofske logike.

Dve vrste implikacije, materijalna i formalna, suštinske su za svaku vrstu dedukcije. U ovoj glavi želim da ih ispitam i da razdvojim jednu od druge, te da istovremeno razmotrim izvesne metode za analizu formalne implikacije.

U diskusijama o zaključivanju uobičajeno se dopušta uvođenje psihološkog elementa i razmatranje sticanja saznanja pomoću njega. Ali, jasno je da kada valjano izvodimo neki iskaz polazeći od nekog drugog, mi to činimo na osnovu relacije koja važi između ta dva iskaza, nezavisno od činjenice da li mi tu relaciju uočavamo ili ne: duh je zapravo isto tako receptivan u zaključivanju, kao što zdrav razum pretpostavlja da je slučaj u opažanju čulnih objekata. Ovu relaciju na osnovu koje je moguće valjano zaključivanje nazivam materijalnom implikacijom. Već smo videli da bi bilo logički cirkularno ako bismo ovu relaciju definisali tako da znači *ako* je jedan iskaz istinit, *onda* je i drugi istinit jer *ako* i *onda* već pretpostavljaju implikaciju. Ova relacija u stvari važi, onda kada važi, bez ikakvog pozivanja na istinitost ili lažnost njome obuhvaćenih iskaza.

Ali, u razvijanju posledica iz naših pretpostavki u vezi sa implikacijom, vođeni smo zaključcima koji ni na koji način nisu u skladu sa onim što se obično tvrdi u vezi sa implikacijom, zato što smo ustanovili da bilo koji lažan iskaz implicira svaki iskaz i da je bilo koji istinit iskaz impliciran svakim iskazom. Tako su ovi iskazi formalno slični skupu dužina od kojih svaka meri jedan ili dva palca, a implikacija je slična relaciji „jednako ili manje od“ između ovih dužina. Sigurno je da se uobičajeno smatra da je nemoguće „2+2 = 4“ izvesti iz „Sokrat je čovek“ ili pak da su ova dva iskaza implicirana iskazom „Sokrat je trougao“. Ali, mislim da odbijanje da se prihvate ovakve implikacije uglavnom proizlazi iz obraćanja pažnje na formalnu implikaciju koja je mnogo poznatiji pojam i koja je, uopšte uzev, ono što duh ima pred sobom čak i u onim slučajevima u kojima se eksplicitno govori o materijalnoj implikaciji. U zaključcima izvedenim iz „Sokrat je čovek“ uglavnom nemamo u vidu filozofa koji je zadavao muke Atinjanima nego se Sokrat posmatra kao čist simbol koji može da se zameni bilo kojim drugim čovekom; a samo jedna vulgarna predrasuda u prilog istine iskazâ stoji na putu zamenjivanja Sokrata brojem, stolom ili pudingom od šljiva. Uprkos tome, svuda gde je, kao kod Euklida, neki pojedinačni iskaz izveden iz drugog prisutna je i materijalna implikacija mada, po pravilu, materijalna implikacija može da se posmatra kao pojedinačna instanca neke formalne implikacije dobijene pridavanjem neke konstantne vrednosti promenljivoj ili promenljivama sadržanim u formalnoj implikaciji o kojoj je reč. I mada je, sve dok se relacije posmatraju sa strahom koji uzrokuje sve ono što je nepoznato, prirodno sumnjati u mogućnost da se ikada otkrije relacija kao što je implikacija, na osnovu principa postavljenih u Odeljku C iz prethodne glave, ipak mora da postoji relacija koja važi isključivo između iskaza i koja važi između bilo koja dva iskaza od kojih je ili prvi lažan ili drugi istinit. Od različitih ekvivalentnih relacija koje zadovoljavaju ove uslove, jednu treba nazvati *implikacija* i, ako ovakav pojam i deluje neuobičajeno, to ipak nije dovoljan dokaz da je on samim tim iluzoran.

38. Na ovom mestu je nužno da se zadržimo na jednom logičkom problemu koji predstavlja veliku teškoću, naime, onom koji se tiče razlike između iskaza koji je stvarno tvrđen i iskaza koji se naprosto posmatra kao složen pojam. Podsetimo se da je jedan od naših nedokazivih principa bio taj da ako je antecedens u implikaciji istinit, on onda može da se izostavi a da se konsekvens ipak tvrdi. Ovaj princip, kao što je tamo primećeno, odoleva svim pokušajima formalizacije i razotkriva nam izvesnu slabost formalizma uopšte. Ovom principu se pribegava svaki put kada se za neki iskaz kaže da je *dokazan*, zato što se u svim takvim slučajevima pokazuje da je taj iskaz impliciran nekim istinitim iskazom. Druga forma u kojoj se ovaj princip konstantno upotrebljava jeste zamena konstante koja zadovoljava hipotezu u konsekvensu formalne implikacije. Ako ϕx implicira ψx za sve vrednosti od x, i ako je a konstanta koja zadovoljava ϕx, onda možemo da tvrdimo ψa pri čemu izostavljamo istinitu hipotezu ϕa. Ovo se, na primer, dešava svaki put kada su bilo koja od ovih pravila zaključivanja, koja koriste hipotezu da su implicirane promenljive iskazi, primenjena na pojedinačne iskaze. Dakle, radi se o principu koji je od vitalnog značaja za svaku vrstu dokazivanja.

Nezavisnost ovog principa sadržana je u manifestnom tumačenju zagonetke Luisa Kerola „Šta je kornjača rekla Ahilu“[1]. Principi zaključivanja koje smo prihvatili vode iskazu da, ako su *p* i *q* iskazi, onda *p* zajedno sa „*p* implicira *q*“ implicira *q*. Na prvi pogled bi moglo da se pomisli da nam to omogućava da tvrdimo *q*, pod uslovom da je *p* istinito i da implicira *q*. Ali, zagonetka o kojoj je reč pokazuje da to nije slučaj i da ćemo sve dok nemamo neki nov princip samo biti vođeni u beskrajnu regresiju sve većih i komplikovanijih implikacija i da nikada nećemo stići do tvrđenja o *q*. Nama, u stvari, treba pojam *dakle,* koji se sasvim razlikuje od pojma *implicira* i koji povezuje različite entitete. U gramatici ova distinkcija odgovara onoj između glagola i glagolske imenice, recimo između „*A* je veće od *B*“ i „*A*-ovo bivanje većim od *B*“. U prvom slučaju, iskaz je stvarno tvrđen, dok je u drugom samo uzet u obzir. Ali, ovo su psihološki termini, dok je razlika koju želim da izrazim u pravom smislu logička. Jasno je da ako mi je dozvoljeno da upotrebim reč *tvrđenje* u nepsihološkom smislu, iskaz „*p* implicira *q*“ *tvrdi* implikaciju, premda ne *tvrdi* ni *p* ni *q*. Ovo *p* i ovo *q* koji ulaze u ovaj iskaz nisu strogo isti kao *p* i *q* koji su zasebni iskazi, barem utoliko ukoliko su istiniti. Pitanje je: kako se iskaz koji je stvarno istinit razlikuje od onoga što bi bio kao entitet ako ne bi bio istinit? Očigledno je da su i istiniti i lažni iskazi entiteti izvesne vrste, ali istiniti iskazi imaju jedan kvalitet koji lažni iskazi nemaju, kvalitet koji, u jednom ne-psihološkom smislu, možemo nazvati *biti tvrđen*. Ipak, postoje velike teškoće u formulisanju jedne konzistentne teorije o ovom pitanju zato što, ako bi tvrđenje na bilo koji način menjalo iskaz, nijedan iskaz koji bi u bilo kom kontekstu mogao da ne bude tvrđen ne bi mogao da bude istinit

[1] *Mind*, N.S, Vol. IV, str. 278.

pošto bi onda kada bi bio tvrđen postao različit iskaz. Ali, ovo je očigledno pogrešno; jer, u „*p* implicira *q*“, *p* i *q* nisu tvrđeni, a ipak mogu da budu istiniti. Međutim, ostavljajući ovu zagonetku logici, mi moramo da insistiramo na tome da postoji razlika neke vrste između tvrđenog i netvrđenog iskaza[1]. Kada kažemo *dakle*, mi izražavamo jednu relaciju koja može da važi samo između tvrđenih iskaza i koja se na osnovu toga razlikuje od implikacije. Svaki put kada se javlja *dakle*, hipoteza može da se izostavi a zaključak tvrdi sam za sebe. Izgleda da je ovo prvi korak ka rešenju zagonetke Luisa Kerola.

39. Obično se kaže da izvođenje mora da ima premise i zaključak i izgleda da se pod tim podrazumeva da su dve ili više premisa nužne, ako ne za sve zaključke, onda barem za većinu. Ovo gledište se, na prvi pogled, zasniva na neospornim činjenicama: na primer, smatra se da svaki silogizam ima dve premise. Međutim, takva teorija uveliko komplikuje relaciju implikacije zato što je pretvara u relaciju koja može da ima bilo koji broj termina i koja je simetrična, s obzirom na sve, izuzev na jedan od tih termina, ali ne i simetrična s obzirom na taj jedan termin (zaključak). Međutim, jedna takva komplikacija nije nužna, pre svega zato što je svako jednovremeno tvrđenje nekog broja iskaza i samo jedan poseban iskaz; a zatim, zato što je pomoću pravila koje nazivamo eksportacija uvek moguće da implikaciju izrazimo tako da ona eksplicitno povezuje pojedinačne iskaze. Razmotrimo najpre prvi razlog: ako je *k* klasa iskaza, svi iskazi klase *k* su tvrđeni jednim jedinim iskazom „za sve vrednosti *x*, ako *x* implicira *x*, onda "*x* je *k*’" implicira *x*“ ili, običnijim jezikom, „svako *k* je istinito“. U pogledu drugog razloga, gde se pretpostavlja da je broj premisa konačan, „*pq* implicira *r*“ je ekvivalentno, ako je *q* iskaz, sa „*p* implicira da *q* implicira *r*“, gde

---

[1] Frege (*loc. cit)* raspolaže jednim specijalnim simbolom za označavanje tvrđenja.

implikacije eksplicitno povezuju pojedinačne iskaze. Tako bez rizika možemo da smatramo implikaciju relacijom koja povezuje dva iskaza, a ne relacijom proizvoljnog broja premisa prema jednom zaključku.

40. Sada prelazim na formalnu implikaciju koja je daleko teži pojam od pojma materijalne implikacije. Da bismo izbegli opšti pojam iskazne funkcije, počnimo ispitivanjem pojedinačnog primera: „*x* je čovek implicira *x* je smrtno za sve vrednosti od *x*“. Ovaj iskaz je ekvivalentan iskazima „svi ljudi su smrtni“, „svaki čovek je smrtan“ i „bilo koji čovek je smrtan“. Ali, izgleda krajnje sumnjivo da li je zaista i isti iskaz. On je takođe povezan sa jednim čisto intenzionalnim iskazom kojim se tvrdi da je *čovek* složen pojam čiji je *smrtnost* konstituent, ali ovaj iskaz se sasvim razlikuje od onog koji mi ispitujemo. U stvari, intenzionalni iskazi ove vrste nisu uvek prisutni tamo gde je neka klasa uključena u neku drugu: uopšte uzev, i jedna i druga klasa može da se definiše posredstvom više različitih predikata i nipošto nije nužno da svaki od predikata uže klase sadrži svaki od predikata šire klase kao činilac. I zaista, može da se desi da dva predikata budu filozofski jednostavna: tako, predikat boje i predikat egzistencije izgledaju kao jednostavni, dok je, pak, klasa boja deo klase postojećih stvari. Ovo intenzionalno gledište, izvedeno iz predikata, u suštini je irelevantno za simboličku logiku i matematiku, te ga za sada ostavljam po strani.

41. Pre svega može se posumnjati da li „*x* je čovek implicira *x* je smrtan“ mora da se smatra tvrđenjem koje se strogo odnosi na sve moguće termine ili samo na one koji se odnose na ljude. Izgleda da Peano, mada nije eksplicitan, podržava ovo drugo gledište. Ali, u tom slučaju, antecedens prestaje da ima smisao i postaje jednostavno definicija od *x*: *x* znači bilo koji čovek. Antecedens tako postaje puko tvrđenje koje se odnosi na značenje simbola *x*, a celina onoga što je tvrđeno u vezi sa kojom se razmatra taj simbol prelazi u zaključak. Premisa kaže: *x* označava bilo kog čoveka. Zaključak kaže: *x* je smrtan. Ali, tada se implikacija odnosi samo na simbolizam: pošto je svaki čovek smrtan, ako *x* označava bilo kog čoveka, *x* je smrtan. Tako je formalna implikacija po ovom gledištu potpuno iščezla, ostavljajući nam samo iskaz „bilo koji čovek je smrtan" kao izraz svega onoga što je relevantno u iskazu koji ima promenljivu. Sada nam preostaje samo da ispitamo iskaz „bilo koji čovek je smrtan" i da ga, ako je to moguće, objasnimo bez ponovnog uvođenja promenljive i formalne implikacije. Mora se priznati da se ovim gledištem izbegavaju neke ozbiljne teškoće. Razmotrimo, na primer, jednovremeno tvrđenje svih iskaza klase *k*: ovo ne može da se izrazi sa „"*x* je *k*" implicira *x* za sve vrednosti od *x*". Jer, onako kako stoji, ovaj iskaz ne izražava ono što se pod njim podrazumeva pošto, ako *x* nije iskaz, „*x* je *k*" ne može da implicira *x*; tako, domen varijabilnosti od *x* moraće da se ograniči na iskaze, osim ako prethodno ne dodamo hipotezu (kao i gore u §39) „*x* implicira *x*". Ova primedba u iskaznom računu važi za sve slučajeve gde je zaključak predstavljen jednim jedinim slovom: osim ako to slovo stvarno ne predstavlja iskaz, tvrđena implikacija će biti lažna pošto jedino iskazi mogu da budu implicirani. Drugačije rečeno, ako je *x* naša promenljiva, sâmo *x* je iskaz za sve vrednosti od *x* koje su iskazi, ali ne i za ikoje druge vrednosti. Ovo jasno pokazuje ograničenja kojima podleže naša promenljiva: ona mora da varira samo unutar domena vrednosti za koje su dve strane osnovne implikacije iskazi, drugim rečima, te dve strane, kada promenljiva nije zamenjena konstantom, moraju da budu prave iskazne funkcije. Ako se ova ograničenja ne poštuju, ubrzo počinju da iskrsavaju greške. Treba podvući da tu može da se javlja bilo koji broj subordiniranih implikacija čiji termini ne moraju da budu iskazi koje zahteva samo osnovna implikacija. Uzmite, na primer, prvi princip zaključivanja: ako *p* implicira *q*, onda *p* implicira *q*. Ovo podjednako važi bez obzira da li su p i q iskazi ili ne; jer, ako jedan od njih nije iskaz, „*p* implicira *q*“ postaje lažno, ali ne prestaje da bude iskaz. U stvari, na osnovu definicije iskaza, ovaj naš princip tvrdi da je „*p* implicira *q*“ iskazna funkcija, to jest da je to iskaz za *sve* vrednosti od p i od q. Ali, ako primenimo princip importacije na ovaj iskaz tako da dobijemo „"*p* implicira *q*" zajedno sa *p* implicira *q*“, imamo formulu koja je istinita samo kada su p i q iskazi: da bi se njena istinitost učinila univerzalnom moramo prethodno da je snabdemo hipotezom „*p* implicira *p* i *q* implicira *q*“. Na ovaj način ograničenje varijabilnosti promenljive u mnogim slučajevima, ako ne i u svim, može da se ukloni; tako, u tvrđenju logičkog proizvoda neke klase iskaza, formula „ako *x* implicira *x*, onda "*x* je *k*" implicira *x*“ izgleda besprekorno i omogućava da x varira bez ograničenja. U ovom slučaju su subordinirane implikacije u premisi i zaključku materijalne: samo je osnovna implikacija formalna.

Ako se sada vratimo na „*x* je čovek implicira *x* je smrtan“, postaje jasno da nije nužno nikakvo ograničenje kako bismo se osigurali da imamo pravi iskaz. Jasno je i to da mada bismo vrednosti od *x mogli* da ograničimo na ljude, i iako to tako i izgleda u iskazu „svi ljudi su smrtni“, ipak nema nikakvog razloga da to činimo što se tiče istinitosti našeg iskaza. Bilo da je x čovek ili ne, „*x* je čovek“ je uvek, kada se x zameni nekom konstantom, iskaz koji, za tu vrednost od x, implicira iskaz „*x* je smrtan“. A osim ako ne prihvatimo hipotezu i u slučajevima gde je ona lažna, uvidećemo da je nemoguće da na zadovoljavajući način tretiramo nultu klasu ili nulte iskazne funkcije. Dakle, svuda gde je istinitost naše formalne implikacije ostala nepovređena, moramo da dozvolimo našem x da uzme *sve* vrednosti, bez izuzetka; a tamo gde je potrebno bilo kakvo ograničenje varijabilnosti, implikacija ne sme da se smatra formalnom sve dok se to ograničenje ne otkloni time što se prefiksira hipotezi. (Ako je *ψx iskaz* svaki put kada x zadovoljava ϕx, gde je ϕx iskazna funkcija, i ako ψx svuda gde je iskaz implicira χx, onda „ψx implicira χx“ nije formalna implikacija, ali „ϕx implicira da ψx implicira χx“ jeste formalna implikacija).

42. Treba istaći da „*x* je čovek implicira *x* je smrtan“ nije relacija između dve iskazne funkcije, već jedinstvena iskazna funkcija koja ima jedno elegantno svojstvo, naime, da je uvek istinita. Jer, „*x* je čovek“ kao takvo uopšte nije iskaz i ništa ne implicira i ne moramo najpre da variramo naše *x* u „*x* je čovek“, a onda da ga nezavisno variramo u „*x* je smrtan“ jer bi to vodilo iskazu da „svaka stvar je čovek“ implicira „svaka stvar je smrtna“ što, iako je istinito, nije ono što se mislilo. Ovaj iskaz bi morao da se izrazi, ako bismo zadržali jezik promenljivih, posredstvom dve promenljive, u formi „*x* je čovek implicira *y* je smrtan“. Ali, ova formula je takođe nezadovoljavajuća jer bi njen prirodni smisao bio: „Ako je bilo koja stvar čovek, onda je svaka stvar smrtna“. Ono što treba podvući je, naravno, to da naše *x*, iako je promenljiva, mora da bude isto na obe strane implikacije, a iz toga proizlazi da naša formalna implikacija ne bi mogla da se dobije variranjem (recimo) Sokrata, prvo u „Sokrat je čovek“ a onda i u „Sokrtat je smrtran“, već bismo morali da pođemo od celog iskaza „Sokrat je čovek implicira Sokrat je smrtan“ i da variramo Sokrata u ovom iskazu kao u celini. Tako, naša formalna implikacija tvrdi klasu implikacija, a nipošto jednu jedinu implikaciju. Ukratko, nemamo implikaciju koja sadrži jednu promenljivu, već pre jednu varijabilnu implikaciju. Imamo klasu implikacija od kojih nijedna ne sadrži promenljivu i tvrdimo da je svaki član ove klase istinit. Ovo je bila prva etapa u matematičkoj analizi pojma promenljive.

Ali, moglo bi da se postavi pitanje kako dolazi do toga da Sokrat može da se varira u iskazu „Sokrat je čovek implicira Sokrat je smrtan“? Na osnovu činjenice da su istiniti iskazi implicirani svim drugim iskazima imamo „Sokrat je čovek implicira Sokrat je filozof"; ali, u ovom iskazu, nažalost, Sokratova varijabilnost nužno je ograničena. Izgleda da ovo pokazuje da formalna implikacija uvodi u igru nešto više od relacije implikacije i da neka dodatna relacija mora da važi tamo gde jedan termin može da se varira. U tom slučaju je prirodno reći da je ono o čemu je reč relacija uključivanja između klase *ljudi* i klase *smrtnih* – ista ona relacija koja je trebalo da bude definisana i objašnjena posredstvom naše formalne implikacije. Ali, ovaj način gledanja na stvari je isuviše jednostavan da bi mogao da udovolji svim slučajevima i stoga nije neophodan ni u jednom slučaju. Jedan veliki broj slučajeva, mada ne svi, može da se tretira posredstvom pojma onoga što ću nazvati *tvrđenjima*. Ovaj pojam sada moramo ukratko da objasnimo, ostavljajući njegovo kritičko ispitivanje za Glavu VII.

43. Oduvek je bio običaj da se iskazi dele na subjekat i predikat, ali ova podela ima tu manu što se njome izostavlja glagol. Istina, jedan velikodušan ustupak činje je, ponekad, prilikom rasplinutih razmatranja o kopuli, ali glagol zaslužuje više poštovanja nego što mu se time ukazivalo. Na jedan uopšten način, može se reći da svaki iskaz može da se razloži, neki na jedan a neki na više načina, na jedan termin (subjekat) i na nešto što je rečeno o subjektu a što ću zvati *tvrđenje*. Tako „Sokrat je čovek" može da se razloži na *Sokrat* i *je čovek*. Glagol, koji predstavlja prepoznatljivu oznaku iskaza, ostaje na strani tvrđenja, ali samo tvrđenje lišeno njegovog subjekta nije ni istinito ni lažno. U logičkoj analizi pojam tvrđenja je često prisutan, ali pošto je on označen pomoću reči *iskaz*, njemu se ne posvećuje nikakvo posebno ispitivanje. Uzmite, na primer, najbolju formulaciju identiteta nerazlučivih: „Ako su x i y bilo koja dva različita entiteta, neko tvrđenje koje važi za x ne važi i za y". U odsustvu reči *tvrđenje* koja se uobičajeno zamenjuje rečju *iskaz*, ovaj izraz je jedan od onih koji bi se uobičajeno bez daljeg prihvatio. Moglo bi još i da se kaže: „Sokrat je bio filozof, a to isto je istinito i za Platona". Ovakvi izrazi zahtevaju analizu iskaza na tvrđenje i na subjekat, s tim što tu može da postoji nešto identično za šta može da se kaže da je tvrđeno o dva subjekta.

44. Sada je moguće uvideti kako, tamo gde je analiza na subjekat i na tvrđenje legitimna, možemo da razlikujemo implikacije u kojima može da se varira termin od onih u kojima je to nemoguće. Mogu da se predlože dva načina pravljenja ove razlike, i biće potrebno da izvršimo izbor među njima. Može se reći da postoji neka relacija između ova dva tvrđenja, „je čovek" i „je smrtan", na osnovu koje, kada jedno od njih važi, i druga onda važi, ili pak, ceo iskaz „Sokrat je čovek implicira Sokrat je smrtan" može da se izanalizira na Sokrata i na tvrđenje koje se odnosi na njega, i reći da tvrđenje o kojem je reč važi za sve termine. Nijedna od ovih teorija ne zamenjuje prethodnu analizu „*x* je čovek implicira *x* je smrtan" klasom materijalnih implikacija, ali bilo koja od njih da je istinita, obe nam omogućavaju da sprovedemo analizu korak dalje. Prva teorija nailazi na sledeću teškoću: za relaciju između tvrđenja je suštinsko to da je implicirano da se oba tvrđenja odnose na *isti* subjekat, iako je priroda odabranog subjekta irelevantna. Druga teorija je izložena kritici da predložena analiza „Sokrat je čovek implicira Sokrat je smrtan" izgleda teško moguća. Ovaj iskaz se sastoji od dva termina i jedne relacije, gde su termini „Sokrat je čovek" i „Sokrat je smrtan"; izgledalo bi da subjekat, kada se relacioni iskaz razloži na subjekat i na tvrđenje, mora da bude jedan od termina tvrđene relacije. Ova primedba deluje teže od one koja je upućena prvoj teoriji: prema tome, barem za sada ću da prihvatim prvu teoriju, a formalnu implikaciju ću smatrati izvedenom iz relacije između tvrđenja.

Gore smo primetili da je relacija uključivanja između klasa nedovoljna. Ovo proizlazi iz nesvodive prirode relacionih iskaza. Uzmite, na primer, „Sokrat je oženjen implicira Sokrat je imao oca". Ovde se tvrdi da zato što Sokrat stoji u jednoj relaciji mora da stoji i u drugoj. Ili, još bolje, uzmite „*A* je pre *B* implicira *B* je posle

A“. Ovo je jedna formalna implikacija, u kojoj se (barem naizgled) tvrđenja odnose na različite subjekte; jedini način da se ovo izbegne jeste to da se kaže da oba iskaza imaju i *A* i *B* kao subjekte, što je, uzgred budi rečeno, sasvim različito od toga da se kaže da oni imaju jedan subjekat „*A* i *B*“. Ovakvi primeri jasno pokazuju da su pojam iskazne funkcije i pojam tvrđenja fundamentalniji od pojma *klase*, i da ovaj drugi pojam nije adekvatan za objašnjenje svih slučajeva formalne implikacije. Za sada neću više da se zadržavam na ovom problemu zato što ću ga obilno ilustrovati u narednim delovima ove knjige.

Značajno je shvatiti da je, u skladu sa prethodnom analizom formalne implikacije, pojam *svaki termin* nedefinljiv i fundamentalan. Formalna implikacija je implikacija koja važi za svaki termin, te tako nijedan ne može da se objasni posredstvom formalne implikacije. Ako su *a* i *b* klase, možemo da objasnimo „svako *a* je *b*“ pomoću „*x* je *a* implicira *x* je *b*“, ali *svaki* koje ovde figurira jeste derivativan i konsekutivan pojam koji pretpostavlja pojam *svaki termin*. Izgleda da je prava suština onoga što možemo da nazovemo *formalnom* istinom i suština formalnog rasuđivanja uopšte da je za neko tvrđenje prihvaćeno da ono važi o svakom terminu; a ukoliko pojam za *svaki termin* nije već priznat, formalne istine su nemoguće.

45. Fundamentalan značaj formalne implikacije se u potpunosti pokazuje kada imamo u vidu da je ona sadržana u svim pravilima zaključivanja. To znači da ne možemo da se nadamo da možemo da je u potpunosti definišemo pomoću materijalne implikacije, već da tu moraju da budu uključeni neki dalji element ili elementi. Međutim, primetimo da u jednom određenom zaključku pravilo po kome se taj zaključak izvodi ne mora da se pretpostavi kao premisa. Na ovome je insistirao Bredli[1], a to je blisko povezano sa princi-

[1] *Logic,* Knjiga II, deo I,Glava II (str. 227).

pom izostavljanja istinite premise i predstavlja jedan drugi aspekat nemoći simbolizma. Da bi se primenilo neko pravilo zaključivanja, formalno je nužno da imamo premisu kojom se tvrdi da je slučaj o kojem je tu reč instanca pravila, a onda će biti potrebno da tvrdimo pravilo na osnovu kojeg možemo da idemo od pravila ka instanci, i da, dakle, tvrdimo da tu imamo instancu pravila, i tako dalje u jednom beskrajnom procesu. Činjenica je, naravno, da je bilo koja implikacija zagarantovana pravilom zaključivanja koje je stvarno tvrđeno, a ne samo implicirana pravilom. Ovo je naprosto instanca neformalnog principa izostavljanja istinite premise: ako naše pravilo implicira izvesnu implikaciju, pravilo mora da otpadne, a implikacija da se tvrdi. Ali, i dalje je činjenica da naše pravilo implicira datu implikaciju, ukoliko je ono uopšte uvedeno, i da naprosto mora da se opazi a ne da bude zagarantovano bilo kojom formalnom dedukcijom, a često je upravo sasvim jednostavno, te samim tim i sasvim legitimno, neposredno opaziti implikaciju o kojoj je reč, kao i opaziti da je ona implicirana nekim pravilom ili sa više pravila zaključivanja.

Rezimirajmo naše ispitivanje formalne implikacije: formalna implikacija je, kao što smo rekli, afirmacija *svake* materijalne implikacije izvesne klase, a klasa materijalnih implikacija je, u prostim slučajevima, klasa svih iskaza u kojima je dato neko fiksirano tvrđenje koje je formulisano u vezi sa izvesnim subjektom ili subjektima, potvrđeno kao ono koje implicira druga data fiksirana tvrđenja koja se odnose na isti subjekat ili iste subjekte. Tamo gde postoji formalna implikacija, dogovorili smo se da je smatramo, gdegod je to moguće, kao da proizlazi iz relacije između tvrđenja o kojima je reč. Ova teorija izaziva mnoge zastrašujuće logičke probleme i za njenu odbranu je potrebna iscrpna analiza konstituenata iskaza. To je posao kojem bi sada trebalo da se posvetimo.

Glava IV

VLASTITA IMENA, PRIDEVI I GLAGOLI

46. U ovoj glavi ćemo razmotriti izvesna pitanja koja pripadaju onome što se može nazvati filozofskom gramatikom. Po mom mišljenju, izučavanje gramatike može da baci mnogo više svetla na filozofske probleme nego što su to filozofi obično pretpostavljali. Mada ne može *a priori* da se prihvati da gramatička razlika odgovara pravoj filozofskoj razlici, ipak je prva *prima facie* dokaz one druge, a najčešće može sa uspehom da se koristi kao izvor otkrića. Osim toga, mislim da moramo prihvatiti da svaka reč koja se javlja u rečenici mora da ima *neko* značenje: zvuk sasvim lišen značenja ne bi mogao da se upotrebi na manje-više fiksiran način na koji se u jeziku upotrebljavaju reči. Prema tome, tačnost naše filozofske analize jednog iskaza može na koristan način da se proveri pokušajem pripisivanja značenja svakoj reči u rečenici koja izražava iskaz. U celini uzev, izgleda mi da nas gramatika vodi mnogo bliže ispravnoj logici od mišljenja filozofa i, u onome što sledi, mada nije naša učiteljica, gramatika će ipak biti naš vodič[1].

[1] Izvrsnost gramatike kao vodiča proporcionalna je siromaštvu infleksija, to jest, stepenu analize ostvarene jezikom o kojem je reč.

Od delova našeg govora, tri su posebno značajna: imenice, pridevi i glagoli. Od imenica, neke su izvedene iz prideva ili glagola, kao, na primer, ljudskost od ljudski, ili pak sled od *slediti*. (Ne govorim o etimološkom već o logičkom izvođenju). Druge imenice, kao što su vlastita imena, prostor, vreme ili materija nisu izvedene već se primarno javljaju kao imenice. Ono što tražimo jeste klasifikacija, ne reči, već ideja; prema tome, pridevima ili predikatima nazvaćemo sve pojmove koji mogu da budu takvi, čak i u formi u kojoj bi, sa stanovišta gramatike, bili nazivani imenicama. Činjenica je da, kao što ćemo videti, *ljudski* i *ljudskost* označavaju potpuno isti pojam, te da pribegavanje jednom ili drugom od ovih termina zavisi od prirode relacije u kojoj ovaj pojam stoji prema drugim konstituentima iskaza u kojem se javlja. Razlika koju ovde zahtevamo nije identična onoj gramatičkoj razlici između imenice i prideva, pošto jedan isti pojam može, u zavisnosti od okolnosti, biti ili imenica ili pridev; ono što nama treba jeste razlika između vlastitih i opštih imena ili, još bolje rečeno, između objekata na koje ova imena ukazuju. Kao što smo videli u Glavi III, svaki iskaz može da se razloži na nešto što je tvrđeno i na nešto na šta se to tvrđenje odnosi. Vlastito ime je uvek kada se javlja u iskazu, barem prema jednom od mogućih načina analize (tamo gde ih ima više), subjekat na koji se odnosi iskaz ili neki subordinirani iskaz koji čini njegov deo, a ne ono što je rečeno o subjektu. S druge strane, pridevi i glagoli mogu da se javljaju u iskazima u kojima ne mogu da budu subjekti već samo delovi tvrđenja. Pridevi se odlikuju mogućnošću *označavanja* – termin koji nameravam da upotrebljavam u jednom tehničkom smislu koji ćemo ispitati u Glavi V. Što se tiče glagola, oni su okarakterisani jednom vezom posebne vrste sa istinitošću i lažnošću koju je krajnje teško definisati, a koja omogućava da se razlikuje tvrđeni od netvrđenog iskaza; na primer, „Cezar je umro“ i „smrt Cezara“. Ove razlike sada moramo podrobnije da odredimo, i počeću sa onom između vlastitih imena i opštih imena.

47. Filozofija poznaje određeni broj distinkcija koje su više ili manje ekvivalentne: ovde mislim na razlikovanje subjekta i predikata, supstancije i atributa, *ovo* i *šta*[1]. Sada želim ukratko da izložim ono što mi deluje kao istina o onome što se odnosi na ove i srodne distinkcije. Ovo pitanje je značajno zato što ishod spora između monizma i monadizma, idealizma i empirizma, mislilaca koji podržavaju i onih koji negiraju da se svaka istina odnosi na ono što postoji, sve to skupa zavisi, u celini ili barem delom, od teorije koju ćemo o ovom pitanju da prihvatimo. Ovde se, pak, ovaj predmet obrađuje samo iz razloga što je on bitan u svakom učenju o broju ili o prirodi promenljive, dok će se u potpunosti apstrahovati od njegovih odnosa prema opštoj filozofiji, ma koliko to inače bilo značajno.

Sve ono što može da bude predmet mišljenja ili da se javi u nekom istinitom ili lažnom iskazu, ili pak da bude uzeto kao *jedno*, sve to nazivam *terminom*. Dakle, ova reč je najrasprostranjenija u filozofskom rečniku. Koristiću je kao sinonim za reči: *jedinica*, *individua* i *entitet*. Prve dve ističu činjenicu da je svaki termin *jedno*, dok je treća izvedena iz činjenice da svaki termin poseduje biće, to jest da u izvesnom smislu *jeste*. Čovek, trenutak, broj, klasa, relacija, himera ili bilo koja druga stvar koja može da se navede, svakako jeste termin: negirati da ova ili ona stvar jeste termin uvek mora da bude pogrešno.

Možda bi moglo da se pomisli da reč tako ekstremne opštosti ne može da bude od neke velike koristi. Međutim, takvo gledište, ako se prisetimo nekih rasprostranjenih filozofskih učenja, pokazaće se pogrešnim. Naime, termin poseduje sva ona svojstva koja su uobičajeno pripisivana supstancijama ili supstantivima. Svaki termin je, pre svega, jedan logički subjekat: na primer, subjekat

---

[1] Poslednji par termina potiče od Bredlija.

iskaza, koji je i sam jedan. Osim toga, svaki termin je nepromenljiv i neuništiv. Ono što jedan termin jeste on jeste, i u njemu ne bismo mogli da opazimo promenu koja ne bi uništila njegov identitet i učinila ga nekim drugim terminom[1]. Termini poseduju i jednu drugu karakteristiku, numerički identitet sa samima sobom i numeričku razliku u odnosu na sve druge termine[2]. Numerički identitet i numerička razlika su izvor jedinstva i mnoštva; takvo prihvatanje mnoštva termina razara monizam. A izgleda izvesno da svaki sastavni deo svakog iskaza može da se posmatra kao jedan i da nijedan iskaz ne sadrži manje od dva konstituenta. *Termin* je, dakle, korisna reč, pošto pokazuje naše neslaganje sa drugim filozofijama, baš kao i zato što u brojnim tvrđenjima možemo da govorimo o *bilo kom* terminu ili o *nekom* terminu.

48. Možemo da razlikujemo dve vrste termina, od kojih ću jednu da nazovem *stvarima*, a drugu *pojmovima*. Prvu čine termini na koje ukazuju vlastita imena, a drugu termini na koje ukazuju sve druge reči. Ovde su vlastita imena uzeta u širem smislu nego obično, te tako među stvari ulaze sve pojedinačne tačke i trenuci i mnogi drugi entiteti koji se uobičajeno ne nazivaju stvarima. Među pojmovima, pak, moramo da razlikujemo barem dve vrste, naime, one na koje ukazuju pridevi i one na koje ukazuju glagoli. Prve ćemo često nazivati predikatima ili klasnim pojmovima, dok će oni drugi uvek ili skoro uvek biti relacije. (Kod neprelaznih glagola, pojam izražen glagolom je složen i obično tvrdi određenu relaciju sa neodređenim relatom, kao, na primer, u „Smit diše“).

---

[1] Pojam termina koji sam ovde izložio predstavlja modifikaciju koncepcije *pojma* koji je gospodin Dž. E. Mur predstavio u članku „On the Nature of Judgment“, *Mind*, N.S., br. 30, od kojeg se, međutim, [moj pojam termina] razlikuje u nekim značajnim aspektima.

[2] O identitetu, vidi Murov članak u *Proceedings of the Aristotelian Society*, 1900–1901.

Složili smo se da je u jednoj velikoj klasi iskaza moguće razlikovati subjekat i tvrđenje o subjektu na jedan ili na više načina. Tvrđenje uvek mora da sadrži glagol, ali izgleda da tvrđenja, osim u ovom odnosu, nemaju univerzalna svojstva. U jednom relacionom iskazu, recimo „*A* je veće od *B*", možemo da smatramo *A* subjektom, a „je veće od *B*" tvrđenjem ili pak da smatramo *B* subjektom a „*A* je veće od" tvrđenjem. Tako postoje dva načina analiziranja iskaza na subjekat i tvrđenje. U slučajevima u kojima relacija ima više od dva termina kao u „*A* je ovde sada"[1], biće više od dva načina sprovođenja ove analize. Ali, u slučaju nekih iskaza postoji samo jedan način analiziranja: to su subjekat-predikatski iskazi poput „Sokrat je mudar"[*]. Iskaz „mudrost pripada Sokratu" koji je ekvivalentan iskazu „Sokrat je mudar" predstavlja tvrđenje o mudrosti, ali je ipak različit iskaz. U iskazu „Sokrat je mudar", pojam izražen sa *mudar* javlja se na drugačiji način od onog na koji se javlja onda kada se upotrebi *mudrost*, pri čemu se razlika sastoji u tome što u drugom slučaju, ali ne i u prvom, iskaz jeste *o* ovom pojmu. Ovo ukazuje na to da je mudrost pojam, a ne stvar. Govoriću o *terminima* nekog iskaza kao o terminima, ma koliko brojnim, koji se javljaju u iskazu i mogu da se smatraju subjektima o kojima taj iskaz govori. Karakteristika termina iskaza je da bilo koji od njih može da se zameni bilo kojim drugim entitetom, a da time ne ostanemo bez iskaza. Tako ćemo reći da „Sokrat je mudar" predstavlja iskaz koji ima samo jedan termin; od preostalih kom-

---

[1] Ovaj iskaz znači „*A* je na ovom mestu u ovo vreme". U Sedmom delu će biti pokazano da relacija koju ovaj iskaz izražava nije svodiva na dvoterminsku relaciju.

* Rasel na ovom mestu koristi primer „*Socrates is human*", koristeći reč *human* kao pridev koji bi trebalo prevesti sa „ljudski" („Sokrat je ljudski") što, međutim, ne bi bilo u duhu srpskog jezika. Iz tog razloga, stručni redaktori prevoda modifikovali su Raselov primer u ovom pasusu koristeći pridev „mudar" čime ni na koji način nije promenjena Raselova poenta iz nastavka teksta (prim. stručnih redaktora prevoda).

ponenti iskaza, jedna predstavlja glagol, a druga *predikat*. Imajući u vidu smisao koji *je* ima u ovom iskazu, više uopšte nećemo imati iskaz ukoliko *mudar* zamenimo bilo čime drugim što nije predikat. Predikati su, dakle, pojmovi koji se razlikuju od glagola i koji se javljaju u iskazima koji imaju samo jedan termin ili subjekat. Sokrat je neka stvar zato što Sokrat nikada ne može da se javi drugačije nego kao termin u nekom iskazu: Sokrat ne podleže onoj neobičnoj dvostrukoj upotrebi koja je sadržana u *mudar* i *mudrost*. Tačke, trenuci, delići materije, pojedinačna stanja duha i pojedinačne postojeće stvari uopšte jesu stvari u gorenavedenom smislu, a takvi su i mnogi termini koji ne postoje, na primer, tačke u ne-euklidskom prostoru i pseudo-postojeće stvari iz romana. Izgleda da su sve klase – brojevi, ljudi, prostori itd. – stvari kada se uzmu kao pojedinačni termini; ali, ovo je nešto za Glavu VI.

Predikati se od drugih termina razlikuju na osnovu izvesnog broja veoma interesantnih svojstava, među kojima je glavno njihova veza sa onim što ću nazvati *označavanje*. Neki predikat uvek proizvodi mnoštvo srodnih pojmova: tako, pored *ljudski* i *ljudskost*, koji se razlikuju samo gramatički, imamo *čovek*, *jedan čovek*, *neki čovek*, *bilo koji čovek*, *svaki čovek*, *svi ljudi*[1] koji svi izgledaju kao da se stvarno razlikuju jedan od drugog. Izučavanje ovih različitih pojmova je apsolutno vitalno za svaku filozofiju matematike, a zbog njih je i teorija predikata značajna.

49. Moglo bi se pomisliti da je nužno da razlikujemo pojam kao takav od pojma upotrebljenog kao termin, na primer, par *je* i *biće*, *ljudski* i *ljudskost*, *jedan* u iskazu „ovo je jedan“ i 1 u iskazu „1 je broj“. Ali, prihvatanje takvog gledišta vodi u nerazrešive teš-

---

[1] Upotrebljavam izraz *svi ljudi* u kolektivnom smislu, to jest skoro sinonimno sa izrazom *ljudska rasa,* koji se od njega razlikuje time što je mnogo, a ne jedno. Uvek ću upotrebljavati *svi* u kolektivnom smislu, ograničavajući se na *svaki* za distributivni smisao. Tako ću reći „svaki čovek je smrtan“, ali ne i „svi ljudi su smrtni“.

koće. Naravno, postoji gramatička razlika, i ona odgovara razlici u pogledu relacija. U prvom slučaju, pojam je upotrebljen kao pojam što znači da je ili aktualno prediciran terminu ili da se tvrdi da povezuje dva ili više termina, dok je u drugom slučaju za sam ovaj pojam rečeno da ima predikat ili da stoji u relaciji. Prema tome, ne postoji nikakva teškoća da se objasni gramatička razlika. Ali, ono što ja želim da istaknem jeste to da ova razlika postoji isključivo u pogledu spoljašnjih relacija, ali ne i u intrinsičnoj prirodi termina. Jer, pretpostavimo da se jedan kao pridev razlikuje od broja 1 kao termin. U ovom izrazu, jedan je kao pridev transformisan u termin; dakle, ili je postao termin, u kom slučaju je ova pretpostavka protivrečna po sebi, ili pak postoji neka druga razlika između jedan i broja 1, pored činjenice da prvi označava pojam, a ne termin, dok onaj drugi označava pojam koji je termin. Ali, u ovoj poslednjoj pretpostavci mora da bude iskaza koji se odnose na jedan kao termin i moraćemo i dalje da zadržimo iskaze koji se odnose na jedan kao pridev nasuprot jednom kao terminu; no, ipak, svi takvi iskazi moraju da budu lažni pošto iskaz o jednom kao pridevu ovaj čini subjektom, te se otuda odnosi na jedan kao termin. Ukratko, ako bi postojali pridevi koji ne bi mogli da se transformišu u imenice bez promene značenja, svi iskazi koji se odnose na takve prideve (pošto bi nužno postajali supstantivi) bili bi lažni, kao što bi to bio i iskaz s obzirom na koji bi svi iskazi ove vrste bili lažni, pošto on sam transformiše prideve u supstantive. Ali, jedno takvo stanje stvari protivrečno je samo po sebi.

Prethodni argument dokazuje da imamo pravo da kažemo da termini obuhvataju sve ono što može da se javi u iskazu, izuzev možda kompleksnih termina one vrste označene sa *bilo koji* i srodnim rečima[1]. Jer, ako se *A* javlja u iskazu, onda je *A* u tom iskazu subjekat, a upravo smo videli da ako *A* nije uvek subjekat, to je onda tačno i za numerički isto *A* koje nije subjekat u jednom

---

[1] Vidi sledeću glavu.

iskazu ali jeste subjekat u drugom. Tako, ova teorija prema kojoj postoje pridevi i atributi ili idealne stvari, kako god nazvani, koji su na neki način manje supstancijalni, manje samosubzistentni, manje samoidentični od pravih supstantiva, izgleda mi kao da je potpuno pogrešna i lako svodiva na protivrečnost. Termini koji su pojmovi razlikuju se od onih koji to nisu, ne na osnovu njihove samosubzistencije, već na osnovu činjenice da se u izvesnim bilo istinitim, bilo lažnim iskazima javljaju na jedan nedefinljiv način, koji se razlikuje od onog na koji se javljaju termini subjekta ili termini relacije.

50. Dva pojma, pored numeričke različitosti koja im pripada kao terminima, poseduju i još jednu drugu različitost, koja može da se nazove pojmovnom. Ovo može da se okarakteriše time što dva iskaza u kojima se ovi pojmovi javljaju na drugačiji način nego kao termini, čak i ako su u svim drugim aspektima ta dva iskaza identična, mogu ipak da se razlikuju na osnovu toga što su pojmovi koji se u njima javljaju pojmovno različiti. Pojmovna različitost implicira numeričku različitost, ali obrnuta implikacija ne stoji pošto nisu svi termini pojmovi. Numerička različitost, kako već samo ime implicira, izvor je mnoštva, dok je za matematiku pojmovna različitost manje značajna. Ali, čitava mogućnost formulisanja različitih tvrđenja o datom terminu ili o skupu termina zavisi od pojmovne različitosti koja je samim tim u opštoj logici fundamentalna.

51. Zanimljivo je, i nije beznačajno, da ukratko ispitamo vezu između prethodne teorije o pridevima sa tradicionalnim gledištima o prirodi iskaza. Tradicionalno se smatralo da svi iskazi imaju subjekat i predikat, to jest jedno neposredno *ovo* i opšti pojam koji mu je pripisan putem deskripcije. Ovo je, naravno, jedno objašnjenje ove teorije koje će njenim pripadnicima izgledati krajnje grubo, ali ono može da posluži kao njena opšta indikacija. Nužnom unutrašnjom logikom ovo učenje završava u logičkoj teoriji gospodina

Bredlija, prema kojoj, s jedne strane, sve reči predstavljaju ideje koje imaju ono što se naziva *značenjem* i, sa druge strane, u svakom sudu nalazi se nešto što je njegov istinski subjekat, koji nije ideja niti pak ima značenje. Izgleda mi da je imati značenje jedan pojam u kome su konfuzno pomešani logički i psihološki elementi. Sve *reči* imaju značenje u jednostavnom smislu da su simboli koji stoje umesto nečega drugog. Ali, sâm iskaz, ukoliko nije lingvistički, ne sadrži reči: on sadrži entitete na koje se ukazuje rečima. Isto tako, u smislu u kojem reči imaju značenje, to značenje je irelevantno za logiku. Ali, pojmovi kao što je *čovek* imaju značenje u jednom drugom smislu: oni su, da tako kažemo, simbolički na osnovu njihove sopstvene prirode, zato što imaju svojstvo koje nazivam *označavanje.* Naime, kada se *čovek* javi u iskazu (na primer, u „Sreo sam čoveka na ulici"), taj iskaz nije o pojmu *čovek* nego o nečemu što je sasvim različito, o nekom aktualnom dvonošcu označenom tim pojmom. Tako pojmovi ove vrste imaju značenje u nepsihološkom smislu i, u tom smislu, kada kažemo „ovo je čovek" imamo jedan iskaz u kome je pojam u nekom smislu pridodat onome što nije pojam. Ali, kada je značenje shvaćeno na ovaj način, entitet na koji se ukazuje sa *Džon* nema značenje, kao što tvrdi Bredli[1], a i među pojmovima, samo oni koji označavaju imaju značenje. Verujem da ova zbrka uveliko proizlazi iz ideje da se u iskazu javljaju *reči* što, sa svoje strane, proizlazi iz ideje da su iskazi suštinski mentalni i da moraju da se poistovete sa saznanjem. Ali, u ovoj knjizi ne moramo dalje da istražujemo ove opštefilozofske probleme.

52. Ostaje nam da ispitamo glagole i da iznađemo karakteristike na osnovu kojih se oni razlikuju od prideva. U pogledu glagola takođe postoji dvostruka gramatička forma koja odgovara onoj jednostavnoj razlici u pogledu spoljašnjih relacija. Postoji glagol u formi koju on ima kao glagol (različite infleksije ove forme mogu da se ostave po strani), i postoji glagolska imenica na koju se uka-

---

[1] *Logic*, knjiga I, glava I, §§17 i 18 (str. 58–60).

zuje infinitivom ili (u engleskom) participom prezenta. Razlika koju ovde imamo u vidu jeste ona na osnovu koje se razlikuju „Felton je ubio Bakingema" i „ubijanje, a ne ubistvo". Priroda i funkcija glagola postepeno će da se pojavi u toku analize ove razlike.

Pre svega je jasno da je pojam koji se javlja u glagolskoj imenici potpuno isti kao onaj koji se javlja kao glagol. Ovo proizlazi iz prethodnog argumenta prema kojem svaki konstituent svakog iskaza mora, kako ovaj ne bi protivrečio samom sebi, da bude takav da može da se učini logičkim subjektom. Ako kažemo „*ubija* ne znači isto što i *ubiti*", već smo učinili *ubija* subjektom i ne možemo reći da pojam izražen rečju *ubija* ne može da postane subjekat. Tako, isti glagol koji se javlja kao glagol može da se javi i kao subjekat. Pitanje je: koja logička razlika je izražena razlikom gramatičke forme? Jasno je da ova razlika mora da bude razlika u spoljašnjim relacijama. Ali, što se tiče glagola, postoji još nešto više. Transformacijom glagola, onako kako se on javlja u iskazu, u glagolsku imenicu, ceo iskaz može da se transformiše u jedan jedini logički subjekat koji više nije tvrđen i koji ne sadrži u sebi ni istinitost, ni lažnost. Ali, i ovde izgleda da je nemoguće tvrditi da je logički subjekat koji nastaje iz ove transformacije entitet različit od iskaza. „Cezar je umro" i „smrt Cezara" ilustrovaće ovu poentu. Ako pitamo: šta je tvrđeno u iskazu „Cezar je umro"? odgovor mora da bude „smrt Cezara je tvrđena". U ovom slučaju bi izgledalo da je smrt Cezara ono što je istinito ili lažno; a ipak, ni istinitost ni lažnost ne pripadaju pukom logičkom subjektu. Izgleda da ovde odgovor mora da bude taj da smrt Cezara stoji u spoljašnjoj relaciji sa istinitošću ili lažnošću (prema slučaju), dok „Cezar je umro", na ovaj ili onaj način, sadrži svoju vlastitu istinitost ili lažnost kao element. Ali, ako je ova analiza tačna, teško je videti kako je moguće razlikovati „Cezar je umro" od „istina o Cezarevoj smrti" u slučaju da je to zaista istina, ili pak „lažnost o Cezarevoj smrti", u suprotnom slučaju. Međutim, u svakom slučaju je sasvim jasno da ovo drugo nikada nije ekvivalentno sa „Cezar je umro“. Izgleda da se ovde javlja fundamentalni pojam tvrđenja, dat glagolom, koji se gubi čim ga zamenimo glagolskom imenicom, a gubi se i kada iskaz o kojem je reč postane subjekat nekog drugog iskaza. Ovo ne zavisi od gramatičke forme jer, ako kažem „*Cezar je umro* je iskaz“, time ne tvrdim da je Cezar umro i jedan element u „Cezar je umro“ je nestao. Tako, protivrečnost koju je trebalo izbeći u vezi sa entitetom koji ne može da postane logički subjekat ovde izgleda neizbežna. Ne znam da izađem na kraj na zadovoljavajući način sa ovom teškoćom, koja je izgleda inherentna samoj prirodi istinitosti i lažnosti. Najprostiji način da se to učini bi nesumnjivo bio taj da se kaže da razlika između tvrđenog i netvrđenog iskaza nije logička nego psihološka. To je bez ikakve sumnje tačno, u smislu u kome mogu da se tvrde lažni iskazi. Ali, postoji jedan drugi smisao tvrđenja koji je veoma teško sasvim jasno predočiti iako je neosporan, a u kojem mogu da se tvrde samo istiniti iskazi. I istiniti i lažni iskazi su takođe u nekom smislu entiteti, i u nekom smislu mogu da budu logički subjekti; ali, u slučaju kada je iskaz istinit, on poseduje jedan kvalitet više od onog koji deli sa lažnim iskazom, a taj dodatni kvalitet jeste ono što nazivam tvrđenjem u logičkom nasuprot psihološkom smislu. Priroda istine, međutim, ne pripada ništa više principima matematike nego što pripada principima bilo čega drugog. Prema tome, ovo pitanje, uz prethodno ukazivanje na teškoću, ostavljam logičarima.

53. Moglo bi da se postavi pitanje da li sve ono što je glagol u logičkom smislu koji nas ovde interesuje izražava relaciju ili ne. Ako smo bili u pravu kada smo smatrali da je „Sokrat je mudar“ iskaz koji ima samo jedan termin, deluje sasvim jasno da *je* u ovom iskazu ne može da izražava relaciju u uobičajenom smislu ove reči. U stvari, subjekat-predikatski iskazi se odlikuju upravo ovim nerelacionim karakterom. Međutim, relacija između Sokrata i mudrosti je zasigurno *implicirana* i veoma je teško prihvatiti da ovaj iskaz ne izražava nikakvu relaciju. Možda možemo da kažemo da je to relacija iako se razlikuje od drugih relacija po tome što ne dopušta da se smatra tvrđenjem koje se odnosi na jedan ili na drugi od njegovih termina, svejedno koji, već samo na tvrđenje koje se odnosi na referenciju. Slično zapažanje može da se primeni i na iskaz „*A* jeste" koji važi za sve termine bez izuzetka. Ovo *je* je sasvim različito od onog *je* u „Sokrat je mudar"; ono može da se smatra složenim i stvarnim prediciranjem bića *A*-u. Na ovaj način, pravi logički glagol u iskazu može uvek da se smatra tvrđenjem relacije. Ali, teško je sa sigurnošću znati šta se tačno podrazumeva pod *relacijom*, tako da je celo pitanje u opasnosti da postane čisto verbalno.

54. Dvostruka priroda glagola – glagol kao glagol i glagol kao glagolska imenica – može da se izrazi, ako se svi glagoli smatraju relacijama, kao razlika između relacije po sebi i relacije koja aktualno nešto povezuje. Razmotrimo, na primer, iskaz „*A* se razlikuje od *B*". Izgleda da su konstituenti ovog iskaza, ako ga izanaliziramo, samo *A*, razlika i *B*. Međutim, ovi konstituenti, ovako postavljeni jedan pored drugog, ne rekonstituišu navedeni iskaz. Razlika koja se javlja u iskazu stvarno povezuje *A* i *B*, dok je razlika nakon analize pojam koji nema nikakvu vezu sa *A* i *B*. Može se primetiti da bismo u analizi mogli da navedemo relacije u kojima razlika stoji prema *A* i *B*, relacije koje su izražene sa *je* i *od* kada kažemo „*A* je različito od *B*". Ove relacije se sastoje u tome što je, u odnosu na razliku, *A* referencija, a *B* relat. Ali, „*A*, referencija, razlika, relat, *B*" i dalje je samo puka lista termina, a ne iskaz. Iskaz je zapravo u suštini jedinstvo, a kada analiza razori to jedinstvo, nikakvo nabrajanje konstituenata neće ponovo da uspostavi iskaz. Glagol, onda kada se upotrebi kao glagol, otelotvoruje jedinstvo iskaza i tada može da se razlikuje od glagola uzetog kao termin, mada ne znam kako bi tačno trebalo jasno da se izloži priroda ove razlike.

55. Može biti sumnjivo da li se opšti pojam *razlike* uopšte javlja u iskazu „*A* je različito od *B*“ ili pak postoji neka specifična razlika između *A* i *B* i neka druga specifična razlika između *C* i *D* koje su tvrđene u „*A* je različito od *B*“ i „*C* je različito od *D*“. Na ovaj način *razlika* postaje klasni pojam od kojeg postoji onoliko mnogo instanci koliko ima različitih parova termina, a te instance možemo da smatramo, Platonovim idiomom, kao da učestvuju u prirodi ove razlike. Pošto je ovo sasvim vitalno za teoriju relacija, biće vredno da se na tome zadržimo. Pre svega, treba istaći da je moja namera da u „*A* je različito od *B*“ imam u vidu samo numeričku razliku na osnovu koje su oni dva, ali ne i razliku u ovom ili onom pogledu.

Razmotrimo najpre hipotezu da je *jedna* razlika složen pojam, sastavljen od razlike i nekog posebnog kvaliteta koji razlikuje neku pojedinačnu razliku od svake druge pojedinačne razlike. Sve dok je sama razlika u pitanju, moramo da pretpostavimo da nikakva razlika ne može da se napravi između različitih slučajeva, ali da treba da bude različitih kvaliteta povezanih sa razlikama u različitim slučajevima. Ali, pošto se ovi slučajevi jedan od drugog razlikuju na osnovu njihovih termina, ovaj kvalitet mora primarno da bude povezan sa terminima, a ne sa razlikom. Ako ovaj kvalitet nije relacija, on ne može da bude ni u kakvoj posebnoj vezi s razlikom između *A* i *B* koja mora da se razlikuje od same gole razlike i, ako to ne uspeva, onda postaje irelevantan. S druge strane, ako je u pitanju neka nova relacija između *A* i *B* povrh i iznad razlike, onda moramo reći da bilo koja dva termina stoje u dve relacije, u razlici i u nekoj specifičnoj razlici, pri čemu ova druga ne postoji između bilo kojeg drugog para termina. Ovo gledište predstavlja kombinaciju dva druga gledišta, od kojih jedno tvrdi da ova apstraktna opšta relacija same razlike postoji između *A* i *B*, dok drugo tvrdi da kada se dva termina jedan od drugog razlikuju oni stoje u, što odgovara ovoj činjenici, jedinstvenoj i neanalizabilnoj specifičnoj relaciji razlike koju ne dele sa bilo kojim drugim parom termina. Svako od ova dva gledišta je kompatibilno bilo sa tvrđenjem bilo sa poricanjem onog drugog. Pogledajmo šta bi moglo da se kaže za i protiv svakog od njih.

Protiv ideje specifičnih razlika možemo istaći da, ako se ove razlike razlikuju, njihove razlike se jedna od druge takođe razlikuju, te smo tako odvedeni u beskonačan regres. Oni koji ne prihvataju beskonačan regres u ovome će videti dokaz da se razlike ne razlikuju. Ali, u ovoj knjizi tvrdiću da ne postoje neke naročite protivrečnosti u pojmu beskonačnosti i da beskrajna regresija ne mora da bude izložena prigovorima, osim ukoliko ne iskrsne u analizi stvarnog značenja iskaza. U našem slučaju, regres je regres implikacije a ne analize, te ga otuda treba smatrati neškodljivim.

Protiv gledišta prema kojem između *A* i *B* postoji apstraktna relacija razlike imamo argument izveden iz analize „*A* se razlikuje od *B*" koja je i uzrokovala ovu diskusiju. Treba primetiti da u hipotezi koja kombinuje opštu razliku i specifičnu razliku mora da se pretpostavi da postoje dva različita iskaza, jedan koji tvrdi opštu razliku i drugi koji tvrdi specifičnu razliku. Tako, ako tu uopšte ne može da bude opšte razlike između *A* i *B*, ova posredujuća hipoteza je isto tako nemoguća. A videli smo da je bio uzaludan i pokušaj da se izbegne neuspeh analize uključivanjem u *značenje* iskaza „*A* se razlikuje od *B*" relacije razlike prema *A* i *B*. Ovaj pokušaj zapravo vodi beskonačnom regresu jedne neprihvatljive vrste zato što bismo morali da uključimo relacije datih relacija prema *A* i *B* i razliku itd., a u ovom stalnom usložnjavanju je pretpostavljeno da se radi o samom analiziranju *značenja* našeg prvobitnog iskaza. Ovaj argument ustanovljava nešto što je od vrlo velikog značaja, naime, da kada postoji relacija između dva termina, relacije te relacije prema terminima i relacije tih relacija prema relaciji i terminima, itd. *ad infinitum*, mada su sve one implicirane iskazom koji tvrdi prvobitnu relaciju, nipošto ne čine deo *značenja* ovog iskaza.

Ali, prethodni argument nije dovoljan za dokaz da relacija između *A* i *B* ne može da bude relacija apstraktne razlike: ostaje moguće da se tvrdi, kao što je sugerisano na početku, da se pravo rešenje sastoji u tretiranju svakog iskaza kao da ima jednu vrstu jedinstva koju analiza ne može da očuva i koje je izgubljeno čak i ako ga analiza pominje kao jedan od elemenata iskaza. Ovo gledište nesumnjivo ima svoje sopstvene teškoće, ali i ono prema kojem nikoja dva para termina ne mogu da budu u istoj relaciji takođe ima svoje teškoće i ne uspeva da reši onu teškoću radi koje je i izumljeno. Jer, čak i ako je razlika između *A* i *B* posve specifična kada je u pitanju *A* i kada je u pitanju *B*, ova tri termina *A*, *B* i razlika od *A* i *B* ne konstituišu ništa više iskaz „*A* se razlikuje od *B*" nego što bi ga konstituisali *A* i *B* i razlika. Izgleda jasno da iako su razlike učinjene različitim, one bi i dalje morale da imaju nešto zajedničko. Ali, najopštije gledano, način na koji dva termina mogu da imaju nešto zajedničko jeste taj da oba stoje u nekoj datoj relaciji prema nekom datom terminu. Tako, ako nikoja dva para termina nikada ne mogu da stoje u istoj relaciji, sledi da dva termina nikada ne mogu da imaju ništa zajedničko, te otuda različite razlike neće moći, u bilo kojem definljivom smislu, da budu *instance* razlike[1]. Zaključujem, dakle, da je relacija, koja je tvrđena između *A* i *B* u iskazu „*A* se razlikuje od *B*" opšta relacija razlike koja je precizno i numerički ista kao i relacija za koju se tvrdi da važi između *C* i *D* u iskazu „*C* se razlikuje od *D*". Iz istog razloga, ovo učenje treba smatrati istinitim i za sve druge relacije; relacije nemaju instance već su strogo iste u svim iskazima u kojima se javljaju.

Sada možemo da rezimiramo poente koje smo izneli u našoj raspravi o glagolu. Glagol je, kao što smo videli, pojam koji, kao

---

[1] Izgleda da ovaj argument dokazuje da teorija univerzalija gospodina Mura prema kojoj one poseduju numerički različite instance, a koju on predstavlja u članku o identitetu (*Proceedings of the Aristotelian Society*, 1900-1901), ne sme da se primeni na sve pojmove. Relacija instance prema njenoj univerzaliji u svakom slučaju mora da bude stvarna i numerički ista svuda gde se javlja.

i pridev, može da se javlja u iskazu a da ne bude jedan od termina iskaza, mada, takođe, može da se transformiše u logički subjekat. Jedan i samo jedan glagol mora da se javi kao glagol u svakom iskazu; ali, svaki iskaz transformisanjem glagola u glagolsku imenicu može da se preobrati u jedinstveni logički subjekat one vrste koju ću nadalje nazivati iskaznim pojmom. Svaki glagol, u logičkom smislu ove reči, može da se posmatra kao relacija; kada se javlja kao glagol, on stvarno povezuje, ali kada se javlja kao glagolska imenica, on je puka relacija, posmatrana nezavisno od termina koje povezuje. Glagoli, slično pridevima, nemaju instance već su identični u svim slučajevima njihovog javljanja. Zbog načina na koji glagol stvarno povezuje termine u iskazu, svaki iskaz je jedno jedinstvo koje ga čini različitim od zbira njegovih konstituenata. Sva ova pitanja izazivaju logičke probleme koji u raspravi o logici zaslužuju detaljno i iscrpno ispitivanje.

Pošto smo dali opštu skicu prirode glagola i prideva, u sledećim dvema glavama ću da pređem na dalju diskusiju koja proizlazi iz razmatranja prideva, a u Glavi VII u vezi sa glagolima. Uopšteno rečeno, klase su povezane sa pridevima, dok iskazne funkcije obuhvataju glagole. Iz tog razloga je bilo nužno da se zadržimo tako dugo na sadržaju koji, na prvi pogled, može da izgleda, donekle, udaljen od principa matematike.

Glava V

OZNAČAVANJE

56. Pojam označavanja, slično većini pojmova logike, do sada je bio zamagljen neprikladnim uplitanjem psihologije. Postoji jedan smisao u kojem *mi* označavamo, kada nešto pokazujemo ili opisujemo, ili pak koristimo reči kao simbole za pojmove; to, međutim, nije smisao koji želim da ispitam. Ali, to da je opisivanje moguće – da smo u stanju da posredstvom pojmova označimo neku stvar koja nije pojam – omogućava logička relacija između izvesnih pojmova i izvesnih termina, na osnovu koje ovi pojmovi intrinsično i logički *označavaju* ove termine. Ovaj smisao označavanja jeste onaj o kojem je ovde reč. Ovaj pojam je, po mom mišljenju, u osnovi svih teorija supstancije, logike subjekta i predikata i suprotnosti između stvari i ideja, diskurzivnog mišljenja i neposrednog opažanja. Sva ova različita shvatanja mi deluju u celini pogrešno, dok sama osnovna činjenica iz koje su nastala skoro nikada nije bila ispitana u svojoj logičkoj čistoći.

Pojam *označava* kada iskaz, ako se on javlja u njemu, nije *o* tom pojmu nego o nekom terminu povezanom na izvestan poseban način sa tim pojmom. Ako kažem „sreo sem čoveka“, ovaj iskaz nije *o čoveku*: ovo je pojam koji ne šeta ulicama već živi u senovitom predvorju knjiga iz logike. Ono što sam ja sreo bila je neka stvar a ne pojam, realan čovek koji ima krojača i račun u banci ili kafanu i pijanu ženu. Isto tako, iskaz „bilo koji konačan broj je ili paran ili neparan" očigledno je istinit; ipak, *pojam* „bilo koji konačan broj" nije ni paran, ni neparan. Samo su pojedinačni brojevi parni ili neparni; osim njih ne postoji neki drugi entitet *bilo koji broj* koji bi bio paran ili neparan, a čak i ako bi postojao neki, jasno je da on ne bi mogao da bude ni paran ni neparan. Što se tiče *pojma* „bilo koji broj", gotovo svi iskazi koji sadrže *izraz* „bilo koji broj" jesu pogrešni. Ako želimo da govorimo o pojmu, na tu činjenicu moramo ukazati ili kurzivom ili navodnicima. Često se tvrdi da je čovek smrtan, ali ono što je smrtno će umreti, a ipak bismo bili iznenađeni ako bismo u *Tajmsu* naišli *na* sledeći oglas: „Umro, u svojoj rezidenciji Kamelot, Gledston Roud, Gornji Tuting, 18 juna 19—, čovek, najstariji sin Smrti i Greha". *Čovek* u stvari ne umire; tako, ako bi „čovek je smrtan" bio, kao što izgleda da jeste, iskaz koji se odnosi na *čovek*, on bi naprosto bio pogrešan. On se u stvari odnosi na ljude; i još uz to, ne odnosi se na pojam *ljudi* nego na ono što ovaj pojam označava. Celokupna teorija definicije, identiteta, klasa, simbolizma i promenljive razvijena je u teoriji označavanja. To je fundamentalni pojam logike i, uprkos teškoćama, od sasvim je suštinskog značaja da se učini jasnim koliko god je to moguće.

57. Pojam označavanja može da se dobije pomoću jedne vrste logičke geneze iz iskaza subjekat-predikatske forme od kojih izgleda da više ili manje i zavisi. Najprostiji iskazi su oni u kojima se predikat javlja drugačije nego kao termin i gde postoji samo jedan termin čiji je predikat o kojem je reč tvrđen. Takvi iskazi mogu da se nazovu subjekat-predikatskim iskazima. Primeri su: *A* jeste, *A* je jedno, *A* je mudar*. Pored toga, predikatima mogu

---

* Rasel ovde, slično kao i u §48, koristi primer „*Socrates is human*". Stručni redaktori prevoda su ponovo modifikovali Raselov primer koristeći pridev „mudar" čime ni na koji način nije promenjena Raselova poenta iz nastavka teksta (prim. stručnih redaktora prevoda).

da se nazovu klasni pojmovi pošto oni omogućavaju klase, ali videćemo da je nužno da pravimo razliku između reči *predikat* i *klasni pojam*. Iskazi subjekat-predikatskog tipa uvek impliciraju i implicirani su drugim tipom iskaza koji tvrde da neka individua pripada nekoj klasi. Tako su gorenavedeni primeri ekvivalentni sa: *A* je entitet, *A* je jedinica, *A* je mudrac. Ovi novi iskazi nisu identični sa prethodnim, pošto imaju sasvim različitu formu. Pre svega, *je* je sada jedini pojam koji nije upotrebljen kao termin. Mudrac, kao što ćemo videti, nije ni pojam, ni termin, već određena vrsta kombinacije izvesnih termina, naime, onih koji su *mudri*. A relacija Sokrata prema *mudracu* sasvim se razlikuje od njegove relacije prema mudrosti; uistinu, ako je prethodna analiza tačna, „Sokrat je mudar" ne smemo da smatramo sudom, u najobičnijem smislu ove reči, o relaciji između Sokrata i mudrosti, pošto bi to gledište značilo da se *mudar* javlja kao termin u „Sokrat je mudar". Neosporno je, naravno, da je relacija prema mudrosti implicirana u „Sokrat je mudar", naime, relacija izražena sa „Sokrat poseduje mudrost"; a ova relacija, obrnuto, implicira subjekat-predikatski iskaz. Ali, ova dva iskaza mogu jasno da se razlikuju, što je značajno za teoriju klasa koja to i čini. Tako, u slučaju svakog predikata imamo tri tipa iskaza koji jedan drugog impliciraju, naime, „Sokrat je mudar", „Sokrat poseduje mudrost" i „Sokrat je mudrac". Prvi sadrži termin i predikat, drugi dva termina i relaciju (gde je drugi termin identičan sa predikatom prvog iskaza)[1], dok treći sadrži termin, relaciju i ono što ću nazivati disjunkcijom (termin koji ćemo uskoro objasniti)[2]. Klasni pojam se razlikuje, ako se uopšte razlikuje, od predikata, dok

[1] Cf. §49.

[2] Ovde su dva srodna iskaza izražena istim rečima, naime „Sokrat je jedan-mudrac" i „Sokrat je-jedan mudrac". Gore navedene primedbe se primenjuju na prvi od ovih iskaza; ali, ubuduće će, barem ukoliko nije suprotno naznačeno, pomoću crtice ili na neki drugi način biti reči o onom drugom. Prvi izražava identitet Sokrata sa nekom nejasnom individuom, a drugi relaciju između Sokrata i klasnog pojma *mudrac*.

klasa, nasuprot klasnom pojmu, predstavlja sumu ili konjunkciju svih termina koji imaju neki dati predikat. Relacija koja se javlja u drugom tipu iskaza (Sokrat poseduje mudrost) u potpunosti je okarakterisana time što implicira i što je implicirana iskazom sa samo jednim terminom u kojem je drugi termin relacije postao predikat. Klasa je izvesna kombinacija termina; pojam klase je srodan pojmu predikata, a termini čija kombinacija formira klasu određeni su klasnim pojmom. Predikati su, u izvesnom smislu, najprostiji tip pojmova, pošto se javljaju u najprostijem tipu iskaza.

58. U vezi sa svakim predikatom postoji veliki broj blisko povezanih pojmova koje je, ukoliko je to moguće, značajno razlikovati. Polazeći, na primer, od *mudar* imamo mudrac, mudraci, svi mudraci, svaki mudrac, bilo koji mudrac, mudračka vrsta od kojih su svi osim prvog dvostruke prirode, pojam koji označava i označeni objekat; imamo još i, manje analogno, pojmove „jedan čovek" i „neki čovek", koji takođe označavaju objekte[1] različite od njih samih. Ovaj glomazni aparat povezan sa svakim predikatom moramo imati na umu i moramo da uložimo veliki trud kako bismo analizirali svaki od ovih pojmova. Ali, za sada nas samo svojstvo označavanja zanima više nego različiti označavajući pojmovi (*denoting concepts*)[*].

---

[1] Reč *objekat* ću upotrebljavati u širem smislu od reči *termin*, tako da pokriva i jedninu i množinu, kao i nejasne slučajeve poput „jedan čovek". Činjenica da jednoj reči može da se prida šire značenje od značenja *termina* izaziva teške logičke probleme. Cf. §47.

* Kako bi pokrio slučajeve iskaza koji ne sadrže već se samo posredno odnose na entitete, Rasel formuliše teoriju označavajućih pojmova. Rečenice u kojima figuriraju određene ili neodređene deskripcije izražavaju iskaz čiji sastavni deo nije objekat, već pojam koji denotira to jest označava odgovarajući objekat. Važno je imati na umu da je Rasel već u *Principima* uvideo da je označavajući pojam poput „sadašnji kralj Francuske" izraz koji pretenduje da izdvoji neku individuu ali u tome ne uspeva: *contra* Majnongu, „sadašnji kralj Francuske" ne ukazuje na neku nerealnu individuu već ni na kakvu individuu uopšte. Teorija označavajućih pojmova iz *Principa* može se smatrati anticipacijom Raselove klasične teorije deskripcija iz članka „On denoting" (1905) (prim. stručnih redaktora prevoda).

Kombinovanje pojmova kao takvih u cilju formiranja novih pojmova koji su složeniji od njihovih konstituenata predmet je o kojem je u logici mnogo pisano. Ali, kombinovanje termina kao takvih u cilju formiranja onoga što bismo, po analogiji, mogli da nazovemo složenim terminima predmet je kome logičari, stari i novi, nisu posvetili ni najmanje pažnje. Međutim, ovde je reč o predmetu od vitalnog značaja za filozofiju matematike, pošto se priroda broja i promenljive otkriva upravo na ovom mestu. Sledećih šest reči koje se stalno upotrebljavaju u svakodnevnom životu takođe karakterišu i celokupnu matematiku: *svi* (*all*), *svaki* (*every*), *bilo koji* (*any*), *jedan* (*a*), *neki* (*some*), kao i određeni član [*the*, u engleskom jeziku]. Za ispravno rasuđivanje je veoma bitno da ove reči mogu strogo da se razlikuju, ali to je predmet koji obiluje teškoćama, zbog čega su ga logičari oduvek u potpunosti zanemarivali[1].

Pre svega je jasno da izraz koji sadrži jednu od navedenih šest reči uvek nešto označava. Za sadašnju diskusiju biće korisno da razlikujemo klasni pojam od predikata; *mudar* će biti predikat, a *mudrac* klasni pojam, mada je ova razlika čisto verbalna. Specifična karakteristika klasnog pojma na osnovu koje se on razlikuje od termina uopšte sastoji se u tome što je „*x* je *u*“ iskazna funkcija onda i samo onda kada je *u* klasni pojam. Kada *u* nije klasni pojam, ne samo da nemamo lažan iskaz nego nemamo nikakav iskaz uopšte, bilo koju vrednost da dodelimo *x*. Ovo nam omogućava da razlikujemo klasni pojam koji pripada nultoj klasi za koju su svi iskazi gorenavedenog oblika lažni, od termina koji uopšte nije klasni pojam i za koji ni ne postoji iskaz gorenavedenog oblika. Ovo jasno pokazuje da klasni pojam nije termin u iskazu „*x* je *u*“ zato što *x* mora da bude ograničene varijabilnosti kako bi ova

[1] Majnong je načinio nekoliko dobrih primedbi o neodređenom članu u „Abstrahiren und Vergleichen“, *Zeitschrift für Psychologie und Physiologie der Sinnesorgane*, Vol. XXIV, str. 63.

formula ostala iskaz. Sada takođe možemo da tvrdimo da izraz koji nešto označava uvek sadrži klasni pojam kome prethodi jedna od gorenavedenih šest reči ili pak sinonim neke od njih.

59. Pitanje sa kojim se najpre susrećemo u vezi sa označavanjem je ovo: da li postoji jedan jedini način označavanja šest različitih vrsti objekata ili su načini njihovog označavanja različiti? I, u drugom slučaju, da li je označeni objekat isti u svih šest slučajeva ili se objekat razlikuje upravo onako kao i način njegovog označavanja? Da bismo odgovorili na ovo pitanje, biće nužno da prvo objasnimo razlike između šest reči koje smo prethodno naveli. Ovde će isprva biti prikladno da reč *the* ostavimo po strani pošto je ona u drugačijem položaju od ostalih i podložna je nekim ograničenjima kojih su preostale reči pošteđene.

U slučajevima u kojima klasa definisana klasnim pojmom ima samo konačan broj termina, moguće je da sasvim zanemarimo klasni pojam i da ukažemo na različite objekte označene nabrajanjem termina i povežemo ih pomoću *i* ili *ili*, u zavisnosti od slučaja. Ako počnemo razmatranjem takvog slučaja, to će nam pomoći da izdvojimo naš problem, iako nedostatak suptilnosti u jeziku čini teškim da se shvati razlika između objekata na koje se ukazuje rečima istog oblika.

Počnimo razmatranjem slučaja gde postoje samo dva termina, recimo Braun i Džons. Ovi objekti, označeni sa *svi*, *svaki*, *bilo koji*, *jedan* i *neki*[1], sadržani su u sledećih pet iskaza: (1) Braun i Džons su obojica udvarači gospođice Smit; (2) Braun i Džons se obojica udvaraju gospođici Smit; (3) Ako ste sreli Brauna ili Džonsa, sreli ste vatrenog zaljubljenika; (4) Ako je to bio jedan od udvarača gospođice Smit, to je morao da bude ili Braun ili Džons; (5) Gospođica Smit će se udati za Brauna ili Džonsa. Mada su

[1] Nastojim da pravim razliku između *jedan* (*a*) i *neki* (*some*) koja nije u skladu sa jezičkom praksom; čak je i razlika između *svi* (*all*) i *svaki* (*every*) takođe nategnuta u običnoj upotrebi. Obe su nužne da bi se izbeglo perifraziranje.

u ovim iskazima sadržana samo dva oblika reči *Braun i Džons* i *Braun ili Džons*, smatram da je u njima ipak sadržano pet različitih kombinacija. Razmatranje koje sledi će nam omogućiti da istaknemo ove razlike od kojih su neke dosta suptilne. U prvom iskazu reč je o Braunu *i* Džonsu kojih je dvojica, i nije istina da je reč i o jednom od njih uzetim zasebno; međutim, nije reč ni o celini sastavljenoj od Brauna i Džonsa, koja je dva, zato što je celina samo jedna. Ovo predstavlja pravu kombinaciju Brauna i Džonsa i to vrstu kombinacije koja je, kao što ćemo videti u sledećoj glavi, karakteristična za klase. U drugom iskazu, naprotiv, ono što je tvrđeno jeste tačno za Brauna i Džonsa, uzetih ponaosob; ovaj iskaz je ekvivalentan, mada (mislim) ne i identičan, iskazu „Braun se udvara gospođici Smit i Džons se udvara gospođici Smit". Tako, kombinacija navedena sa *i* ovde se razlikuje od one iz prvog slučaja: prvi slučaj se tiče *svih* uzeto kolektivno, dok se drugi tiče *svih* uzeto distributivno, što će reći, *svakog* (*each*) ili *svakog od* (*every one of*) njih. Radi razlikovanja ovih kombinacija, nazovimo prvu *numeričkom* konjunkcijom zato što ona proizvodi broj, a drugu *iskaznom* konjunkcijom zato što je iskaz u kojem se javlja ekvivalentan konjunkciji iskazâ. (Primetimo da je konjunkcija iskaza o kojoj je ovde reč vrsta konjunkcije koja je potpuno različita od svih drugih kombinacija koje razmatramo, zato što je ovde zapravo reč o onome što se naziva logičkim proizvodom. Iskazi se kombinuju *qua* iskazi, a ne *qua* termini).

Treći iskaz predstavlja vrstu konjunkcije koja nam omogućava da definišemo *bilo koji*. Postoji izvesna teškoća u vezi sa ovim pojmom koji je izgleda negde na pola puta između konjunkcije i disjunkcije. On može da se objasni na sledeći način. Neka su *a* i *b* dva različita iskaza od kojih svaki implicira neki treći iskaz *c*. Tada disjunkcija „*a* ili *b*" implicira *c*. Uzmimo sada da su *a* i *b* iskazi koji pridaju isti predikat dvama različitim subjektima; tada postoji kombinacija ova dva subjekta kojima dati predikat može da se pripiše, tako da je rezultujući iskaz ekvivalentan disjunkciji „*a* ili *b*“. Pretpostavimo tako da imamo „ako ste sreli Brauna, sreli ste veoma vatrenog zaljubljenika“ i „ako ste sreli Džonsa, sreli ste veoma vatrenog zaljubljenika“. Otuda zaključujemo „ako ste sreli Brauna ili ako ste sreli Džonsa, sreli ste veoma vatrenog zaljubljenika“, i to smatramo ekvivalentnim sa „ako ste sreli Brauna ili Džonsa, itd“. Kombinacija Brauna i Džonsa na koju je ovde ukazano identična je onoj na koju je ukazano *ma kojim* od njih. Ovo se razlikuje od disjunkcije time što implicira i što je implicirana tvrđenjem koje se tiče *oba*; ali, u nekim komplikovanijim slučajevima, ova uzajamna implikacija izostaje. Način kombinovanja je, u stvari, različit od onog na koji ukazuje *oba*, a isto tako se razlikuje i od oba oblika disjunkcije. Ja ću to zvati *varijabilnom* konjunkcija. Prvi oblik disjunkcije data je u (4): to je oblik koji ću da označim sa *jedan* [*a*] udvarač. U ovom slučaju, mada mora da je to bio Braun ili Džons, nije istina da je morao biti Braun, niti pak da je morao biti Džons. Tako, ovaj iskaz nije ekvivalentan disjunkciji iskazâ „to je morao biti Braun ili je to morao biti Džons“. Ovaj iskaz zapravo ne može da se izrazi ni kao disjunkcija ni kao konjunkcija iskazâ, izuzev u krajnje zaobilaznom obliku: „ako to nije bio Braun, bio je Džons, i ako to nije bio Džons, bio je Braun“, a što je oblik koji ubrzo postaje nepodnošljiv kada je broj termina veći od dva, a teorijski neprihvatljiv kada je broj termina beskonačan. Tako, ovaj oblik disjunkcije označava *varijabilni* termin, što znači da koji god od neka dva termina da smo fiksirali, ova disjunkcija ne označava taj termin, ali ipak označava jedan ili drugi od njih. Ovaj oblik disjunkcije ću zato da nazovem *varijabilna* disjunkcija. Na kraju, drugi oblik disjunkcije dat je u (5). Nju ću da nazovem *konstantna* disjunkcija pošto je tu ili označen Braun ili je označen Džons, a da nije odlučeno o alternativi. Drugim rečima, naš iskaz je tada ekvivalentan disjunkciji iskaza, naime, „gospođica Smit će da se uda za Brauna ili će da se uda za Džonsa“. Od njih dvojice, ona će da se uda za *nekog* od njih dvojice, a disjunkcija označava nekog određenog od njih, mada može da označava ma kojeg. Stoga je svih pet kombinacija različito.

Treba naglasiti da ove kombinacije ne daju ni termine ni pojmove već strogo i samo kombinacije termina. Iz prve proizlaze mnogi termini, dok iz druge proizlazi nešto sasvim posebno što nije ni jedno ni mnogo. Ove kombinacije su kombinacije termina ostvarene bez upotrebe relacija. Svakoj od njih odgovara, barem utoliko što kombinovani termini formiraju klasu, jedan savršeno određen pojam koji *označava* različite kombinacije termina koji su kombinovani na tačno određen način. Da bismo to objasnili, ponovimo naše distinkcije u slučaju gde kombinovani termini nisu nabrojani kao gore već su definisani kao termini izvesne klase.

60. Kad je dat neki klasni pojam *a*, moramo da smatramo da su različiti termini koji pripadaju klasi takođe dati. To će reći, bilo koji termin da je predložen, možemo da odlučimo o tome da li on pripada toj klasi ili ne. Na ovaj način jedna kolekcija termina može da nam bude data drugačije nego nabrajanjem. Da li neka kolekcija termina može da nam bude data drugačije nego nabrajanjem ili klasnim pojmom jeste pitanje koje za sada ostavljam bez odgovora. Ali, mogućnost određenja skupa termina nekim klasnim pojmom od najvećeg je značaja zato što nam to, kao što ćemo videti u Petom delu, omogućava da se bavimo beskonačnim kolekcijama. Za sada želim da ispitam smisao izraza tipa *svi a*-ovi, *svako a*, *bilo koje a*, *jedno a* i *neko a*. Pre svega, *svi a*-ovi označava numeričku konjunkciju; ona je definisana čim je *a* dato. Pojam *svi a*-ovi je savršeno određen jedinstven pojam koji označava termine od *a* uzete sve zajedno. Ovim terminima, tako uzetim, odgovara jedan broj koji, ako tako želimo, možemo da smatramo svojstvom klasnog pojma, pošto je određen za svaki dati klasni pojam. *Svako a*, nasuprot tome, mada takođe označava sve *a*-ove, označava ih na različit način, to jest ponaosob a ne kolektivno. *Bilo koje a* označava samo jedno *a* ali je potpuno irelevantno koje, a ono što smo rekli biće podjednako istinito ma koje ono bilo. Štaviše, *bilo koje a* označava varijabilno *a*, što znači da bilo koje određeno *a* da razmatramo, sasvim je izvesno da ga *bilo koje a* ne označava, a ipak će o tom jednom *a*, bilo koji iskaz biti istinit koji je istinit o *bilo kojem a*. *Jedno a* (*an a*) označava varijabilnu disjunkciju, što znači da iskaz koji je istinit za *jedno a* može da bude lažan u pogledu svakog pojedinačnog *a* te tako nije svodiv na disjunkciju iskaza. Na primer, neka tačka leži između bilo koje tačke i bilo koje druge tačke; ali, ne bi bilo istinito za bilo koju pojedinačnu tačku da leži između bilo koje tačke i bilo koje druge tačke, pošto bi bilo mnogo parova tačaka između kojih ona ne leži. Ovo nas naposletku dovodi do *neko a*, konstantne disjunkcije. Ona označava samo jedan termin klase *a*, ali taj termin može da bude bilo koji termin te klase. Tako bi „neki trenutak ne sledi za bilo kojim trenutkom" značilo da postoji prvi trenutak u vremenu, dok „jedan trenutak prethodi bilo kom trenutku" znači tačno suprotno, naime, da svaki trenutak ima prethodnika.

61. Na primeru klase *a* koja ima konačan broj termina – recimo a_1, a_2, a_3, …, a_n, možemo da ilustrujemo ove različite pojmove na sledeći način:

(1) *Svi a*-ovi označava a_1 i a_2 i ... i a_n.

(2) *Svako a* označava a_1 i označava a_2 i ... i označava a_n.

(3) *Bilo koje a* označava a_1 ili a_2 ili ... ili a_n, gde *ili* znači da je irelevantno koje *a* smo uzimali.

(4) *Jedno a* označava a_1 ili a_2 ili ... ili a_n, gde *ili* znači da nijedno pojedinačno *a* ne sme da se uzme, baš kao što ni kod *svi a*-ovi ne smemo da uzmemo bilo koje pojedinačno *a*.

(5) *Neko a* označava a_1 ili označava a_2 ili ... ili označava a_n, gde nije irelevantno koje *a* smo uzeli, naprotiv, neko pojedinačno *a* mora da se uzme.

Pošto su priroda i svojstva različitih načina kombinovanja termina od vitalnog značaja u principima matematike, moglo bi da bude korisno da ovde ilustrujemo njihova svojstva pomoću sledećih značajnih primera.

(α) Neka je *a* klasa, a *b* klasa klasâ. Različite kombinacije *bilo koje*, *jedno* i *neko* daju ukupno šest mogućih relacija za *a* i *b*. *Sve* i *svako* ne uvode u ovom slučaju ništa novo. Ovih šest slučajeva su:

(1) Bilo koje *a* pripada bilo kojoj klasi koja pripada *b* ili, drugačije rečeno, klasa *a* je u celosti sadržana u zajedničkom delu ili logičkom proizvodu različitih klasa koje pripadaju *b*.

(2) Bilo koje *a* pripada *b*; to će reći da je klasa *a* sadržana u bilo kojoj klasi koja sadrži sve *b*-ove ili da je sadržana u logičkom zbiru svih *b*-ova.

(3) Bilo koje *a* pripada nekom *b* znači da postoji klasa koja pripada *b* u kojoj je sadržana klasa *a*. Razlika između ovog slučaja i prethodnog nastaje zato što ovde postoji jedno *b* kome pripada svako *a*, dok je u prethodnom slučaju rečeno samo to da svako *a* pripada *b*, dok različiti *a*-ovi mogu da pripadaju različitim *b*-ovima.

(4) Jedno *a* pripada bilo kom *b* znači da, bilo koje *b* da uzmemo, ono ima zajednički deo sa *a*.

(5) Jedno *a* pripada *b* znači da postoji *b* koje ima zajednički deo sa *a*. Ovo je ekvivalentno sa „neko (ili jedno) *a* pripada nekom *b*“.

(6) Neko *a* pripada bilo kom *b* znači da postoji *a* koje pripada zajedničkom delu svih *b*-ova ili da *a* i svi *b*-ovi imaju zajednički deo.

To su svi slučajevi koji ovde mogu da nastanu.

(β) Upoređivanje prethodnih primera sa onima koji slede je poučno zato što ono rasvetljava opštost tipa koji se ovde razmatra. Neka su *a* i *b* dva niza realnih brojeva, tada dobijamo sledećih šest precizno analognih slučajeva.

(1) Bilo koje *a* je manje od bilo kog *b* ili niz *a* je sadržan među brojevima manjim od svakog *b*.

(2) Bilo koje *a* je manje od nekog *b* ili, ma koje *a* uzeli, postoji *b* koje je od njega veće, ili niz *a* je sadržan u brojevima manjim

od (varijabilnog) termina niza *b*. Ne sledi da je neki termin niza *b* veći od svih *a*-ova.

(3) Bilo koje *a* je manje od nekog *b* ili postoji termin od *b* koji je veći od svih *a*-ova. Ovaj slučaj ne sme da se pomeša sa (2).

(4) [Neko] jedno *a* je manje od bilo kojeg *b*, to jest ma koje *b* uzeli, postoji *a* koje je manje od njega.

(5) [Neko] jedno *a* je manje od [nekog] jednog *b* znači da je moguće pronaći [neko] jedno *a* i [neko] jedno *b* tako da je to *a* manje od tog *b.* Ovo je naprosto jednako negaciji da je bilo koje *a* veće od bilo kojeg *b*.

(6) Neko *a* je manje od bilo kog *b* znači da postoji [neko] jedno *a* koje je manje od svih *b*-ova. Ovo nije implicirano u (4) gde je *a* bilo varijabilno dok je ovde konstantno.

U ovom slučaju sâma matematika je primorana da razlikuje varijabilne disjunkcije od konstantnih disjunkcija. Ali, u drugim slučajevima u kojima nije bilo takvog zamajca u matematici ova razlika je zanemarena, a matematičari, posve prirodno, nisu ispitivali logičku prirodu disjunktivnih pojmova koje su upotrebljavali.

(γ) Daću jedan drugi primer koji nam obezbeđuje razliku između *bilo koji* i *svaki* koja nije bila relevantna u prethodnim slučajevima. Neka su *a* i *b* dve klase klasâ; pomoću različitih kombinacija njihovih termina dobijamo dvadeset različitih relacija među njima. Biće korisno da upotrebimo sledeće tehničke termine: ako je *a* jedna klasa klasâ, njen logički zbir obuhvata sve termine koji pripadaju bilo kojem *a*, što znači sve termine, tako da postoji [neko] jedno *a* kojem oni pripadaju, dok se njen logički proizvod sastoji od svih termina koji pripadaju svakom *a*, što znači zajedničkom delu svih *a*-ova. Onda imamo sledeće slučajeve:

(1) Bilo koji termin bilo kojeg *a* pripada svakom *b*, to jest logički zbir od *a* je sadržan u logičkom proizvodu od *b*.

(2) Bilo koji temin bilo kojeg *a* pripada [nekom] jednom *b*, to jest logički zbir od *a* je sadržan u logičkom zbiru od *b*.

(3) Bilo koji termin bilo kojeg *a* pripada nekom *b*, to jest postoji [neko] jedno *b* koje sadrži logički zbir od *a*.

(4) Bilo koji termin nekog (ili [nekog] jednog) *a* pripada svakom *b*, to jest postoji [neko] jedno *a* koje je sadržano u proizvodu od *b*.

(5) Bilo koji termin nekog (ili [nekog] jednog) *a* pripada [nekom] jednom *b*, to jest postoji [neko] jedno *a* koje je sadržano u zbiru od *b*.

(6) Bilo koji termin nekog (ili [nekog] jednog) *a* pripada nekom *b*, to jest postoji [neko] jedno *b* koje sadrži jednu klasu koja pripada *a*.

(7) Termin bilo kojeg *a* pripada bilo kojem *b*, to jest bilo koja klasa od *a* i bilo koja klasa od *b* imaju zajednički deo.

(8) Termin bilo kojeg *a* pripada [nekom] jednom *b*, to jest bilo koja klasa od *a* ima zajednički deo sa logičkim zbirom od *b*.

(9) Termin bilo kojeg *a* pripada nekom *b*, to jest postoji [neko] jedno *b* sa kojim bilo koje *a* ima zajednički deo.

(10) Termin [nekog] jednog *a* pripada svakom *b*, to jest logički zbir od *a* i logički proizvod od *b* imaju zajednički deo.

(11) Termin [nekog] jednog *a* pripada bilo kojem *b*, to jest ako je dato bilo koje *b* možemo pronaći [neko] jedno *a* sa kojim ono ima zajednički deo.

(12) Termin [nekog] jednog *a* pripada [nekom] jednom *b*, to jest logički zbirovi od *a* i od *b* imaju zajednički deo.

(13) Bilo koji termin svakog *a* pripada svakom *b*, to jest logički proizvod od *a* je sadržan u logičkom proizvodu od *b*.

(14) Bilo koji termin svakog *a* pripada [nekom] jednom *b*, to jest logički proizvod od *a* je sadržan u logičkom zbiru od *b*.

(15) Bilo koji termin svakog *a* pripada nekom *b*, to jest postoji termin od *b* u kome je sadržan logički proizvod od *a*.

(16) Jedan (ili neki) termin svakog *a* pripada svakom *b*, to jest logički proizvodi od *a* i od *b* imaju zajednički deo.

(17) Jedan (ili neki) termin svakog *a* pripada [nekom] jednom *b*, to jest logički proizvod od *a* i logički zbir od *b* imaju zajednički deo.

(18) Neki termin bilo kojeg *a* pripada svakom *b*, to jest bilo koje *a* ima zajednički deo sa logičkim proizvodom od *b*.

(19) Termin nekog *a* pripada bilo kojem *b*, to jest postoji zbir termina od *a* sa kojim bilo koje *b* ima zajednički deo.

(20) Termin svakog *a* pripada bilo kojem *b*, to jest bilo koje b ima zajednički deo sa logičkim proizvodom od *a*.

Ovi primeri pokazuju da, mada često može da se desi da postoji uzajamna implikacija (koja nije uvek izražena) odgovarajućih iskaza koji se odnose na *neki* (*some*) i [neki] *jedan* (*a*) ili na *bilo koji* i *svaki*, takva implikacija u nekim drugim slučajevima ipak ne postoji. Tako se pet pojmova koje smo ispitali u ovoj glavi istinski razlikuje, a njihovo mešanje može da vodi određenim greškama.

62. Iz prethodnog ispitivanja proizlazi da je izvesno, postojali različiti načini označavanja ili ne, da su objekti označeni sa *svi ljudi*, *svaki čovek*, itd. različiti. Prema tome, izgleda legitimno reći da sva razlika počiva na objektima a da je sâmo označavanje isto u svim slučajevima. Međutim, postoje mnogi teški problemi u vezi sa tim, a posebno u pogledu prirode označenih objekata. Izgleda da je *svi ljudi*, što ću poistovetiti sa klasom ljudi, nedvosmislen objekt iako je gramatički u množini. Ali, u drugim slučajevima daleko od toga da je pitanje tako jednostavno: možemo se zapitati da li je dvosmislen objekat nedvosmisleno označen ili je određeni objekat dvosmisleno označen. Razmotrimo ponovo iskaz „sreo sam čoveka“. Sasvim je izvesno, što je i implicirano iskazom, da je ono što sam sreo bio sasvim određeni čovek: u tehničkom jeziku koji smo ovde usvojili, iskaz se izražava sa „sreo sam nekog čoveka“. Ali, realan čovek kojeg sam sreo ne predstavlja deo iskaza o kojem je reč i nije posebno označen sa *neki čovek*. Tako, konkretan događaj koji se desio nije tvrđen u iskazu. Ono što je tvrđeno jeste samo to da se desio jedan događaj iz klase konkretnih događaja. Moje tvrđenje obuhvata celu ljudsku rasu: da bilo koji čovek koji je ikada postojao ili koji će ikada da postoji nije postojao, odnosno da neće da postoji, sadržaj mog iskaza bio bi različit. Ili, da izrazim isto u intenzionalnijem jeziku: ako zamenim *čovek* bilo kojim drugim klasnim pojmom primenljivim na individuu koju sam imao sreću da sretnem, moj iskaz će biti promenjen iako je individua o kojoj je reč isto toliko označena koliko i ranije. Ono što ovo dokazuje jeste da *neki čovek* ne sme da se posmatra kao da aktualno označava Smita i da aktualno označava Brauna, itd: celokupan sled svih ljudskih bića je relevantan za svaki iskaz u kojem se javlja *neki čovek*, a ono što je označeno u suštini nije svaki pojedinačni čovek već neka vrsta kombinacije svih ljudi. Ovo je očiglednije u slučaju *svaki*, *bilo koji* i [neki] *jedan*. Onda postoji neko određeno nešto, različito u svakom od pet slučajeva, koje u nekom smislu mora da bude objekat, ali koje je okarakterisano kao skup termina koji su kombinovani na izvestan način, a što je pak nešto što je označeno sa *svi ljudi*, *svaki čovek*, *bilo koji čovek*, *jedan čovek* ili *neki čovek*, i upravo to je taj krajnje paradoksalan objekat na koji se odnose iskazi o kojima je reč u kojima je odgovarajući pojam upotrebljen za označavanje.

63. Ostaje da se ispita određeni član *the*. Peano je istakao njegov značaj sa simboličkog stanovišta, što je u velikoj meri koristilo njegovom računu, ali ovde moramo da razmotrimo ovaj pojam sa filozofskog stanovišta. Upotreba pojma identiteta i teorije definicije zavisi od ovog pojma te je, dakle, od vrlo velikog filozofskog značaja.

Reč *the* u jednini ispravno se upotrebljava samo u odnosu prema klasnom pojmu koji ima samo jednu instancu. Mi govorimo o kralju (*the king*), o premijeru (*the prime minister*) itd. (imajući u vidu *sadašnje vreme*); u takvim slučajevima postoji metod označavanja jednog pojedinačnog određenog termina pomoću pojma koji nam nije dat nijednom od naših pet drugih reči. Zahvaljujući ovom pojmu u matematici mogu da se definišu termini koji nisu pojmovi – mogućnost koja ilustruje razliku između matematičke definicije i filozofske definicije. Svaki termin je samo instanca *nekog* klasnog pojma, te tako svaki teorijski može da se definiše pod uslovom da nismo prihvatili sistem u kome je termin o kojem je reč jedan od naših nedefinljivih termina. Čudan je paradoks koji zbunjuje duh simboličkih logičara da definicije teorijski nisu ništa drugo do izrazi simboličkih skraćenja i da su irelevantne za rasuđivanje i uvrštene u vokabular samo radi praktične pogodnosti, a ipak, prilikom razvijanja ovog predmeta, one uvek zahtevaju veliki napor mišljenja i često otelovljuju neke od najlepših rezultata analize. Izgleda da je ova činjenica objašnjena teorijom označavanja. Jedan objekat može da se predstavi u duhu a da ne znamo bilo koji pojam kojeg je taj objekat tačno određena (*the*) instanca, a otkrivanje takvog pojma nije samo puko poboljšanje notacije. Razlog zašto izgleda da je ovo slučaj jeste taj što čim je definicija iznađena, u rasuđivanju postaje sasvim izlišno sećanje na sam objekat koji je definisan pošto su samo pojmovi relevantni za naše dedukcije. U trenutku otkrivanja, definicija se čini *istinitom* pošto je objekat koji treba definisati već bio u našim mislima; ali, kao deo našeg rasuđivanja ona nije istinita već ima puko simbolički značaj, pošto ono što našem rasuđivanju treba nije bavljenje *tim* objektom nego samo objektom koji je označen definicijom.

U većini stvarnih definicija matematike ono što je definisano jeste klasa entiteta, te se određeni član *the* ne javlja eksplicitno. Ali, čak i u tom slučaju, ono što je stvarno definisano jeste tačno određena klasa (*the class*) koja zadovoljava izvesne uslove; jer, kao što ćemo videti u sledećoj glavi, klasa je uvek termin ili konjunkcija termina, a nikada pojam. Tako je određeni član *the* uvek relevantan za definicije i možemo primetiti generalno da adekvatnost pojmova za bavljenje stvarima u potpunosti zavisi od nedvosmislenog označavanja jednog termina koje nam taj pojam pruža.

64. Veza između označavanja i prirode identiteta je značajna i po mom mišljenju omogućava da se razreše prilično ozbiljni problemi. Da li je identitet relacija ili ne, i čak, da li takav pojam uopšte postoji, jeste pitanje na koje nije lako odgovoriti. Jer, može se prigovoriti da identitet ne može da bude relacija pošto, kada se identitet tvrdi, imamo samo jedan termin, dok relacija zahteva barem dva termina. I zaista, onaj koji prigovara može i dalje da istrajava, identitet naprosto ne može da bude baš ništa: dva termina očigledno nisu identična, a samo jedan termin to ne može da bude, jer sa čim bi onda bio identičan? Uprkos tome, identitet mora biti nešto. Mogli bismo da pokušamo da uklonimo identitet termina prema relaciji i da kažemo da su dva termina identična u nekom pogledu kada stoje u datoj relaciji sa nekim datim terminom. Ali, onda ćemo morati iznova da tvrdimo ili da postoji strogi identitet između dva slučaja date relacije ili pak da su ta dva slučaja identična u smislu da stoje u datoj relaciji sa nekim datim terminom; ali, ovo poslednje gledište vodi beskonačnom regresu nelegitimne vrste. Tako, identitet mora da se prihvati, a teškoća u pogledu dva termina relacije mora da se ukloni jasnim poricanjem da su dva različita termina nužna. Uvek moraju da postoje referencija i relat, ali oni ne moraju da budu različiti, a tamo gde je identitet tvrđen oni i nisu različiti[1].

Ali, postavlja se pitanje: za šta bi moglo da bude korisno tvrditi identitet? Teorija označavanja omogućava da se na ovo pitanje odgovori. Ako kažemo: „Edvard VII je kralj (*the king*)“, mi tvrdimo jedan identitet; razlog iz kojeg je vredno tvrditi ovako nešto jeste taj što se na jednoj strani javlja aktualni termin, dok na drugoj strani označavajući pojam zauzima njegovo mesto. (Ostavljam po

---

[1] O relacijama termina prema njima samima cf. Glavu XI, §95.

strani, za diskusiju, da li Edvardi čine klasu, i da li Edvard VII čini klasu koja ima samo jedan termin. Edvard VII je praktično, ali ne i formalno, vlastito ime). Često se dešava da se javljaju dva označavajuća pojma, a da sam termin nije pomenut, kao u iskazu „aktualni papa je poslednji preživeli iz njegove generacije“. Kada je jedan termin dat, tvrđenje njegovog identiteta sa njim samim, iako je istinito, sasvim je isprazno i nikada se ne čini izvan knjiga iz logike, ali kada se uvedu označavajući pojmovi, odmah se vidi da tvrđenje identiteta nije lišeno smisla. U ovom slučaju, naravno, postoji relacija, mada ne i tvrđena, označavajućeg pojma prema terminu ili dva označavajuća pojma jednog prema drugom. Ali *jeste* koje se javlja u takvim iskazima sâmo ne izražava ovu drugu relaciju veći tvrdi čisti identitet[1].

65. Rezimirajmo. Kada se klasni pojam kome prethode jedna od šest reči *svi*, *svaki*, *bilo koji, jedan*, *neki*, *the* javlja u iskazu, taj iskaz se po pravilu ne odnosi *na* pojam formiran od dve reči nego na objekat koji se od njega sasvim razlikuje i uopšte uzev, ni na koji pojam uopšte, nego na termin ili na kompleks termina. Ovo ilustruje činjenica da su iskazi u kojima se javljaju takvi pojmovi po pravilu lažni, što se tiče samih tih pojmova. Istovremeno je moguće razmatrati i izricati iskaze koji se odnose na same pojmove, ali iskazi koji se formulišu upotrebom ovih pojmova onda nisu prirodni. „Svaki broj je paran ili neparan“ savršeno je prirodan iskaz, dok je „*bilo koji broj* je varijabilna konjunkcija“ iskaz koji

---

[1] Reč *jeste* je strahovito dvosmislena i neophodna je velika pažnja da se različita značenja ne pobrkaju. Postoji (1) smisao u kojem se tvrdi Biće, kao u „*A* jeste“; (2) smisao identiteta; (3) smisao predikacije kao u „*A* je mudar“; (4) smisao u „*A* je čovek“ (cf. §57, fusnota) koji je vrlo sličan identitetu. Postoje i drugi manje uobičajeni slučajevi kao „biti dobro je biti srećan“, gde se misli na relaciju tvrđenja koja, u stvari, tamo gde postoji, omogućava formalnu implikaciju. Nema sumnje da postoje i drugi slučajevi koji mi trenutno ne padaju na pamet. O višeznačnosti *jeste*, cf. De Morgan, *Formal Logic*, str. 49–50.

se javlja samo u logičkoj raspravi. U takvim slučajevima kažemo da pojam o kojem je reč *označava*. Odlučili smo da je označavanje jedna savršeno određena relacija, ista u svih šest slučajeva, i da je priroda označenog objekta i označavajućeg pojma ono na osnovu čega se ti slučajevi razlikuju. Dugo smo ispitivali prirodu označenih objekata i njihove razlike u pet slučajeva, gde su ti objekti kombinacije termina. U jednoj potpunoj raspravi bilo bi nužno da isto tako ispitamo i označavajuće pojmove: pravi smisao ovih pojmova, nasuprot prirodi objekata koje oni označavaju, ovde nismo ispitivali. Ali, ne znam da li bi trebalo da išta više kažem o ovoj temi. Na kraju smo ispitali određeni član *the* i pokazali smo da je ovaj pojam od suštinskog značaja za ono što matematičari nazivaju definicijom, kao i za mogućnost jedinstvenog određivanja termina pomoću pojmova; aktualna upotreba identiteta, mada ne i njegovog smisla, zavisila je od ovog načina označavanja pojedinačnog termina. Sada možemo da pređemo na ispitivanje klasa, nastavljajući pritom razvijanje tema povezanih sa pridevima.

Glava VI

KLASE

66. Jasno predočiti šta se podrazumeva pod *klasom* i razlikovati ovaj pojam od svih pojmova sa kojima je povezan, jeste jedan od najznačajnijih i najtežih problema u filozofiji matematike. Pored činjenice da je *klasa* sasvim fundamentalan pojam, to je predmet koji zahteva najveću moguću pažnju i najveću moguću suptilnost, zbog protivrečnosti koju ćemo da ispitamo u Glavi X. Stoga moram da zamolim čitaoca da ne smatra čistom pedanterijom izvestan broj dosta suptilnih distinkcija na koje će naići u nastavku.

U knjigama iz logike je uobičajeno razlikovanje dva stanovišta, onog koje je zasnovano na ekstenziji i drugog koje je zasnovano na intenziji. Filozofi su obično ovo drugo uzimali za fundamentalnije, dok se za matematiku smatralo da se specifično bavi onim prvim. Kutira, u njegovom sjajnom delu o Lajbnicu, otvoreno tvrdi da simbolička logika može da se izgradi i samo sa stanovišta ekstenzije[1]; a ako bi stvarno postojala samo ova dva stanovišta, njegovo tvrđenje bilo bi opravdano. Ali, zapravo, postoje posredna stanovišta između stanovišta čiste ekstenzije i čiste intenzije, a to su one oblasti u kojima boravi simbolička logika. Bitno je da su

[1] *La Logique de Leibniz*, Paris, 1901, str. 387.

klase kojima se ovde bavimo sastavljene od termina, a ne ni od predikata ni od pojmova, zato što klasa mora da bude određena onda kada su njeni termini dati, ali, uopšte uzev, biće mnogo predikata koji su povezani sa datim terminima, ali ne i sa ostalim. Naravno, ne možemo pokušati da intenzionalno definišemo klasu kao klasu predikata povezanih sa datim, ali ne i sa drugim terminima, zato što bi takva definicija bila cirkularna; tako je u izvesnoj meri ekstenzionalno stanovište neizbežno. Sa druge strane, ako prihvatimo čisto ekstenzionalno stanovište, naša klasa je definisana nabrajanjem termina, a jedan takav metod nam ne omogućava da se bavimo beskonačnim klasama kojima se simbolička logika bavi. Tako naše klase generalno moraju da se smatraju objektima koji su označeni pojmovima, a u toj meri je intenzionalno stanovište suštinsko. Iz tog razloga je i teorija označavanja takođe od velikog značaja. U ovoj glavi treba da odredimo precizan stepen u kojem ekstenzija i intenzija ulaze u definiciju i upotrebu klasa, te molim čitaoca da u toku celog ovog ispitivanja ima u vidu da sve to mora da bude primenljivo kako na konačne, tako i na beskonačne klase.

67. Kada je neki objekat nedvosmisleno označen pojmom, govoriću o pojmu kao o pojmu (ili, ponekad nešto slobodnije, kao o *tačno određenom* pojmu) objekta o kojem je reč. Tako će biti nužno da razlikujemo pojam izvesne klase od klasnog pojma. Nama će da odgovara da pod *čovek* podrazumevamo klasni pojam, ali *čovek*, onako kako se obično upotrebljava, zapravo ne označava ništa. Nasuprot tome, *ljudi* i *svi ljudi* (što ću smatrati sinonimima) označavaju nešto, i tvrdiću da je ono što ovi izrazi označavaju klasa sastavljena od svih ljudi. Tako, *čovek* je klasni pojam, *ljudi* (pojam) jeste pojam jedne određene klase, a ljudi (kao objekat označen pojmom *ljudi*) predstavljaju određenu klasu. Već na prvi pogled je nesumnjivo zbunjujuće koristiti *klasni pojam* i *pojam određene klase* u različitom smislu ali, ukoliko su ovakve razlike nužne, izgleda da izvesna nategnutost jezika ne može da se izbegne. Izraženo terminologijom iz prethodne glave, možemo reći da je klasa numerička konjunkcija termina. To je teza koju ću dalje da razvijam.

68. U Glavi II smo razmatrali klase kao izvedene iz tvrđenja, to jest, kao sve entitete koji zadovoljavaju neko tvrđenje, ali čija je forma ostala sasvim neodređena. Kritičku analizu ovog gledišta ću obaviti u sledećoj glavi; za sada se možemo ograničiti na klase ukoliko su izvedene iz predikata, ostavljajući otvorenim pitanje da li je svako tvrđenje ekvivalentno nekom predikatu. Onda možemo da zamislimo neku vrstu geneze klasa, kroz sukcesivne korake, označene tipičnim iskazima „Sokrat je mudar“, „Sokrat poseduje mudrost“, „Sokrat je mudrac“, „Sokrat je jedan od mudraca“. Od ovih iskaza, samo se za poslednji može reći da sadrži klasu kao konstituent; ali, svaki subjekat-predikatski iskaz rađa i druga tri ekvivalentna iskaza, te tako svaki predikat (pod uslovom da ponekad može stvarno da se predicira) generiše klasu. Ovo predstavlja genezu klase sa intenzionalnog stanovišta.

Sa druge strane, kada matematičari govore o onome što nazivaju množinom, agregatom, *Menge*, *ensemble*, ili pak nekim drugim ekvivalentnim imenom, uobičajeno se smatra, a naročito ako je u pitanju konačan broj termina, da je objekat o kojem je reč (a koji je u stvari klasa) definisan nabrajanjem njegovih termina, iako se možda sastoji od samo jednog termina koji *je* u ovom slučaju klasa. Ovde nisu relevantni predikati i označavanje već termini povezani sa rečju *i* u smislu u kojem ova reč predstavlja *numeričku* konjunkciju. Tako su Braun i Džons jedna klasa, ali i sam Braun jeste klasa. Takva je ekstenzionalna geneza klase.

69. Najbolja postojeća formalna obrada klase je Peanova[1]. Ali, u njegovim razmatranjima previđa se izvestan broj distinkcija od

[1] Ne zanemarujući Fregeovu, koju ćemo da razmotrimo u Apendiksu.

velikog filozofskog značaja. Peano, verujem sasvim nesvesno, poistovećuje klasu i klasni pojam; tako je relacija individue prema klasi, po njemu, izražena pomoću *je a*. Za njega je „2 je broj“ iskaz u kome navedeni termin pripada klasi *broj*. Međutim, on time poistovećuje jednakost klasa, koja se sastoji u tome da one imaju iste termine, sa identitetom – postupak koji je sasvim nelegitiman kada se klasa posmatra kao klasni pojam. Da bismo videli da *čovek* i *dvonožac bez perja* nisu identični, apsolutno nije nužno da uzmemo kokoš i da lišimo jadnu pticu njenog perja. Ili, da uzmemo manje složen primer, jasno je da *paran prost broj* nije identično sa *ceo broj neposredno veći od 1*. Tako, kada poistovetimo klasu i klasni pojam, moramo da prihvatimo da dve klase mogu da budu jednake a da ne budu identične. Jasno je, međutim, da kada su dva klasna pojma jednaka, tu je onda prisutan neki identitet, zato što kažemo da oni imaju *iste* termine. Tako, postoji neki objekat koji je zasigurno identičan onda kada su dva klasna pojma jednaka, a izgleda da je i pravilnije da taj objekt nazovemo klasom. Zanemarujući očerupanu kokoš, svako će misliti da je klasa dvonožaca bez perja *ista* kao i klasa ljudi i da je klasa prostih parnih brojeva *ista* kao i klasa celih parnih brojeva neposredno većih od 1. Tako ne smemo da poistovetimo klasu sa klasnim pojmom ili da smatramo da „Sokrat je čovek“ izražava relaciju individue prema klasi čiji je član. Ovo ima dve posledice (koje ću za trenutak da preciziram) koje ometaju filozofsko prihvatanje izvesnih aspekata Peanovog formalizma. Prva posledica jeste ta da ne postoji nešto kao što je nulta klasa iako postoje nulti pojmovi klase. Druga posledica jeste ta da klasa koja ima samo jedan termin, nasuprot Peanu, mora da se poistoveti sa tim terminom. Međutim, ovim ne preporučujem izmenu njegove notacije i načina postupanja u pogledu obe ove posledice, već ih pre vidim kao potvrdu da simbolička logika, što se tiče notacije, mora da se bavi klasnim pojmovima pre nego klasama.

70. Kao što smo videli, klasa nije ni predikat ni klasni pojam, zato što različiti predikati i različiti klasni pojmovi mogu da odgovaraju jednoj istoj klasi. Klasa je, barem u jednom smislu, različita od celine koja je sastavljena od njenih termina, zato što je ta celina suštinski uvek jedno, dok je klasa, onda kada ima mnogo termina – što ćemo videti kasnije – upravo objekat one vrste o kojem *mnogo* mora da se tvrdi. Razlika između klase kao mnogo i klase kao celine često se pravi u jeziku: prostor i tačke, vreme i trenuci, armija i vojnici, mornarica i mornari, vlada i ministri, sve to ilustruje ovu razliku. Pojam celine u smislu čistog agregata, što je smisao koji je ovde relevantan, nije, kao što ćemo videti, uvek primenljiv u slučajevima u kojima se primenjuje pojam klase kao mnogo (vidi Glavu X). U takvim slučajevima, čak i kada za termine može da se kaže da pripadaju klasi, sama klasa ne mora da se posmatrao kao pojedinačni logički subjekat[1]. Ali, ovi slučajevi ne nastaju nikada kada klasa može da se generiše predikatom. Tako za sada možemo da isključimo ovu komplikaciju. U klasi kao mnogo sadržani termini poseduju izvesnu vrstu jedinstva, ali ono je manje nego što to zahteva celina. Oni u stvari imaju upravo onoliko jedinstva koliko je dovoljno da bi sačinjavali mnogo, ali ne i dovoljno kako bi ih sprečilo da ostanu mnogo. Dalji razlog za razlikovanje celina od klasa kao mnogo sastoji se u tome što klasa kao jedno može da bude jedan od termina same sebe kao mnogo – kao u „klase su jedno među klasama“ (čiji je ekstenzionalni ekvivalent „klasa je klasni pojam“) – dok složena celina nikada ne može da bude jedan od sopstvenih konstituenata.

71. *Klasa* može da se definiše ili ekstenzionalno ili intenzionalno. To znači da možemo da definišemo vrstu objekta koji je klasa ili vrstu pojma koji označava klasu: to je pravi smisao suprotnosti

---

[1] Mnoštvo termina nije logički subjekat onda kada se jedan broj tih termina tvrdi: takvi iskazi nemaju jedan subjekat već mnogo subjekata. Vidi kraj §74.

između ekstenzije i intenzije u ovom slučaju. Ali, iako opšti pojam može da se definiše na ovaj dvostruki način, pojedinačne klase, izuzev onda kada su konačne, mogu da se definišu samo intenzionalno, to jest kao objekti označeni takvim i takvim pojmovima. Međutim, verujem da je tu reč o razlici koja je čisto psihološka: logički, ekstenzionalna definicija izgleda podjednako primenljivo i na beskonačne klase, ali praktično, ako bismo to pokušali, smrt bi prekinula naš napor dostojan hvale pre nego što bismo dosegnuli zacrtani cilj. Dakle, izgleda da su, logički posmatrano, ekstenzija i intenzija istog nivoa. Počeću sa ekstenzionalnim gledištem.

Kada se klasa posmatra kao definisana nabrajanjem njenih termina, prirodnije je nazvati je *kolekcijom*. Ovo ime ću za sada da prihvatim ukoliko to ne prejudicira odgovor na pitanje da li su njime označeni objekti zaista klase ili nisu. Pod kolekcijom podrazumevam ono što izražava „*A* i *B*“ ili „*A* i *B* i *C*“ ili bilo koje drugo nabrajanje određenih termina. Kolekcija je definisana aktualnim navođenjem termina, a ti termini su povezani sa *i*. Izgleda da *i* predstavlja fundamentalan način kombinovanja termina i da je upravo taj način kombinovanja suštinski ako želimo da dobijemo rezultat čiji će broj, različit od broja 1, uopšte moći da se tvrdi. Kolekcije ne pretpostavljaju brojeve, pošto jednostavno proizlaze iz sakupljanja termina pomoću *i*: one mogu da pretpostavljaju brojeve samo u posebnom slučaju u kojem sami termini kolekcije pretpostavljaju brojeve. Postoji i jedna gramatička teškoća koja, pošto ne postoji način da se izbegne, mora da se istakne i uzme u obzir. Gramatički posmatrano, kolekcija je jednina, dok su *A* i *B*, *A* i *B* i *C*, itd. suštinski množina. Ova gramatička teškoća proizlazi iz logičke činjenice (koju sada moramo da razmotrimo) da, uopšte uzev, sve ono što je mnogo formira celinu koja je jedno; prema tome, nije moguće eliminisati ovu teškoću izborom boljih tehničkih termina.

Značaj pojma *i* istakao je Bolcano (Bolzano)[1]. Da bi se razumelo šta je beskonačno, kaže on, „moramo ići natrag do jednog od najjednostavnijih pojmova našeg razuma kako bismo uspeli da se usaglasimo u pogledu reči koju koristimo da ga označimo. To je pojam koji je u osnovi konjunkcije *i* koja, ako treba da se istakne onoliko jasno koliko je to neophodno, u mnogim slučajevima, kako za svrhe matematike tako i filozofije, verujem da je najbolje da bude izražena rečima: "sistem (*Inbegriff*) izvesnih stvari" ili "celina sastavljena od izvesnih delova". Ali, ovde moramo dodati da svaki proizvoljni objekat *A* može da se kombinuje u sistem sa bilo kojim drugim objektima *B*, *C*, *D*, ... ili (govoreći još tačnije) da već sam po sebi formira sistem[2] o kojem neka više ili manje značajna istina može da se tvrdi, pod uslovom da svaki od *A*, *B*, *C*, *D*, ... u stvari predstavlja *različit* objekat ili ukoliko nijedan od iskaza "*A* je isto kao *B*", "*A* je isto kao *C*", "*A* je isto kao *D*" itd. nije istinit. Jer, ako je, na primer, *A* isto kao *B*, onda sasvim sigurno nije razumno govoriti o sistemu stvari *A* i *B*".

Prethodni pasus, iako dobar kakav jeste, zanemaruje više distinkcija za koje smatram da su nužne. Prvo i osnovno, on ne razlikuje mnogo od celine koju formira. Drugo, izgleda da ne primećuje da metod nabrajanja nije praktično primenljiv na beskonačne sisteme. Treće, a što je povezano sa drugom tačkom, ne pominje se ni intenzionalna definicija ni pojam klase. Ono što treba da razmotrimo jeste razlika, ako ona postoji, između klase i kolekcije, s jedne strane, i celine formirane od kolekcije, sa druge. Ali, produbimo najpre ispitivanje pojma *i*.

Za sve ono čiji je konačan broj različit od 0 i 1 i što može da se tvrdi uobičajeno se kaže da je mnogo, a mnogo je, moglo bi se

---

[1] *Paradoxien des Unendlichen*, Leipzig, 1854. (2. izdanje, Berlin, 1889), §3.

[2] *Id est*, kombinacija *A* sa *B*, *C*, *D*, … već formira sistem.

reći, uvek oblika „*A* i *B* i *C* i ..“.. Ovde je svako *A*, *B*, *C* jedno, a svi su različiti. Izgleda da je reći da je *A* jedno skoro isto što i reći da *A* nije oblika „A_1 i A_2 i A_3 i …“. Izgleda da je reći da su *A*, *B*, *C*, … svi različiti samo uslov u odnosu na simbole: morali bismo da pretpostavimo da je „*A* i *A*“ besmisleno, tako je različitost implicirana sa *i* i nema potrebe da bude posebno izražena.

Termin *A*, koji je jedno, može da se smatra posebnim slučajem kolekcije, naime, kolekcijom koja ima samo jedan termin. Tako, svaka kolekcija koja je mnogo pretpostavlja mnogo kolekcija od kojih svaka ima samo jedan termin: *A i B* pretpostavlja *A* i pretpostavlja *B*. Obrnuto, neke kolekcije sa jednim terminom pretpostavljaju mnogo (*many*), naime, one koje su složene: tako, „*A* se razlikuje od *B*“ jeste jedno, ali pretpostavlja *A i razliku i B*. Ali, u ovom pogledu nema simetrije zato što su fundamentalne pretpostavke bilo čega uvek prosti termini.

Svaki par termina, bez izuzetka, može da se kombinuje na način označen sa *A i B*, a ako ni *A* ni *B* nisu mnogo, onda su *A* i *B* dva. *A* i *B* mogu da budu bilo koji pojmljivi entiteti, bilo koji objekti mišljenja – mogu da budu tačke ili brojevi ili istiniti ili lažni iskazi ili događaji ili ljudi, ukratko, bilo šta što može da se broji. Jedna čajna kašičica i broj 3, kao i himera i četvorodimenzionalni prostor, sigurno su dva. Tako, ne treba uvoditi nikakva ograničenja bilo koje vrste u odnosu na *A* i *B*, izuzev onog da ni jedno ni drugo ne sme da bude mnogo. Primetimo da nema potrebe da *A* i *B* postoje već da samo moraju, kao i sve drugo što uopšte može da se pomene, da imaju Biće (*Being*). Razlika između Bića i egzistencije je značajna i ona je dobro ilustrovana procesom brojanja. Ono što može da se broji mora da bude nešto i sasvim sigurno mora da *bude*, mada nema potrebe da uz to poseduje i dodatnu privilegiju da postoji. Tako, ono što zahtevamo od termina naše kolekcije jeste samo to da svaki od njih mora da bude entitet.

Sada može da se postavi sledeće pitanje: šta se podrazumeva pod *A i B*? Da li ovo znači išta drugo osim pukog stavljanja *A* naporedo sa *B*? To će reći: sadrži li to bilo koji element iznad i povrh od *A* i od *B*? Da li je *i* poseban pojam koji se javlja uz *A* i *B*? Svakom odgovoru može da se prigovori. Pre svega, moglo bi da se pretpostavi da *i* ne može da bude nov pojam jer, ako bi bilo, moralo bi da bude neka vrsta relacije između *A* i *B*; *A* i *B* bi onda bilo iskaz ili barem iskazni pojam i bilo bi jedno, a ne dva. Štaviše, ako postoje dva pojma, oni *su* dva i izgleda da nikakav treći posredujući pojam nije nužan da bi oni zaista bili dva. Tako bi *i* bilo besmisleno. Ali, takvu teoriju je teško podržati. Recimo, najpre, da izgleda prenagljeno tvrditi da je neka reč besmislena. Kada upotrebimo reč *i*, izgleda da time ne proizvodimo samo prazan zvuk već da neka ideja odgovara toj reči. I opet, izgleda da činjenica da su *A* i *B* dva implicira neku vrstu kombinacije, što nije istinito ni za jedno od njih ponaosob. Kada kažemo „*A* i *B* su žuti“, iskaz možemo da zamenimo sa „*A* je žuto“ i „*B* je žuto“, što nije slučaj sa „*A* i *B* su dva“; naprotiv, *A* je *jedno* i *B* je *jedno*. Tako, izgleda da je najbolje da smatramo da *i* izražava neku određenu jedinstvenu vrstu kombinacije, ali ne relaciju, i ne kombinaciju *A* i *B* u celinu koja bi bila jedna. Ova jedinstvena vrsta kombinacije biće ubuduće nazvana *sabiranje individua*. Značajno je primetiti da se ovo primenjuje na termine, a na brojeve samo zato što su termini. Tako su, barem za sada, 1 i 2 dva, a 1 i 1 je besmisleno.

Što se tiče smisla kombinacije označene sa *i*, teško je razlikovati ga od onoga što smo ranije nazvali numeričkom konjunkcijom, što će reći da je *A* i *B* ono što je označeno pojmom jedne klase čiji su *A* i *B* jedini članovi. Ako je *u* klasni pojam o kome su iskazi „*A* je *u*“ i „*B* je *u*“ istiniti, ali o kome su svi drugi iskazi iste forme lažni, onda je „svi *u*-ovi“ pojam jedne klase čiji su jedini termini *A* i *B*; ovaj pojam *označava* termine *A* i *B* kombinovane na izvestan način, a „*A* i *B*“ *su* ovi termini kombinovani tačno na taj način.

Tako su „*A* i *B*“ klasa, ali su različiti i od klasnog pojma i od pojma te klase.

Međutim, pojam *i* ne ulazi u *značenje* klase zato što je i pojedinačni termin klasa, mada nije numerička konjunkcija. Ako je *u* klasni pojam i ako je samo jedan iskaz oblika „*x* je *u*“ istinit, onda je „svi *u*-ovi“ pojam koji označava pojedinačni termin, a taj termin je klasa čiji je pojam „svi *u*-ovi“. Tako, ono što izgleda da je suštinsko za jednu klasu nije pojam *i*, već biti označeno nekim pojmom klase. Ovo nas tako dovodi do intenzionalnog gledišta o klasama.

72. U prethodnoj glavi smo se složili da ne postoje različiti načini označavanja već samo različite vrste označavajućih pojmova i njima odgovarajuće različite vrste označenih objekata. Već smo ispitali vrstu označenog objekta koji konstituiše klasu; sada nam preostaje da razmotrimo vrstu označavajućeg pojma.

Koncepcija klasa koja proizlazi iz označavajućih pojmova je opštija od one koju pruža ekstenzionalna koncepcija, i to u dva pogleda. Na prvom mestu, ona dozvoljava ono što ona druga *praktično* isključuje, prihvatanje beskonačnih klasa; drugo, ona uvodi nulti pojam klase. Ali, pre svega ovoga, trebalo bi da se zadržimo na jednoj veoma značajnoj logičkoj poenti.

Ako je *u* klasni pojam, da li je pojam „svi *u*-ovi“ razloživ na dva konstituenta, *svi* i *u*, ili je pak to novi pojam koji je definisan izvesnom relacijom prema *u*, ali ne i složeniji od samog *u*? Najpre možemo da primetimo da je „svi *u*-ovi“ sinonimno sa „*u*-ovi“, barem prema uobičajenoj upotrebi množine. Dakle, naše pitanje se odnosi na značenje množine. Reč *svi* sigurno ima neko određeno značenje, ali je veliko pitanje da li je njeno značenje išta više od ukazivanja na neku relaciju. „Svi ljudi“ i „svi brojevi“ imaju zajedničku karakteristiku da stoje u relaciji sa klasnim pojmom, naime, sa *čovek* i sa *broj*. Ali, vrlo je teško izolovati bilo koji drugi element *sve-osti* (*all-ness*) koji bi im bio zajednički, osim ukoliko kao taj element ne uzmemo puku činjenicu da su oba pojmovi klasa. Onda bi izgledalo da „svi *u*-ovi“ ne može da se valjano razloži na *svi* i *u* i da je jezik u ovom slučaju, kao i u mnogim drugim, nepouzdan vodič. Ista primedba je primenljiva i na *svaki*, *bilo koji*, *neki*, *jedan* i određeni član *the*.

Možda bi moglo da se pomisli da klasu ne bi trebalo da smatramo pukom numeričkom konjunkcijom termina, već numeričkom konjunkcijom označenom pojmom jedne klase. Međutim, ova komplikacija ne bi služila ničemu osim tome da održi Peanovu razliku između pojedinačnog termina i klase čiji je on jedini član – razlika koju je lako shvatiti onda kada se klasa poistoveti sa klasnim pojmom, ali koja je neprihvatljiva po našem gledištu o klasama. Očigledno je da ako se numerička konjunkcija uzme kao ono što je označeno ili jeste isti entitet, kao onda kada nije označena kao takva, ili je pak kompleks označavajućeg i označenog objekta, a označeni objekat je naprosto ono što podrazumevamo pod klasom.

Što se tiče beskonačnih klasa, na primer, klase brojeva, treba primetiti da pojam *svi brojevi*, premda sam nije beskonačno složen, ipak označava beskonačno složeni objekat. To je najveća tajna naše sposobnosti da se bavimo beskonačnošću. Beskonačno složen pojam, iako možda postoji, sasvim sigurno ne može da bude predmet bavljenja ljudske inteligencije, ali beskonačne kolekcije zahvaljujući pojmu označavanja to mogu da budu bez uvođenja bilo kakvog pojma beskonačne složenosti. Ovu primedbu, u toku čitavog razmatranja beskonačnosti u kasnijim delovima ove knjige, treba imati u vidu; ukoliko bi ona bila zaboravljena, nastala bi atmosfera magičnosti koja bi učinila sumnjivim dobijene rezultate.

73. Velike teškoće su povezane sa nultom klasom i, uopšte uzev sa idejom *ništa*. Jasno je da postoji takav pojam kao što je *ništa* i da je, u nekom smislu, ništa ipak nešto. U stvari, iskaz „ništa nije ništa“ nesumnjivo može da se interpretira tako da bude istinit – što je poenta protivrečnosti koje se razmatraju u Platonovom *Sofistu*. U simboličkoj logici nulta klasa predstavlja klasu koja uopšte nema termine, a sa stanovišta simbolizma apsolutno je nužno uvesti neki takav pojam. Mi moramo da razmotrimo da li ove protivrečnosti koje prirodno nastaju mogu nekako da se izbegnu.

Pre svega je neophodno da shvatimo da pojam može da označava čak i onda kada ne označava ništa. Ovo se dešava onda kada ima iskaza u kojima se pojam o kojem je reč javlja, a koji se ne odnose na taj pojam zato što su svi takvi iskazi lažni. Ili, još bolje, to je nagoveštaj objašnjenja označavajućeg pojma koji ne označava ništa. Međutim, ovo nije adekvatno objašnjenje. Uzmimo, na primer, iskaz „himere su životinje“ ili „parni prosti brojevi različiti od 2 su brojevi“. Ovi iskazi deluju istinito i izgleda da se ne odnose na označavajuće pojmove nego na ono što ti pojmovi označavaju a što je pak nemoguće zato što ti pojmovi ne označavaju ništa. Simbolička logika kaže da ti pojmovi označavaju nultu klasu i da iskazi o kojima je reč tvrde da je nulta klasa sadržana u izvesnim drugim klasama. Ali, po striktno ekstenzionalnom gledištu o klasama koje smo predložili gore, klasa koja nema termine nije ništa: ono što je samo i jedino kolekcija termina ne može da postoji kada se svi termini odstrane. Tako, ili moramo da pronađemo neku drugačiju interpretaciju klasa ili pak da iznađemo način da se oslobodimo nulte klase.

Prethodna nesavršena definicija pojma koji označava, iako ne označava ništa, može da se dopuni na sledeći način. Svi označavajući pojmovi, kao što smo videli, izvedeni su iz klasnog pojma, a *a* jeste klasni pojam kada je „*x* je *a*“ iskazna funkcija. Označavajući pojmovi povezani sa *a* neće označavati ništa onda i samo onda kada je „*x* je *a*“ lažno za sve vrednosti od *x*. Ovo je potpuna definicija označavajućeg pojma koji ništa ne označava; u ovom slučaju ćemo reći da je *a* jedan nulti klasni pojam, a da je „svi *a*-ovi“ nulti pojam neke klase. Tako se u sistemu kao što je Peanov, u kojem su ono što se naziva klasama zapravo klasni pojmovi, ne javljaju tehničke teškoće; ali za nas, pravi logički problem i dalje ostaje. Iskaz „himere su životinje“ može lako da se interpretira pomoću formalne implikacije i to tako da znači „*x* je himera implicira *x* je životinja za sve vrednosti od *x*“. Ali, baveći se klasama, pretpostavili smo da su iskazi koji sadrže *svi* ili *bilo koji* ili *svaki*, iako ekvivalentni sa formalnim implikacijama, ipak različiti od njih zbog čega u njima sadržane ideje zahtevaju nezavisan tretman. Sada, u slučaju himera, lako je prihvatiti čisto intenzionalno gledište, prema kojem je ono što je stvarno izraženo samo relacija predikata; tako, pridev *životinjski* čini deo definicije prideva *himerički* (ukoliko sebi dozvolimo upotrebu ove reči, nasuprot ustaljenoj upotrebi, kako bismo označili odredbeni predikat himerâ). Ali, ovde je opet krajnje očigledno da se bavimo iskazom koji implicira da su himere životinje, ali koji nije isti iskaz – zapravo, u ovom slučaju implikacija čak nije ni recipročna. Putem negacije možemo da dobijemo neku vrstu ekstenzionalne interpretacije: ništa nije označeno *himerom* što nije označeno *životinjom*. Ali, ovo je jedna vrlo zaobilazna interpretacija. U celini uzev, deluje mi ispravnije da sasvim odbacim iskaz o kojem je reč i da zadržim one koji bi mu bili ekvivalentni, ako bi bilo himera. Simbolički logičari koji su uvideli korist nulte klase ovo rešenje će da prepoznaju kao jedno reakcionarno gledište. Ali za sada, ja ne želim da razmatram šta bi trebalo da se učini u logičkom računu gde je, izgleda, ustanovljena praksa, najbolja moguća, već šta je filozofska istina u pogledu nulte klase. Dakle, reći ćemo da iz svežnja standardno ekvivalentnih interpretacija formula simboličke logike, ona klasa interpretacija koje smo razmatrali u ovoj glavi, a koje sve zavise od aktualnih klasa, pada onda kada imamo posla sa nultim klasnim pojmovima, zato što aktualna nulta klasa ne postoji.

Sada možemo da razmotrimo iskaz „ništa nije ništa“ – iskaz koji je očigledno istinit ali koji ipak, ukoliko se pažljivo razmotri, predstavlja izvor, naizgled, nerešivih antinomija. *Ništa* je označavajući pojam koji označava ništa. Pojam koji označava očigledno nije ništa, što znači da nije označen njim samim. Ovaj iskaz koji deluje tako paradoksalno ne znači ništa više do ovo: *Ništa*, kao označavajući pojam, nije ništa, što znači da nije ono što on sam označava. Ali, iz ovoga nipošto ne sledi da postoji neka stvarna nulta klasa: moramo da prihvatimo samo nulti klasni pojam i nulti pojam klase.

Ali, sada treba da prevladamo jednu novu teškoću. Jednakost klasnih pojmova, slično svim relacijama koje su refleksivne, simetrične i tranzitivne, ukazuje na identitet koji leži u osnovi toga, to jest ukazuje da svaki klasni pojam prema nekom terminu stoji u relaciji u kojoj svi jednaki klasni pojmovi takođe stoje prema tom terminu – pri čemu je termin o kojem je reč različit za različite skupove jednakih klasnih pojmova, ali je isti za razne članove pojedinačnog skupa jednakih klasnih pojmova. Sada, za sve klasne pojmove koji nisu nulti, ovaj termin leži u odgovarajućoj klasi: ali gde možemo da ga nađemo za nulti klasni pojam? Na ovo pitanje može da se dâ više odgovora, a može da se prihvati bilo koji. Za sada znamo šta je klasa, te prema tome kao naš termin možemo da prihvatimo klasu svih nultih klasnih pojmova ili svih nultih iskaznih funkcija. One nisu nulte klase već prave klase i svi nulti klasni pojmovi stoje prema svakoj od njih u istoj relaciji. Dakle, ako želimo da imamo entitet analogan onom koji se inače naziva klasa, ali koji odgovara nultim klasnim pojmovima, bićemo primorani da svuda gde je to nužno (kao pri brojanju klasa) uvedemo termin koji je identičan za jednake klasne pojmove i da klasu klasnih pojmova, koji su jednaki nekom datom klasnom pojmu, svuda stavimo umesto klase koja odgovara tom klasnom pojmu. Klasa koja odgovara klasnom pojmu ostaje i dalje logički fundamentalna, ali ne mora da se stvarno upotrebljava u našem simbolizmu. Nulta klasa je onda u stvari na neki način analogna iracionalnom broju u aritmetici: ona ne može da se interpretira prema istim principima kao druge klase i, ako želimo da damo analognu interpretaciju, moramo da je zamenimo klasom drugih komplikovanijih entiteta – u ovom slučaju izvesnim korelativnim klasama. Cilj jednog takvog postupka biće uglavnom tehnički, ali odsustvo razumevanja tog postupka vodilo bi nerazmrsivim teškoćama u interpretaciji simbolizma. Sasvim analogan postupak javlja se stalno u matematici, na primer, prilikom svake generalizacije broja; a koliko znam, nijedan slučaj u kojem se to javlja nije bio ispravno interpretiran ni od strane filozofa ni od strane matematičara. Kako ćemo se u toku ove knjige sretati sa velikim brojem sličnih slučajeva, za sada nije neophodno da se dalje zadržavamo na ovom mestu. Dovoljno je da se čuvamo samo jednog mogućeg nesporazuma. Nikakva cirkularnost nije sadržana u prethodnom objašnjenju nulte klase: prvo je postavljen opšti pojam *klase*, potom uviđamo da on obuhvata ono što se naziva egzistencijom, a to se onda simbolički, ali ne i filozofski, zamenjuje pojmom klase jednakih klasnih pojmova, a što je onda, u ovom novom obliku, primenljivo i na ono što odgovara nultim klasnim pojmovima, pošto sada ono što im odgovara nije klasa koja nije nulta. Između klasa *simpliciter* i klasa jednakih klasnih pojmova postoji jedan-jedan korelacija, koja nestaje samo u slučaju klase nultih klasnih pojmova, kojoj ne odgovara nijedna nulta klasa i upravo ova činjenica predstavlja razlog cele komplikacije.

74. Sada treba da na manje-više preliminaran način razmotrimo pitanje koje je sasvim fundamentalno za filozofiju aritmetike. Da li klasu koja ima više termina treba samu smatrati kao jedno ili mnogo? Ako klasu uzmemo, naprosto, kao ekvivalent numeričke konjunkcije „*A* i *B* i *C*, itd“., onda izgleda jasno da je ona mnogo; ipak, sasvim je nužno da treba da možemo da svaku klasu tretiramo i kao jedno, a uobičajeno i govorimo o *jednoj* klasi (*a class*). Tako izgleda da su klase u jednom smislu jedno (*one*), a u drugom smislu mnogo (*many*).

Mogli bismo da budemo u iskušenju da poistovetimo klasu kao mnogo i klasu kao jedno, kao u slučaju *svi ljudi* i *ljudska rasa*. Međutim, svuda gde klasa sadrži više od jednog termina, možemo da dokažemo da nikakvo poistovećivanje ove vrste nije dopustivo. Ako neki pojam klase označava klasu kao jedno, nije isti kao bilo koji pojam klase koji on označava. Drugačije rečeno, *klase svih racionalnih životinja* što označava ljudsku rasu kao jedan termin razlikuje se od *ljudi* što označava ljude i što znači ljudska rasa kao mnogo. Ali, ako bi ljudska rasa bila identična sa ljudima, sledilo bi da sve ono što označava jedno mora da označava i drugo i da bi gorenavedeno razlikovanje bilo nemoguće. Mogli bismo da budemo u iskušenju da zaključimo da Peanova distinkcija između termina i klase čiji je termin jedini član mora da se zadrži, barem kada je termin o kojem je reč klasa[1]. Ali, mislim da je tačnije izvesti suštinsko razlikovanje između klase kao mnogo i klase kao jedno i tvrditi da je ono što je mnogo samo mnogo, a ne istovremeno i jedno. Klasa kao jedno može da se poistoveti sa celinom sastavljenom od termina te klase, što će reći da bi u slučaju ljudi klasa kao jedno bila ljudska rasa.

Ali, da li sada možemo da izbegnemo protivrečnost od koje uvek strahujemo kada se javlja nešto što ne može da se transformiše u logički subjekat? Lično ne vidim nikakav način da se iznađe određena protivrečnost u ovom slučaju. U slučaju pojmova, bavimo se nečim što je očigledno jedan entitet, u konkretnom slučaju, jednim kompleksom koji je u suštini analizabilan na jedinice. U iskazu kao što je „*A* i *B* su dva“ nema logičkog subjekta: tvrđenje se ne odnosi ni na *A*, ni na *B*, niti na celinu sastavljenu od oba već

[1] Ovaj zaključak je, zapravo, izveo Frege, polazeći od analognog argumenta: *Archiv für syst. Phil.*, I, str. 444. Vidi Apendiks.

strogo i jedino na *A* i *B*. Izgleda da se, tako, tvrđenja ne odnose nužno *na* pojedinačne objekte već mogu da se odnose i na mnoge subjekte, a to uklanja protivrečnost koja, u slučaju pojmova, nastaje iz nemogućnosti da se formulišu tvrđenja o njima, osim ukoliko ih ne bismo transformisali u subjekte. Pošto ove nemogućnosti ovde nema, nema ni protivrečnosti od koje smo strahovali.

75. Može da se postavi pitanje, nagovešteno prethodnom diskusijom, šta može da se kaže o objektima označenim sa *jedan čovek*, *svaki čovek*, *neki čovek* i *bilo koji čovek*. Da li su ti objekti jedno ili mnogo ili ništa od toga? Gramatika ih sve tretira kao jedno. Ali, odmah se postavlja pitanje, o kojem jednom je ovde reč? Sigurno ne o Sokratu niti o Platonu, a ni o bilo kojoj drugoj pojedinačnoj osobi. Da li možemo da zaključimo da niko od njih nije označen? Isto tako bismo mogli da zaključimo da je svaki od njih označen, a što je u stvari istinito o pojmu *svaki čovek*. Mislim da je u svakom slučaju označeno jedno, ali na jedan nepristrasno distributivan način. *Bilo koji broj* nije ni 1 ni 2, niti neki drugi pojedinačni broj, te je, prema tome, lako zaključiti da *bilo koji broj* nije bilo koji broj što predstavlja iskaz koji je na prvi pogled protivrečan, ali koji zapravo proizlazi iz dvosmislenosti *bilo koji*, te bi bio tačnije izražen sa „*bilo koji broj* nije *neki* jedan broj“. Međutim, preostaje izvestan broj zagonetki koje još ne znam kako da rešim.

Ostaje jedna posebna logička teškoća u pogledu prirode celine koja je sastavljena od svih termina neke klase. Dva iskaza izgledaju samoočigledno: (1) dve celine sastavljene od različitih termina moraju da budu različite, (2) jedna celina sastavljena od samo jednog termina jeste upravo taj termin. Sledi da je celina sastavljena od klase uzete kao jedan termin upravo ta klasa uzeta kao jedan termin, te da je, prema tome, identična sa celinom sastavljenom od termina te klase; ali, ovaj rezultat protivreči prvom od naših pretpostavljenih samoočiglednih principa. Međutim, odgovor u ovom slučaju nije težak. Prvi od naših principa je univerzalno istinit samo onda kada su svi termini koji sačinjavaju naše dve celine prosti. Jedna data celina, ako ima više od dva dela, može da se izanalizira na više načina, a konstituenti koji su dobiveni ovom analizom, ukoliko analiza nije vođena do kraja, biće različiti za različite načine analiziranja. Ovo dokazuje da različiti skupovi konstituenata mogu da formiraju jednu istu celinu i ovo otklanja svaku teškoću.

76. Trebalo bi da nešto kažemo o relaciji termina prema klasi koje je on član i o različitim srodnim relacijama. Jedna od njih se naziva ε i ona je fundamentalna u simboličkoj logici. Ali, donekle je stvar izbora koju od ovih relacija uzimamo kao simbolički fundamentalnu.

Logički posmatrano, fundamentalna relacija jeste relacija između subjekta i predikata, koja je izražena u „Sokrat je mudar" – relacija koja je, kao što smo videli u Glavi IV, osobena po tome što relat ne može da se smatra terminom u iskazu. Prva sledeća relacija koja nastaje iz ove jeste ona koju izražava iskaz „Sokrat poseduje mudrost", a koja se razlikuje time što je ova relacija termin. Zatim, sledi „Sokrat je (jedan) mudrac". Ovaj iskaz, uzet kao relacija između Sokrata i pojma *mudrac* jeste onaj koji Peano smatra fundamentalnim, a njegovo $\in$ izražava relaciju *je jedan* između Sokrat i *mudrac.* Sve dok upotrebljavamo klasni pojam za klase u našem simbolizmu, ovoj praksi ne mogu da se upute primedbe, ali ako znaku $\in$ pridamo ovo značenje, onda ne moramo da pretpostavimo da od dva simbola koja predstavljaju jednake klasne pojmove oba predstavljaju jedan isti entitet. Sada možemo da pređemo na relaciju između Sokrata i ljudske rase, to jest između termina i njegove klase uzete kao celina; to je ona relacija koju izražava iskaz „Sokrat pripada ljudskoj rasi". Ovu relaciju bi isto tako dobro moglo da predstavlja i $\in$. Pošto je klasa, izuzev onda kada ima samo jedan termin, u suštini mnogo, jasno je da ona *kao takva* ne može da se predstavi jednim jedinim slovom; isto tako, u bilo kojoj mogućoj simboličkoj logici, slova u službi klasa ne mogu da ih predstavljaju kao mnogo, već moraju da predstavljaju ili klasne pojmove ili celine sastavljene od klasa ili nekih drugih srodnih pojedinačnih entiteta. Tako, $\in$ ne može da predstavlja ni relaciju između termina i njegove klase kao mnogo, jer bi to onda bila relacija između jednog termina i mnogih termina, a ne dvoterminska relacija kakvu mi ovde želimo. Ova relacija bi mogla da se izrazi pomoću „Sokrat je jedan od ljudi“; ali, ovo ni u kojem slučaju ne može da se uzme kao značenje $\in$.

77. Relacija koja je pre Peana uvek bila brkana sa $\in$ jeste relacija uključivanja između klasa kao, na primer, relacija između ljudi i smrtnika. To je jedna proslavljena relacija zato što se javlja u tradicionalnoj formi silogizma. Ona je bila bojno polje sukoba oko intenzije i ekstenzije i o njoj se toliko često raspravljalo da je začuđujuće kako je mnogo stvari ostalo da se o njoj još kaže. Empiristi smatraju da takvi iskazi znače aktualno nabrajanje termina klase o kojoj je reč, zajedno s tvrđenjem, za svaki od slučajeva, o pripadnosti klasi koja ih sadrži. Možemo da zaključimo da oni mora da smatraju sumnjivim to da li su svi prosti brojevi celi brojevi, pošto teško da će imati smelosti da kažu da su ispitali sve proste brojeve jedan po jedan. Nasuprot tome, njihovi protivnici su često smatrali da je ono što je označeno zapravo relacija celine i dela između definišućih predikata, ali da je to relacija čiji je smisao suprotan smislu relacije između klasa: to znači da je definišući predikat veće klase deo predikata manje klase. Ovo gledište izgleda lakše odbranjivo od prethodnog, i u svim slučajevima u kojima takva relacija postoji između definišućih predikata sledi da postoji relacija uključivanja. Ali, ovom gledištu mogu da se upute dve primedbe: prvo, da u nekim slučajevima uključivanja ne postoji takva relacija između definišućih predikata, i drugo, da je ono što se mislilo u svakom slučaju relacija između klasa, a ne relacija između njihovih definišućih predikata. Prva poenta može lako da se ustanovi primerima. Pojam *prost paran broj* ne sadrži pojam *ceo broj između* 1 *i* 10 kao konstituent; pojam „engleski kralj čija je glava odsečena“ ne sadrži pojam „ljudi koji su umrli 1649. godine“, itd. za nebrojene druge očigledne slučajeve. Ovome bi moglo da se odgovori time što bi se reklo da iako relacija definišućih predikata nije relacija celine prema delu, takva relacija je ipak više ili manje analogna relaciji implikacije i to je uvek ono što mi zapravo podrazumevamo pod iskazima o uključivanju. Mislim da takvo gledište predstavlja ono što su zastupali najbolji zastupnici intenzije. Nije mi stalo do toga da osporavam da relacija ove vrste uvek može da se javi između definišućih predikata klasa od kojih je jedna sadržana u drugoj. Ali, druga od dve gorenavedene primedbe ostaje validna protiv svake intenzionalne interpretacije. Kada kažemo da su ljudi smrtnici, očigledno je da kažemo nešto o ljudima a ne o pojmu *čovek* ili o predikatu *ljudsko* (*human*). Pitanje je, onda, šta mi zapravo kažemo?

Peano u ranijem izdanju *Formulara* smatra da je ono što je ovde tvrđeno formalna implikacija „*x* je čovek implicira *x* je smrtan“. Ovo je sigurno implicirano, ali ne može da me uveri da je reč o istom iskazu. Jer, kao što smo videli u Glavi III, u ovim iskazima je od suštinskog značaja da se *x* treba da uzme *sve* vrednosti, a ne samo one koje su ljudi. Ali, kada kažemo „svi ljudi su smrtni“, izgleda očigledno da govorimo samo o ljudima, a ne o svim drugim zamislivim terminima. Ako želimo da dobijemo pravu relaciju između klasa, ovo tvrđenje možemo da smatramo tvrđenjem o relaciji celine i dela između dve klase od kojih svaku tretiramo kao da je jedan jedini termin. Ili, naš iskaz možemo da formulišemo u još ekstenzionalnijoj formi tako što ćemo pretpostaviti da znači: svaki (ili bilo koji) čovek je smrtan. Ovaj iskaz nas navodi na vrlo interesantna pitanja u vezi sa teorijom označavanja. Jer, izgleda da se njime tvrdi identitet, ali je očigledno da je ono što označava *svaki čovek* različito od onog što označava *smrtnik.* Međutim, ma koliko da su interesantna ova pitanja, ovde ne možemo da ih dalje razmatramo. Dovoljno je samo da se jasno shvati koliko je različitih ekvivalentnih iskaza sadržano u slučaju u kojem je jedna klasa uključena u drugu. Najrelevantnija forma za matematiku je svakako forma formalne implikacije kojoj ćemo se iznova posvetiti u sledećoj glavi.

Na kraju treba da se podsetimo da klase moraju da se izvedu posredstvom pojma *takvo da* iz drugačijih izvora nego što su subjekat-predikatski iskazi i njihovi ekvivalenti. Bilo koju iskaznu funkciju u kojoj postoji određeno tvrđenje koje se odnosi na varijabilni termin moramo da posmatramo, kao što je to objašnjeno u Glavi II, kao da proizvodi klasu vrednosti koje je zadovoljavaju. Ova problematika zahteva ispitivanje tvrđenja; ali, možemo odmah da pomenemo jednu neobičnu protivrečnost koja iznuđuje krajnje pažljivo razlikovanje koje je sve vreme cilj u ovoj glavi.

78. Većina osnovnih predikata za kojima smo težili u ovoj glavi ne može da se predicira samima sebi mada će uvođenje negativnih predikata pokazati da postoji upravo isto toliko primera predikata koji mogu da se prediciraju samima sebi. Barem jedan od njih, naime, predikabilnost, to jest svojstvo da se bude predikat, nije negativno: predikabilnost je očigledno predikabilna, što znači da je predikat sama sebi. Ali, većina uobičajenih primera jeste negativna, kao ne-ljudskost je ne-ljudska, itd. Dakle, predikati koji ne mogu da se prediciraju samima sebi samo predstavljaju izbor među predikatima i prirodno je pretpostaviti da oni formiraju klasu definišućih predikata. Ali, ako je to tako, ispitajmo da li definišući predikat pripada toj klasi ili ne. Ako pripada klasi, on nije predikabilan samom sebi, zato što je to karakteristično svojstvo te klase. Ali, ako nije predikabilan samom sebi, on onda ne pripada klasi čiji je definišući predikat, što je suprotno hipotezi. Sa druge strane, ako ne pripada klasi čiji je definišući predikat, onda on nije predikabilan samom sebi, što pak znači da *jeste* jedan od onih predikata koji nisu predikabilni samima sebi te da zato pripada klasi čiji je definišući predikat, ponovo suprotno hipotezi. Tako, iz svake hipoteze možemo da izvedemo protivrečnost. Ovoj protivrečnosti ću da se posvetim u Glavi X*; sada sam je predstavio samo kako bih pokazao da nijedna suptilnost u razlikovanju ne može da bude preterana.

79. Rezimirajmo ovu donekle dugu diskusiju. Klasa, složili smo se, mora da se interpretira u ekstenziji; ona je ili jedan jedini termin ili pak ona vrsta kombinacije termina na koju se ukazuje kada su termini povezani rečju i. Ali, praktično mada ne i teorijski, ovaj čisto ekstenzionalan metod može da se primeni samo na konačne klase. Sve klase, bilo konačne ili beskonačne, mogu da se dobiju kao objekti označeni množinom klasnih pojmova – ljudi, brojevi, tačke, itd. Uzimajući za polazište predikate, razlikujemo dve vrste iskaza čiji su tipovi „Sokrat je ljudsko [biće] (human)**“ i „Sokrat poseduje

---

* Rasel je u §78 *Principa* po prvi put objavio protivrečnost koja će kasnije postati poznata pod nazivom Raselov paradoks. Navedenu protivrečnost Rasel je otkrio još 1901. godine dok se bavio Kantorovom teoremom pomoću koje se izvodi tzv. Kantorov paradoks koji je u velikoj meri sličan Raselovom; još jedan srodan paradoks je i Burali-Fortijev (više o tome u §301 *infra*). Ovi paradoksi su ukazivali na fundamentalne probleme naivne teorije skupova ali su ujedno dovodili u pitanje i sprovodivost logicističkog programa zasnivanja matematike kakav su formulisali Rasel i Frege. Raselova teorija tipova (čija skica je izložena u Apendiksu B *Principa*) formulisana je u cilju razrešenja ovih problema, kao uostalom i značajan deo Rasel-Vajthedovih *Principia Mathematica* (prim. stručnih redaktora prevoda).

** Čitalac bi trebalo da ima u vidu da Rasel ovde ponovo koristi primer „*Socrates is human*“ gde ono *human* (koje je ovde prevedeno sa ljudsko [biće]), kao i u prethodnim slučajevima, treba da se shvati kao pridev a ne kao supstantiv (prim. stručnih redaktora prevoda).

ljudskost“, a u kojima je u prvom mudar upotrebljeno kao predikat, a u drugom kao termin relacije. Ove dve klase iskaza, premda logički veoma značajne, nisu toliko relevantne u matematici koliko ono što je iz njih izvedeno. Polazeći od ljudsko, razlikujemo: (1) klasni pojam čovek koji, ako se uopšte razlikuje, samo se neznatno razlikuje od ljudsko; (2) više označavajućih pojmova svi ljudi, svaki čovek, bilo koji čovek, jedan čovek, neki čovek; (3) objekte označene ovim pojmovima, od kojih je jedan označen sa svi ljudi nazvan klasa kao mnogo, tako da je svi ljudi (pojam) nazvan pojam te klase; (4) klasu kao jedno to jest ljudsku rasu. Takođe smo ustanovili jednu protivrečnost iskaza koji se odnosi na Sokrata, a koja zavisi od ovih razlika i koja je sa njima približno paralelna: (1) „Sokrat je-jedan čovek“ je skoro, ako ne i sasvim, identično sa „Sokrat poseduje ljudskost“; (2) „Sokrat je jedan-čovek“ izražava identitet između Sokrata i jednog od termina označenog sa jedan čovek; (3) „Sokrat je jedan među ljudima“, iskaz koji izaziva teškoće zbog mnoštva ljudi; (4) „Sokrat pripada ljudskoj rasi“, jedini iskaz koji izražava relaciju individue prema njegovoj klasi i, pošto mogućnost relacije to zahteva, klasi uzetoj kao jedno, a ne kao mnogo. Složili smo se da je nulta klasa fikcija pošto nema nikakav termin iako postoje nulti klasni pojmovi. Po svemu sudeći, izgleda da su klasa i ekstenzija logički fundamentalnije za principe matematike iako svaki simbolički tretman mora velikim delom da se odnosi na klasne pojmove i na intenziju: to može da se smatra opštim zaključkom ove glave.

Glava VII

ISKAZNE FUNKCIJE

80. U prošloj glavi sam nastojao da ukažem na vrstu objekata koju treba nazvati klasom, pri čemu su u cilju diskusije klase uzete za izvedene iz subjekat-predikatskih iskaza. Ovo ne utiče na naše gledište u pogledu samog pojma *klase* ali, ako bi to bilo slučaj, to bi u velikoj meri ograničilo ekstenziju tog pojma. Često je nužno da klasu smatramo objektom koji nije definisan pomoću subjekat-predikatskog iskaza. Objašnjenje ove nužnosti treba potražiti u teoriji o tvrđenju i o *takvo da*.

Opšti pojam tvrđenja je već objašnjen u vezi sa formalnom implikacijom. U ovoj glavi njegov obim i legitimnost moramo da podvrgnemo kritičkom ispitivanju i moramo da ispitamo njegovu vezu sa klasama i *takvo da*. Ovaj predmet istraživanja je pun teškoća, a učenja koja nameravam da zastupam će biti predložena uz vrlo ograničeno poverenjem u njihovu istinitost.

Pojam *takvo da* na prvi pogled može da deluje kao da je podložan definisanju. Peano ga je uglavnom upotrebljavao kako bi definisao pojam iskaza „x-ovi takvi da x je a su klasa od a“. Ostavljajući po strani primedbe koje odmah upadaju u oči, treba primetiti da je klasa dobijena pomoću *takvo da* prava klasa uzeta u ekstenziji i to kao mnogo, dok a u „x je a“ nije klasa nego klasni pojam. Tako, da bi

Peanov postupak bio dopustiv, formalno je nužno da „*x*-ovi takvi da tako-i-tako“ zamenimo pravim klasnim pojmom „*x* takvo da tako-i-tako“ koji može da se posmatra kao da je dobijen iz predikata „takvo da tako-i-tako“ ili, radije, „biti *x* takvo da tako-i-tako“ pošto je ova poslednja forma nužna zato što je tako-i-tako iskazna funkcija koja sadrži *x*. Ali, čak i ako smo napravili ovu čisto formalnu prepravku, ipak i dalje ostaje da *takvo da* često mora da se stavi ispred takvih iskaza kao što su *xRa*, gde je *R* neka data relacija, a *a* neki dati termin. Ovaj iskaz ne možemo da svedemo na formu „*x* je *a*’“ a da ne upotrebimo *takvo da*; jer, ako pitamo šta bi *a*’ trebalo da bude, odgovor je: *a*’ bi trebalo da bude takvo da svaki od njegovih termina i nijedan drugi termin stoji u relaciji *R* prema *a*. Uzmimo primer iz svakodnevnog života: deca Izraela su klasa definisana izvesnom relacijom prema Izraelu, a ova klasa može da se definiše kao termini koji su takvi da stoje u toj relaciji. *Takvo da* je skoro ekvivalentno sa *ko* ili *koji* i predstavlja opšti pojam koji zadovoljava iskaznu funkciju. Ali, možemo ići i dalje: ako je data neka klasa *a*, pomoću *a* ne možemo da definišemo klasu iskaza „*x* je *a*“, za različite vrednosti od *x*. Jasno je da postoji relacija u kojoj svaki od ovih iskaza stoji prema *x* koje se javlja u njemu, kao i da je ova relacija određena onda kada je *a* dato. Nazovimo ovu relaciju *R*. Onda je bilo koji entitet koji je referencija u odnosu na *R* iskaz tipa „*x* je *a*“. Ali, ovde je pojam *takvo da* već upotrebljen. I sama relacija *R* može da se definiše samo kao relacija koja važi između „*x* je *a*“ i *x*, za sve vrednosti od *x*, a ne važi između bilo kojih drugih parova termina. Ovde se opet javlja *takvo da*. U svim ovim opaskama najznačajnija je nedefinljivost iskaznih funkcija. Pošto su one prihvaćene, opšti pojam jednovrednosne funkcije lako se definiše. Svaka mnogo-jedan relacija, što znači svaka relacija za koju data referencija ima samo jedan relat, definiše funkciju: relat je ona funkcija referencije koja je definisana relacijom o kojoj je reč. Ali tamo gde je funkcija iskaz, dati pojam je pretpostavljen u simbolizmu i ne može da se definiše posredstvom njega samog bez cirkularnosti, zato što se u gorenavedenoj opštoj definiciji funkcije iskazne funkcije već javlja-ju. U slučaju iskaza tipa „*x* je *a*“, ako pitamo *koji* su iskazi ovog tipa, možemo samo da odgovorimo „svi iskazi u kojima se za jedan termin kaže da je *a*“, a ovde pojam onda mora ponovo da se definiše.

81. Može li nedefinljivi element u iskaznoj funkciji da se poistoveti sa tvrđenjem zajedno sa pojmom *svakog* iskaza koji sadrži dato tvrđenje ili sa tvrđenjem koje se odnosi na *svaki* termin? Jedina alternativa, koliko mogu da vidim, jeste da se kao nedefinljiv prihvati sâm opšti pojam iskazne funkcije, a ovo je sigurno najbolje sa formalnog stanovišta; ali, filozofski gledano, ovaj pojam na prvi pogled izgleda da može da se analizira i moramo da ispitamo da li nas izgled možda vara.

U diskusiji o glagolima, u Glavi IV, videli smo da kada je iskaz potpuno razložen na njegove proste konstituente, njegovi konstituenti uzeti zajedno ga ne rekonstituišu. Manje potpuna analiza iskaza na subjekat i na tvrdnju takođe je razmatrana, i ona mnogo manje razara iskaz. Istina je da subjekat i tvrdnja, ako su jednostavno postavljeni jedno pored drugog, ne konstituišu iskaz, ali čim se tvrdnja aktualno tvrdi o subjektu, iskaz se ponovo javlja. Tvrdnja je sve što ostaje od iskaza kada se subjekat izostavi: glagol ostaje tvrđeni glagol i nije transformisan u glagolsku imenicu; ili, u svakom slučaju, glagol zadržava onu čudnu, zamršenu i nedefinljivu relaciju prema drugim terminima iskaza koja razlikuje povezujuću relaciju od iste te relacije uzete apstraktno. Obim i legitimnost ovog pojma tvrdnje jeste ono što sada moramo da ispitamo. Može li svaki iskaz da se posmatra kao tvrdnja koja se odnosi na bilo koji termin koji se u njemu javlja, ili, da li su nužna ograničenja u pogledu forme iskaza i načina na koji termin ulazi u njega?

U nekim jednostavnim slučajevima je očigledno da je analiza na subjekat i tvrdnju legitimna. U „Sokrat je čovek“ možemo jasno da razlikujemo Sokrata od nečega što je tvrđeno o njemu i bez oklevanja treba da prihvatimo da *ista* stvar može da se kaže o Platonu ili o Aristotelu. Tako možemo da ustanovimo klasu iskaza koji sadrže ovu tvrdnju, a ta klasa će biti ona čiji će tipični član biti predstavljen sa „*x* je čovek“. Primetimo da tvrdnja mora da se javi *kao* tvrdnja, a ne kao termin: tako, „biti čovek znači patiti“ sadrži tvrdnju, ali upotrebljenu kao termin, te otuda ovaj iskaz ne pripada klasi o kojoj je reč. U slučaju iskaza koji tvrde neku fiksiranu relaciju prema nekom fiksiranom terminu, ova analiza izgleda neosporno. Biti dugačak više od jedne jarde, na primer, sasvim je određena tvrdnja i može da se ustanovi klasa iskaz koji je sadrže, klasa koja će biti predstavljena iskaznom funkcijom „*x* je duže od jedne jarde“. U izrazima poput „zmije koje su dugačke više od jedne jarde“ tvrdnja izgleda veoma jasna; jer, ona se ovde odnosi eksplicitno na varijabilni subjekat i nije tvrđena ni o kakvom određenom subjektu. Tako, ako je *R* fiksirana relacija, a *a* fiksirani termin, ...*Ra* predstavlja sasvim određenu tvrdnju (stavljam tačke ispred *R* da bih ukazao na mesto gde subjekat mora da se umetne kako bi se dobio iskaz). Može se dovesti u pitanje da li relacioni iskaz može da se posmatra kao tvrdnja koja se odnosi na relat. Što se mene tiče, smatram da je to moguće, osim u slučaju subjekat-predikatskih iskaza; ali, ovo pitanje je bolje odložiti za kasnije kada budemo prešli na razmatranje relacija[1].

82. Sada moramo da razmotrimo izvesna teža pitanja. Da li je iskaz poput „Sokrat je čovek implicira Sokrat je smrtan“ ili „Sokrat ima ženu implicira Sokrat ima oca“ tvrdnja koja se odnosi na Sokrata ili ne? Sasvim je izvesno da ako Sokrata zamenimo promenljivom dobijamo iskaznu funkciju; u stvari, istinitost ove funkcije za sve vrednosti promenljive jeste ono što tvrdi odgovarajuća formalna implikacija, a ne, kako bi na prvi pogled to moglo da se pomisli, relacija između dve iskazne funkcije. E sad, naša namera je bila da, ukoliko je to moguće, objasnimo iskazne funkcije pomoću tvrdnji; tako, ako naša namera može da se ostvari, gorenavedeni iskazi moraju da se odnose na Sokrata. Međutim, tako nešto izaziva veoma velike teškoće. Kao što smo videli, tvrdnja se dobija iz iskaza jednostavnim

[1] Vidi §96.

izostavljanjem jednog od termina koji se javlja u iskazu. Ali, kada izostavimo Sokrata, onda dobijamo „... je čovek implicira ... je smrtan“. U ovoj formuli je bitno to da bi pri ponovnom uspostavljanju iskaza isti termin morao da se zameni na dva mesta gde tačke ukazuju na nužnost jednog termina. Nije bitno koji termin se odabere već je bitno da on mora da bude isti na oba mesta. Međutim, o ovom zahtevu nema nikakvog traga u navodnoj tvrdnji, i nikakav trag i ne može da se javi zato što je svaki navodni termin koji bi morao da se uvede nužno izostavljen. Kada se x uvede tako da predstavlja promenljivu, na identitet termina koji treba da se uvede ukazano je ponavljanjem slova x; ali, nijedan takav metod nije na raspolaganju u obliku tvrđenja (*assertional form*). A ipak, na prvi pogled izgleda vrlo teško negirati da iskaz o kojem je reč tvrdi neku činjenicu o Sokratu i da je ista ta činjenica istinita i o Platonu ili o pudingu od šljiva ili o broju 2. Neosporno je da je „Platon je čovek implicira Platon je smrtan“ u ovom ili onom smislu ista funkcija o Platonu kao što je naš prethodni iskaz bio o Sokratu. Prirodna interpretacija bi bila da jedan iskaz stoji prema Platonu u istoj relaciji u kojoj drugi stoji prema Sokratu. Ali, ovo zahteva da iskaznu funkciju o kojoj je reč smatramo definljivom pomoću njene relacije prema promenljivoj. Međutim, takvo gledište zahteva iskaznu funkciju koja je komplikovanija od ove koju trenutno razmatramo. Ako „x je čovek implicira x je smrtan“ predstavimo sa ϕx, gledište o kojem je reč tvrdi da je ϕx termin koji prema x stoji u relaciji R, gde je R neka određena relacija. Formalno izraženo, takvo gledište tvrdi sledeće: za sve vrednosti x i y, „y je identično sa ϕx“ je ekvivalentno sa „y je u relaciji R prema x“. Očigledno je da ovo ne može da se smatra objašnjenjem pošto je daleko složenije od onoga što je trebalo da objasni. Izgleda da sledi da iskazi mogu da imaju izvesnu konstantnost forme izraženu činjenicom da su instance neke date iskazne funkcije, a da je iskaz nemoguće razložiti na konstantni i varijabilni činilac. Ovakvo gledište je čudno i teško prihvatljivo: konstantnost forme je u svim drugim slučajevima svodiva na konstantnost relacija, ali je konstantnost o kojoj je ovde reč pretpostavljena u pojmu konstantnosti relacije te ne može da se objasni na uobičajeni način.

Mislim da će isti zaključak da sledi i u slučaju sa dve promenljive. Najjednostavnija instanca ovog slučaja jeste *xRy*, gde je *R* konstantna relacija, dok su *x* i *y* nezavisno varijabilni. Deluje očigledno da je ovde reč o iskaznoj funkciji sa dve nezavisne promenljive: nema nikakve teškoće u pojmu klase svih iskaza oblika *xRy*. Ova klasa je obuhvaćena – ili bar svi njeni članovi koji su istiniti – pojmom klasâ referencija i relata od *R*, a ove klase se bez oklevanja prihvataju u izrazima kao što su roditelji i deca, gospodari i sluge, muževi i žene, kao i u brojnim drugim primerima iz svakodnevnog života, a i u logičkim pojmovima kao što su premise i zaključci, uzroci i učinci, itd. Svi ovi pojmovi zavise od klase iskaza tipa *xRy*, gde je *R* konstantno, dok su *x* i *y* varijabilni. Ipak, krajnje je teško smatrati da je *xRy* analizabilno na tvrdnju o *R* koja se tiče *x* i *y* iz prostog razloga što takvo gledište razara *smisao* relacije, naime, njenu usmerenost od *x* prema *y*, ostavljajući nam samo tvrdnju koja je simetrična u odnosu na *x* i *y*, kao što je „relacija *R* postoji između *x* i *y*“. Ako je data relacija sa njenim terminima, onda su zapravo moguća dva različita iskaza. Tako, ako uzmemo da je sâmo *R* tvrdnja, ta tvrdnja biva dvosmislena, a da bismo je izbegli moramo da odlučimo koji je od termina referencija, a koji relat. Možemo sasvim legitimno da smatramo ...*Ry* tvrdnjom, kao što je to već objašnjeno ranije; ali, *y* je tu onda postalo konstantno. Zatim, možemo da variramo *y*, razmatrajući klasu tvrdnji …*Ry* za različite vrednosti od *y*; ali, izgleda da ovaj proces nije identičan onom na koji je ukazano nezavisnom varijabilnošću *x* i *y* u iskaznoj funkciji *xRy*. Pored toga, predloženi proces zahteva varijaciju jednog elementa u tvrdnji, naime, *y* u …*Ry*, što je samo po sebi jedan nov i težak pojam.

Iz ovih razmatranja proizlazi nešto čudno ali često bitno u današnjoj matematici, a u vezi s relacijom termina prema njemu samom. Razmotrimo iskaznu funkciju *xRy*, gde je *R* konstantna relacija. Ovakve funkcije su nužne u razmatranju, na primer, klase samoubica ili samoostvarenih ljudi ili pak u razmatranju vrednosti promenljive za koje je ona jednaka izvesnoj funkciji nje same, što često može da bude nužno u običnoj matematici. Izgleda krajnje očigledno da u ovom slučaju iskaz sadrži jedan element koji se gubi kada se iskaz razloži na termin x i tvrdnju R. Tako ovde iskazna funkcija ponovo mora da se prihvati kao fundamentalna.

83. U pogledu varijacije pojma u iskazu nastaje jedan težak problem. Razmotrimo, na primer, sve iskaze tipa *aRb*, gde su *a* i *b* fiksirani temini, a *R* varijabilna relacija. Izgleda da ovde nema razloga za sumnju da je klasni pojam „relacija između *a* i *b*“ legitiman, i da postoji odgovarajuća klasa; ali, ovo zahteva prihvatanje takvih iskaznih funkcija kao što je *aRb* koje su inače često neophodne u savremenoj matematici kao kada se, na primer, izračunava broj relacija mnogo-jedan čije su referencije i relati date klase. Ali, da bi naša promenljiva imala, kao što to normalno zahtevamo, neograničeno polje, nužno je da zamenimo iskaznu funkciju „*R* je relacija implicira *aRb*“. U ovom iskazu podrazumevana implikacija je materijalna, a ne formalna. Ako bi implikacija bila formalna, iskaz ne bi bio funkcija od *R* već bi bio ekvivalentan tom iskazu (nužno lažnom): „sve relacije važe između *a* i *b*“. Uopšte uzev, imamo iskaz poput „*aRb* implicira $\phi(R)$, pod uslovom da je *R* relacija“, i želimo da ga transformišemo u formalnu implikaciju. Ako je $\phi(R)$ iskaz za sve vrednosti od *R*, naš cilj je ostvaren njegovim zamenjivanjem sa „ako "*R* je relacija" implicira "*aRb*", onda $\phi(R)$“. Ovde *R* može da uzme sve vrednosti[1] i *ako-onda* je formalna implikacija, a *implicira* je materijalna implikacija. Ako $\phi(R)$ nije iskazna funkcija već iskaz samo onda kada zadovoljava $\psi(R)$, gde je $\psi(R)$ iskazna funkcija implicirana sa „*R* je relacija“ za sve vrednosti od *R*, onda naša formalna implikacija može da se da u obliku „ako "*R* je relacija" implicira *aRb*, onda, za sve vrednosti od *R*, $\psi(R)$ implicira $\phi(R)$“ gde su obe

[1] Nužno je da pridamo neko značenje (drugačije od iskaza) *aRb* onda kada *R* nije relacija.

subordinirane implikacije materijalne. Što se tiče materijalne implikacije, „"*R* je relacija" implicira *aRb*" uvek je iskaz dok je *aRb* iskaz samo onda kada je *R* relacija. Ova nova iskazna funkcija će biti istinita samo onda kada je *R* relacija koja ne važi između *a* i *b*: kada *R* nije relacija, antecedens je lažan, a konsekvens nije iskaz tako da je i implikacija lažna; kada je *R* relacija koja ne važi između *a* i *b*, antecedens je istinit a konsekvens lažan, tako da je i implikacija ponovo lažna; implikacija je istinita samo kada su oba istinita. Tako, kada se definiše klasa relacija koje povezuju *a* i *b*, ispravna procedura sa formalnog stanovišta jeste da ih definišemo kao vrednosti koje zadovoljavaju „*R* je relacija implicira *aRb*" – što je implikacija koja, mada sadrži promenljivu, ipak nije formalna već materijalna, pošto je zadovoljena samo nekim mogućim vrednostima od *R*. Rečeno Peanovom terminologijom, promenljiva *R* koja se tu javlja je realna a ne prividna.

Opšti princip koji je ovde sadržan glasi: Ako je ϕx iskaz samo za neke vrednosti od x, onda je „"ϕx implicira ϕx" implicira ϕx" iskaz za *sve* vrednosti od x, a istinit je onda i samo onda kada je ϕx istinito. (Obe ove implikacije su materijalne). U nekim slučajevima „ϕx implicira ϕx" biće ekvivalentno nekoj prostijoj iskaznoj funkciji ψx (kao što je „*R* je relacija" u prethodnom primeru) koja onda može da ga zameni[1].

Izgleda da iskazna funkcija poput „*R* je relacija implicira *aRb*" može još manje od prethodnih primera da se izanalizaira na *R* i na tvrdnju o *R* pošto bi trebalo da pridamo značenje „*a* ... *b*" gde prazna mesta mogu da se ispune bilo čim, a ne nužno relacijom. Međutim, time se sugeriše jedan entitet koji još uvek nismo razmatrali, naime, par sa smerom. Moglo bi da bude sumnjivo da li neki takav entitet uopšte postoji, a ipak izgleda da izrazi poput „*R* je relacija koja važi

---

[1] Iako je za sve vrednosti promenljive istinita ili lažna, neka iskazna funkcija sâma nije ni istinita ni lažna, zato što ono što je označeno sa „bilo koji iskaz tipa o kojem je reč" samo nije iskaz.

između a i b" pokazuju da bi odbacivanje takvih entiteta vodilo paradoksima. Međutim, ovo pripada teoriji relacija te ćemo izlaganje o tome nastaviti u Glavi IX (§98).

Izgleda da iz ovoga što je do sada rečeno sledi da iskazna funkcija mora da se prihvati kao fundamentalna datost. Zatim, sledi da formalna implikacija i uključivanje klasa generalno ne mogu da se objasne pomoću relacije između tvrdnji, iako je u slučajevima u kojima iskazna funkcija tvrdi neku fiksiranu relaciju prema nekom fiksiranom terminu analiza na subjekat i na tvrdnju legitimna i nije bez značaja.

84. Ostaje da se još samo kaže nekoliko reči o izvođenju klasa iz iskaznih funkcija. Kada razmatramo x-ove takve da ϕx, gde je ϕx iskazna funkcija, mi uvodimo jedan pojam koji se u iskaznom računu upotrebljava krajnje nejasno – mislim na pojam *istine*. Među svim iskazima tipa ϕx razmatrali smo one koji su istiniti: odgovarajuće vrednosti od x daju nam klasu definisanu funkcijom ϕx. Mislim da moramo da smatramo da svaka iskazna funkcija koja nije nulta definiše klasu koja je označena sa „x-ovi takvi da ϕx". Tako uvek postoji pojam neke klase, a odgovarajući klasni pojam će uvek da bude u jednini, „x takvo da ϕx". Ali, može se posumnjati u to da – i zaista, protivrečnost pomenuta na kraju prethodne glave daje razlog za sumnju – uvek postoji definišući predikat za takve klase. Izuzimajući protivrečnost o kojoj stalno govorimo, ova teškoća može da deluje kao da je čisto verbalna: „biti x takvo da ϕx", moglo bi se reći, uvek može da se uzme kao predikat. Ali, s obzirom na našu protivrečnost, sve primedbe u vezi sa ovim predmetom treba uzeti sa izvesnim oprezom. Međutim, razmatranje ovog pitanje biće nastavljeno u Glavi X.

85. Poželjno je istaći da prema ovde zastupanoj teoriji iskaznih funkcija, ϕ u ϕx nije odvojen i razlučiv entitet: on živi u iskazima oblika ϕx i ne može da preživi analizu. U velikoj meri sumnjam da ovakvo gledište ne vodi u protivrečnost, ali izgleda da nam se ono nameće, a zahvaljujući njemu nam je ujedno i omogućeno da izbegnemo protivrečnost koja proizlazi iz suprotnog stanovišta. Ako bi ϕ bio razlučiv entitet, postojao bi iskaz koji tvrdi ϕ o njemu samom koji bismo mogli da označimo sa $\phi(\phi)$; takođe bi postojao i iskaz ne-$\phi(\phi)$ koji negira $\phi(\phi)$. U ovom iskazu ϕ možemo da smatramo promenljivom; tako dobijamo iskaznu funkciju. Onda se postavlja sledeće pitanje: da tvrdnja iz ove iskazne funkcije može da se tvrdi o samoj sebi. Tvrdnja predstavlja netvrdljivost o sebi, te otuda, ako može da se tvrdi o sebi, ne može, a ako ne može, ona to može. Ova protivrečnost se izbegava priznanjem da funkcionalni deo iskazne funkcije nije nezavisan entitet. Kako je protivrečnost o kojoj je reč blisko analogna onoj drugoj koja se odnosi na predikate koji nisu predikabilni samima sebi, i ovde možemo da se nadamo sličnom rešenju.

Glava VIII

PROMENLJIVA

86. Razmatranja u poslednjoj glavi su nam otkrila fundamentalnu prirodu promenljive; nijedan aparat koji sadrži tvrdnje ne omogućava nam da se oslobodimo razmatranja variranja jednog ili više elemenata u iskazu dok drugi elementi iskaza ostaju nepromenjeni. Promenljiva je možda pojam koji je najdistinktivnije matematički od svih pojmova; ona je zasigurno i jedan od najtežih pojmova za razumevanje. Ova glava predstavlja barem pokušaj da se promenljiva razume.

Teorija o prirodi promenljive koja proizlazi iz prethodnih razmatranja, okvirno uzev, jeste sledeća. Kada se u iskazu termin javlja kao termin, taj termin može da se zameni bilo kojim drugim terminom, dok preostali termini ostaju nepromenjeni. Tako dobijena klasa iskaza ima ono što možemo da nazovemo konstantnom formom, a ta konstantnost forme mora da se pretpostavi kao prvobitna ideja. Pojam klase konstantnih formi je fundamentalniji od opšteg pojma *klase* zato što ovaj drugi može da se definiše pomoću prethodnog, ali prethodni ne može da se definiše pomoću onog prvog. *Bilo koji* termin da uzmemo, izvestan broj bilo koje klase iskaza konstantne forme će sadržati taj termin. Tako je x promenljiva, ono što je označeno *bilo kojim terminom*, a ϕx iskazna funkcija, ono što je označeno iskazom forme ϕ u kojoj se x javlja. Možemo reći da x jeste x u *bilo kojem* ϕx, gde ϕx označava klasu iskaza koji proizlaze iz različitih vrednosti od x. Tako su pored iskaznih funkcija u pojmu promenljive pretpostavljeni i pojam *bilo koji* i pojam označavanja. Priznajem da je ova teorija puna teškoća, ali moram da je prihvatim i najmanje je osporiva od onih koje sam uspeo da smislim. Sada ću se prihvatiti posla da je detaljnije izložim.

87. Primetimo najpre da u matematici nema potrebe da se eksplicitno pominju *bilo koji*, *neki*, itd: formalna implikacija će izraziti sve ono što se zahteva. Ako se vratimo primeru o kojem smo već diskutovali u vezi sa označavanjem gde je a klasa, a b klasa klasâ, onda imamo:

„Bilo koje a pripada bilo kom b“ ekvivalentno je sa „"x je a" implicira da "u je b" implicira "x je u"“;

„Bilo koje a pripada jednom b“ ekvivalentno je sa „"x je a" implicira "postoji neko b (recimo) u, takvo da x je neko u"“[1];

„Bilo koje a pripada nekom b“ ekvivalentno je sa „postoji neko b, (recimo) u, takvo da "x je a" implicira "x je u"“;

I tako dalje za druge relacije razmatrane u Glavi V. Onda se postavlja sledeće pitanje: u kojoj meri ove ekvivalencije konstituišu definicije za *bilo koji*, *jedan* i *neki*, i u kojoj meri su ovi pojmovi implicirani samim simbolizmom?

Sa formalnog stanovišta, promenljiva je pojam karakterističan za matematiku. Štaviše, ona je sam metod tvrđenja opštih teorema koje znače nešto što je različito od intenzionalnih iskaza na koje logičari kao što je Bredli nastoje da ih svedu. Izgleda mi da je značenje tvrdnje koja se odnosi na sve ljude ili na bilo kog čoveka različito od značenja njoj ekvivalentne tvrdnje koja se odnosi na pojam *čovek*; moram priznati, istina koja je očigledna sama po sebi – tako

[1] Ovde je „postoji jedno c“ gde je c bilo koja klasa definisano tako kao da je ekvivalentno sa „ako p implicira p, a "x je c" implicira p za sve vrednosti od x, onda je p istinito“.

očigledna kao i činjenica da se iskaz koji se odnosi na Džona ne odnosi na *ime* Džon. Međutim, neću dalje da se na ovome zadržavam. Da promenljiva karakteriše matematiku jeste nešto što je opšteprihvaćeno, mada njeno prisustvo u elementarnoj aritmetici još nije generalno zapaženo. Elementarna aritmetika, ona koja se izlaže deci, okarakterisana je time što su *brojevi* koji se u njoj javljaju konstante; zbir koji može da dobije svaki školarac može da se dobije bez iskaza koji se odnose na *bilo koji* broj. Ali činjenica je da rezultat može tačno da se dokaže samo pomoću iskaza o *bilo kom* broju, te smo tako odvedeni od školske aritmetike ka aritmetici koja brojeve zamenjuje slovima i dokazuje opšte teoreme. Koliko se ovaj predmet razlikuje od neprijatelja iz detinjstva može neposredno da se sagleda u radovima Dedekinda (Dedekind)[1] i Štolca (Stolz)[2]. Zapravo, razlika se naprosto sastoji u tome što su naši brojevi sada promenljive, a ne više konstante. Sada možemo da dokazujemo teoreme koje se odnose na *n*, a ne na 3 ili 4 ili na bilo koji drugi pojedinačni broj. Dakle, za bilo koju teoriju matematike je od apsolutno suštinskog značaja da se razume priroda promenljive.

Nema sumnje da je u početku promenljiva shvatana na dinamičan način kao nešto što se menja tokom vremena, ili, kako se to kaže, kao nešto što sukcesivno uzima sve vrednosti izvesne klase. Ovo gledište ne može tek tako da se odbaci. Kada se dokazuje teorema koja se tiče *n*, *n* ne treba uzeti kao neku vrstu aritmetičkog Proteja, koji je 1 u nedelju, 2 u ponedeljak, itd., niti ga pak treba zamišljati kao nešto što istovremeno uzima sve vrednosti od *n*. Ako *n* predstavlja bilo koji ceo broj, ne možemo reći da je *n* broj 1 ili broj 2 ili bilo koji drugi pojedinačni broj. U stvari, *n* predstavlja upravo *bilo koji* broj, a to je nešto sasvim različito od svakog ili svih brojeva. Nije istina da je 1 bilo koji broj, mada je istina da sve ono što važi za bilo

---

[1] *Was sind und was sollen die Zählen?*, Brunswick, 1893.

[2] *Allgemeine Arithmetik*, Leipzig, 1885.

koji broj važi i za 1. Ukratko, promenljiva zahteva nedefinljivi pojam *bilo koji* koji smo objasnili u Glavi V.

88. Možemo da razlikujemo ono što može da se nazove pravom ili formalnom promenljivom od ograničene promenljive. *Bilo koji termin* je pojam koji označava pravu promenljivu; ako je *u* klasa koja ne sadrži sve termine, *bilo koje u* označava ograničenu promenljivu. Termini uključeni u objekat koji je označen definišućim pojmom promenljive nazivaju se *vrednosti* promenljive: tako je svaka vrednost promenljive konstanta. Izrazi poput „bilo koji broj je broj" stvaraju teškoću. Interpretirani pomoću formalne implikacije, oni ne izazivaju nikakvu teškoću jer naprosto tvrde da iskazna funkcija „*x* je broj implicira *x* je broj" važi za sve vrednosti od *x*. Ali, ako se „bilo koji broj" uzme kao određen objekat, jasno je da nije identičan ni sa 1, ni sa 2, ni sa 3, niti sa bilo kojim drugim brojem koji može da se navede. Činjenica je da pojam „bilo koji broj" označava neki jedan broj, samo ne neki određeni broj. To je tačno ono što karakteriše *bilo koji*, naime, da označava termin neke klase ali na nepristrasno distributivan način, tako da se ne daje prednost bilo kom terminu u odnosu na onaj drugi. Tako, mada je *x* broj i nijedan broj nije *x*, ovde ipak nema protivrečnosti, čim se prizna da *x* nije nijedan određeni broj.

Pojam ograničene promenljive može da se izbegne izuzev u slučaju iskaznih funkcija i to posredstvom uvođenja odgovarajuće hipoteze, naime, hipoteze koja izražava samo to ograničenje. Ali, ovo nije moguće u pogledu iskaznih funkcija. Ono x u ϕx, gde je ϕx iskazna funkcija, jeste neograničena promenljiva; ali sâmo ϕx je ograničeno na klasu koju možemo da nazovemo ϕ. (Treba se podsetiti da je ovde *klasa* fundamentalna, pošto smo videli da je bez cirkularnosti nemoguće otkriti bilo koju zajedničku karakteristiku na osnovu koje bi klasa bila definisana zato što je sam izraz „bilo koja zajednička karakteristika" već iskazna funkcija). Ali, čineći naše *x* uvek neograničenom promenljivom, mi možemo da govorimo o *tačno određenoj* promenljivoj (*the variable*) koja je pojmovno identična u logici, aritmetici, geometriji i u svim drugim formalnim disciplinama. *Termini* sa kojima imamo posla su uvek *svi* termini; tek na osnovu složenih pojmova koji se javljaju u svakoj grani matematike možemo da razlikujemo te grane jedne od drugih.

89. Sada možemo da se vratimo na prividnu definljivost *bilo koje*, *neko*, i *jedno od* preko formalne implikacije. Uzimajući da su *a* i *b* klasni pojmovi, razmotrimo iskaz „bilo koje *a* je jedno od *b*-ova". To mora da se interpretira kao da znači „*x* je jedno od *a*-ova implicira *x* je jedno od *b*-ova". Pre svega je jasno da ova dva iskaza ne *znače* istu stvar: jer, *bilo koje a* je pojam koji označava samo *a*-ove dok u formalnoj implikaciji *x* ne mora da bude jedno od *a*-ova. Ali, u matematici bismo mogli da se oslobodimo od „bilo koje *a* je jedno od *b*-ova" i da se zadovoljimo formalnom implikacijom: ovo je sa simboličkog stanovišta zapravo najbolji način postupanja. Prema tome, pitanje koje moramo da razmotrimo glasi: u kojoj meri *bilo koji*, *nek*i i *jedno od*, ako je to uopšte slučaj, ulaze u formalnu implikaciju? (Činjenica da se neodređeni član *a* [u engleskom jeziku] javlja u „*x* je jedno od *a*-ova [*an a*]" i „*x* je jedno od *b*-ova [*a b*]" irelevantna je zato što su ovi uzeti samo kao tipične iskazne funkcije). Najpre imamo klasu pravih iskaza od kojih svaki tvrdi neki konstantan termin tako da, ako je to jedno od *a*-ova, to je i jedno od *b*-ova. Zatim, razmatramo ograničenu promenljivu „bilo koji iskaz ove klase". Tvrdimo istinitost bilo kog termina uključenog među vrednosti ove ograničene promenljive. Ali, da bismo dobili predloženu formulu nužno je da prenesemo varijabilnost iskaza kao celine na njegov varijabilni termin. Na ovaj način zaista dobijamo „*x* je jedno od *a*-ova implicira *x* je jedno od *b*-ova". Ali, njegova geneza ostaje suštinska zato što ovde ono što želimo da izrazimo nije relacija između dve iskazne funkcije „*x* je jedno od *a*-ova" i „*x* je jedno od *b*-ova". Ako bi to bilo izraženo, onda ne bi trebalo da zahtevamo *isto x* u oba slučaja. Ovde je u igri samo jedna iskazna funkcija, naime, cela formula. Svaki iskaz ove klase izražava relaciju između jednog termina iskazne funkcije „*x* je jedno od *a*-ova" i jednog termina iskazne funkcije „*x* je jedno od *b*-ova“; i možemo reći, ako tako izaberemo, da cela formula izražava relaciju između *bilo kog* termina iz „*x* je jedno od *a*-ova“ i *nekog* termina iz „*x* je jedno od *b*-ova“. Nije tu toliko reč o implikaciji koja sadrži promenljivu koliko o varijabilnoj implikaciji. Ili opet, možemo reći da je prvo *x bilo koji* termin dok je drugo *x neki* termin, naime, ono prvo *x*. Imamo klasu implikacija koje ne sadrže promenljive i razmatramo *bilo koji član* te klase. Ako je *bilo koji* član istinit, na to je ukazano uvođenjem tipične implikacije koja sadrži promenljivu. Ta tipična implikacija jeste ono što se naziva *formalnom* implikacijom: ona je *bilo koji* član klase materijalnih implikacija. Otuda izgleda da je *bilo koji* pretpostavljeno u matematičkom simbolizmu, ali da *neki* i *jedan od* mogu legitimno da se zamene njihovim ekvivalentima pomoću formalnih implikacija.

90. Iako *neki* može da se zameni njegovim ekvivalentom pomoću *bilo koji*, jasno je da mu se time ne pridaje značenje. U stvari, postoji jedna vrsta dualiteta između *bilo koji* i *neki*: ako je data izvesna iskazna funkcija i ako su svi termini koji pripadaju toj iskaznoj funkciji tvrđeni, imamo *bilo koji*, dok ako je najmanje jedan od njih tvrđen (što daje ono što se naziva teoremom egzistencije) dobijamo *neki*. Iskaz ϕx tvrđen bez komentara kao u „*x* je čovek implicira *x* je smrtan“ mora da se tretira kao da znači da je ϕx istinito za *sve* vrednosti od *x* (ili za *bilo koju* vrednost), ali bi isto tako mogao da se tretira kao da znači da je ϕx istinito za *neke* vrednosti od *x*. Na ovaj način bismo mogli da konstruišemo račun sa dve vrste promenljivih, konjuktivnom i disjunktivnom, u kome se ova druga javlja svuda gde bi morala da se tvrdi teorema egzistencije. Ali, izgleda da ovaj metod ne nudi bilo kakvu praktičnu prednost.

91. Treba istaći da ono što je fundamentalno nisu partikularne iskazne funkcije već klasni pojam *iskazna funkcija*. Jedna iskazna funkcija je klasa svih iskaza koji nastaju varijacijom jednog jedinog termina, ali ovo ne sme da se uzme kao definicija iz razloga koje smo izložili u prethodnoj glavi.

92. Iz iskaznih funkcija sve druge klase mogu da se izvedu definicijom i to posredstvom pojma *takvo da*. Ako je data iskazna funkcija ϕx, termini takvi da kada je x poistovećeno sa bilo kojim od njih ϕx jeste istinito a klasa je definisana sa ϕx. Ovo je klasa kao mnogo, klasa u ekstenziji. Ne treba pretpostaviti da svaka tako dobijena klasa ima definišući predikat; na ovu temu ćemo se vratiti u Glavi X. Ali, mislim da moramo da pretpostavimo da klasa u ekstenziji jeste definisana bilo kojom iskaznom funkcijom, a posebno da *svi* termini formiraju klasu pošto su mnoge iskazne funkcije (na primer, sve formalne implikacije) istinite za *sve* termine. Ovde je, kao što je to bio slučaj i sa formalnim implikacijama, nužno da cela iskazna funkcija čija istinitost definiše klasu bude očuvana, a nepodeljena na izdvojene iskazne funkcije čak i tamo gde bi to bilo moguće za svaku vrednost od x. Na primer, ako su a i b dve klase definisane sa ϕx i ψx, njihov zajednički deo je definisan proizvodom $\phi x.\psi x$, gde proizvod treba da se izračuna za svaku vrednost od x, a x treba da se pusti da varira. Ako ovo ne učinimo, onda nemamo nužno *isto* x u ϕx i ψx. Tako, mi ne množimo iskazne funkcije nego iskaze: nova iskazna funkcija je klasa proizvoda odgovarajućih iskaza koji pripadaju prethodnim funkcijama, a nipošto nije proizvod od ϕx i ψx. Tek na osnovu definicije logički proizvod klasa definisanih sa ϕx i ψx predstavlja klasu definisanu kao $\phi x.\psi x$. A svuda gde je iskaz koji sadrži prividnu promenljivu tvrđen, ono što je zaista tvrđeno jeste istina, za sve vrednosti promenljive ili promenljivih, o iskaznoj funkciji koja odgovara celom iskazu, a to nikada nije relacija između iskaznih funkcija.

93. Iz ove diskusije proizlazi da je promenljiva vrlo komplikovan entitet koji nipošto nije lako ispravno analizirati. Najispravnija analiza koju ja mogu da pružim jeste sledeća. Ako je dat bilo koji iskaz (a ne iskazna funkcija), uzmimo da je a jedan od njegovih termina, a taj iskaz nazovimo $\phi(a)$. Onda, na osnovu osnovne ideje iskazne funkcije, ako je x bilo koji termin, možemo da razmotrimo iskaz $\phi(x)$ koji nastaje zamenom a sa x. Tako dolazimo do klase svih iskaza

$\phi(x)$. Ako su oni svi istiniti, $\phi(x)$ je jednostavno dokazano: onda se $\phi(x)$ može nazvati *formalnom* istinom. U formalnoj implikaciji $\phi(x)$, *za svaku vrednost od* x, izražava implikaciju, a tvrdnja $\phi(x)$ je tvrdnja o *klasi* implikacija a ne o nekoj pojedinačnoj implikaciji. Ako je $\phi(x)$ ponekada istinito, vrednosti od x koje $\phi(x)$ čine istinitim čine klasu koja je definisana sa $\phi(x)$; u ovom slučaju se za ovu klasu kaže da *postoji*. Ako je $\phi(x)$ lažno za sve vrednosti od x, za klasu definisanu sa $\phi(x)$ se kaže da ne postoji, i zaista, kao što smo videli u Glavi VI, takva klasa ne postoji ako su klase uzete u ekstenziji. Tako je x u izvesnom smislu objekat označen *bilo kojim terminom,* što ipak teško može strogo da se tvrdi pošto u iskazu mogu da se javljaju različite promenljive, dok se pretpostavlja da je objekat označen *bilo kojim terminom* jedinstven. Međutim, ovo otkriva jedan novi aspekt teorije označavanja, naime, da strogo govoreći, *bilo koji termin* ne označava skup termina već samo jedan termin, mada ne jedan pojedinačni određeni termin. Tako, *bilo koji termin* može da označava različite termine na različitim mestima. Možemo reći: bilo koji termin stoji u nekoj relaciji prema bilo kom terminu, što je sasvim različit iskaz od iskaza: bilo koji termin stoji u relaciji prema samom sebi. Tako promenljiva ima jednu vrstu individualnosti. Ovo nastaje, kao što sam nastojao da pokažem, iz iskaznih funkcija. Kada iskazna funkcija ima dve promenljive, moramo je smatrati dobijenom u toku više sukcesivnih koraka. Ako iskazna funkcija $\phi(x, y)$ treba da se tvrdi za sve vrednosti od x i y moramo prvo da razmotrimo tvrđenje, za sve vrednosti od y, iskazne funkcije $\phi(a, y)$, gde je a konstanta. Ovo ne sadrži y i može da se predstavi pomoću $\psi(a)$. Onda variramo a i tvrdimo $\psi(x)$ za sve vrednosti od x. Ovaj postupak je analogan dvostrukom integraljenju, a nužno je da formalno dokažemo da red kojim su varijacije uvođene nema nikakve posledice po rezultat. Tako izgleda da je individualnost promenljive objašnjena. Promenljiva nije naprosto *bilo koji termin* već bilo koji termin kada ulazi u iskaznu funkciju. Možemo reći da je x, ako je ϕx iskazna funkcija, termin *bilo kojeg* iskaza klase iskaza tipa ϕx. Dakle, izgleda da su u pogledu iskaznih funkcija, pojam klase, pojam označavanja i pojam *bilo koji* fundamentalni zato što su pretpostavljeni u upotrebljenom simbolizmu. Ovim zaključkom je analiza formalne implikacije, koja je bila jedan od glavnih problema Prvog dela, dovedena onoliko daleko koliko sam ja bio u stanju da to učinim. Neki čitalac će možda uspeti da je upotpuni i da odgovori na brojna pitanja koja sam ostavio bez odgovora.

Glava IX

RELACIJE

94. Neposredno nakon subjekat-predikatskih iskaza na red dolaze dva nova tipa iskaza koji izgledaju jednako jednostavno. To su oni iskazi u kojima se tvrdi neka relacija između dva termina, i oni u kojima se za dva termina kaže da su dva. Ovim drugima ćemo se posvetiti kasnije, a sada treba da razmotrimo one prve. Često se tvrdilo da svaki iskaz može da se svede na iskaz subjekat-predikatskog tipa, ali tokom čitave ove knjige pronaći ćemo obilje razloga za odbacivanje takvog tvrđenja. Međutim, moglo bi da se smatra da svi iskazi koji nisu subjekat-predikatskog tipa i koji ne tvrde brojeve mogu da se svedu na iskaze koji sadrže dva termina i jednu relaciju. Ovo stanovište je teže odbaciti, ali ćemo videti da je i ono podjednako neosnovano[1]. Prema tome, treba dozvoliti da postoje relacije koje imaju više od dva termina; ali, pošto su one kompleksnije, biće poželjnije da najpre razmotrimo one koje imaju samo dva termina.

Relacija između dva termina je pojam koji se javlja u iskazu u kojem postoje dva termina, ali koji se ne javljaju kao pojmovi[2]. Ova

---

[1] *Vide infra*, Deo IV, Glava XXV, §200.

[2] Ovaj opis, kao što smo već videli (§48), isključuje pseudo-relaciju subjekta prema predikatu.

poslednja karakteristika je nužna kako bi se razlikovali relacioni iskazi od iskaza „*a* i *b* su dva“ koji je identičan sa „*b* i *a* su dva“. Relacioni iskaz može da se simbolizuje sa *aRb* gde je *R* relacija, a *a* i *b* termini; a *aRb* će uvek, pod uslovom da *a* i *b* nisu identični, označavati različiti iskaz od iskaza *bRa*. Drugačije rečeno, karakteristika ove relacije sa dva termina sastoji se u tome što ona takoreći ide *od* jednog *ka* drugom terminu. Ovo je ono što možemo da nazovemo *smerom* relacije, a što, kao što ćemo videti, predstavlja izvor poretka i nizova. Mora se smatrati aksiomom da *aRb* implicira i da je implicirano relacionim iskazom *bR'a*, u kojem relacija *R'* ide od *b* ka *a*, a može ali ne mora da bude ista relacija kao *R*. Ali čak i kada *aRb* implicira i kada je implicirano sa *bR'a*, ova dva iskaza moramo da smatramo strogo različitim. Termin od kojeg relacija ide naziva se *referencija*, a termin ka kojem relacija ide naziva se *relat*. Smer relacije je fundamentalan pojam koji nije definljiv. Relacija koja važi između *b* i *a* uvek kada *R* važi između *a i b* nazvaćemo *konversom* od *R* i (prema Šrederu) označićemo je sa $\breve{R}$. Relacija između *R* i $\breve{R}$ je relacija suprotnosti ili razlike u pogledu smera, a ovo ne sme da se definiše (iako bi na prvi pogled to moglo da izgleda legitimno) ni u kojem slučaju pomoću gorenavedene uzajamne implikacija, već samo na osnovu toga što postoji u svim slučajevima u kojima se javlja data relacija. Ovo gledište se oslanja na izvesne iskaze u kojima su termini nesimetrično povezani sa njima samima, što znači da su povezani relacijom čiji konvers nije identičan sa njom samom. Sada moramo bliže da ispitamo ove iskaze.

95. Postoje izvesni pokušaji da se tvrdi da nijedan termin ne može da se poveže sa samim sobom, a i još uporniji pokušaji da se tvrdi da ako termin može da se poveže sa samim sobom, ta relacija onda mora da bude simetrična, to jest identična sa svojim konversom. Ali, oba ova pokušaja ne smeju da se podrže. Na prvom mestu, ako nijedan termin ne bi bio u relaciji sa samim sobom, nikada ne bismo mogli da tvrdimo samoidentitet, pošto je jasno da se tu radi o relaciji. Ali, pošto pojam identiteta postoji i pošto izgleda nepobitno da je svaki termin identičan sa samim sobom, moramo da dopustimo de termin može da bude u relaciji sa samim sobom. Međutim, identitet je simetrična relacija i može da se prihvati bez ikakve teškoće. Stvar postaje mnogo teža kada treba da prihvatimo nesimetrične relacije termina sa njima samima. Uprkos tome, sledeći iskazi izgledaju neporecivo: Biće jeste ili Biće ima Biće; 1 je jedan ili 1 poseduje jedinstvo; pojam je konceptualan; termin je termin; klasni pojam je klasni pojam. Svi ovi iskazi predstavljaju jedan od tri ekvivalentna tipa koje smo razlikovali na početku Glave V, a koji redom mogu da se nazovu subjekat-predikatski iskazi, iskazi koji tvrde relaciju predikacije i iskazi koji tvrde pripadnost nekoj klasi. Ono što onda moramo da ispitamo jeste činjenica da predikat može da se predicira samom sebi. Za našu sadašnju svrhu je nužno da naš iskaz uzmemo u onoj drugoj formi (Sokrat poseduje ljudskost), pošto subjekat-predikatska forma nije relaciona u gorenavedenom smislu. Kao tip takvih iskaza možemo uzeti iskaz „jedinstvo poseduje jedinstvo“. Sada je sasvim nepobitno da je relacija predikacije asimetrična pošto subjekti generalno ne mogu da se prediciraju njihovim predikatima. Tako „jedinstvo poseduje jedinstvo“ tvrdi relaciju jedinstva prema njemu samom i implicira drugu, naime, konverznu relaciju: jedinstvo prema samom sebi stoji istovremeno u relaciji subjekta prema predikatu i u relaciji predikata prema subjektu. E sad, ako su referencija i relat identični, jasno je da relat stoji prema referenciji u istoj relaciji u kojoj referencija stoji prema relatu. Tako, ako je u pojedinačnom slučaju konvers neke relacije bio definisan uzajamnom implikacijom, izgledalo bi da u ovom slučaju naša relacija ima dva konversa pošto „jedinstvo poseduje jedinstvo“ implicira dve različite relacije relata prema referenciji. Prema tome, konvers relacije moramo da definišemo time što aRb implicira i što je implicirano sa $b\breve{R}a$, *ma šta da su* a i b i nezavisno od toga da li R važi između njih ili ne. To će reći da su ovde a i b suštinski promenljive i da ako im pridamo bilo koju konstantnu vrednost možemo da uvidimo da $aR'b$ implicira i da je implicirano sa $bR'a$, gde je R' neka relacija drugačija od $\breve{R}$.

Dakle, u pogledu relacije dva termina, treba istaći tri stvari: (1) one sve imaju smer tako da pod uslovom da *a* i *b* nisu identični, možemo da razlikujemo *aRb* od *bRa*; (2) sve relacije imaju *konvers,* to jest relaciju $\breve{R}$ takvu da *aRb* implicira i da je implicirano sa $b\breve{R}a$, ma šta da su *a* i *b*; (3) izvesne relacije važe između termina i njega samog i takve relacije nisu nužno simetrične, to jest mogu da postoje dve različite relacije koje su jedna drugoj konverzne i koje obe postoje između termina i njega samog.

96. Za opštu teoriju relacija, a posebno za njen razvoj u matematici, izvesni aksiomi koji povezuju klase i relacije od velikog su značaja. Mora se prihvatiti da je stajati u datoj relaciji sa datim terminom predikat, tako da svi termini koji su u toj relaciju s tim terminom formiraju klasu. Treba prihvatiti da je, biti u jednoj datoj relaciji, generalno, takođe, predikat, tako da sve referencije s obzirom na tu relaciju formiraju klasu. Sledi da, kada je u pitanju konverzna relacija, svi relati takođe formiraju klasu. Ove dve klase su *domen* i *konverzni domen* relacije, a njihov logički zbir nazvaću *poljem* relacije.

Međutim, izgleda da aksiom, da sve referencije u odnosu na datu relaciju formiraju klasu, zahteva izvesno ograničenje i to zbog protivrečnosti pomenute na početku Glave VI. Ta protivrečnost može da se formuliše na sledeći način. Videli smo da izvesni predikati mogu da se prediciraju sebi samima. Razmotrimo sada one sa kojima to nije slučaj. To su referencije (a i relati) onoga što izgleda da je kompleksna relacija, naime, kombinacija nepredikabilnosti sa identitetom. Ali, ne postoji predikat koji je povezan sa svima njima i ni sa jednim drugim. Jer, taj predikat bi onda bio predikabilan ili nepredikabilan samom sebi. Ako je predikabilan samom sebi, on je jedna od onih referencija relacije kojom je bio definisan, te stoga na osnovu definicije nije predikabilan samom sebi. Obrnuto, ako nije predikabilan samom sebi onda je on opet jedna od navedenih referencija o kojima je svima (po hipotezi) predikabilan te, dakle, opet predikabilan samom sebi. To je protivrečnost koja pokazuje da sve referencije o kojima je ovde reč nemaju neki isključivi zajednički predikat, te stoga ako su definišući predikati suštinski za klase, one ne formiraju klasu.

Stvar može da se predstavi i drugačije. Definišući navodnu klasu predikata upotrebljeni su svi oni predikati koji su nepredikabilni samima sebi. Zajednički predikat svih tih predikata ne može da bude jedan od njih pošto za svaki od njih postoji barem jedan predikat (naime, on sam) kome on sam nije predikabilan. Ali opet, pretpostavljeni zajednički predikat ne može da bude ni neki drugi predikat jer, ako bi to bilo slučaj, on bi onda bio predikabilan samom sebi, što znači da bi bio član pretpostavljene klase predikata, pošto su oni svi definisani kao oni kojima je on predikabilan. Tako ne ostaje nijedan predikat više koji bi mogao da se pridoda svim predikatima koji su razmatrani.

Iz svega ovog sledi da svaka definljiva kolekcija termina ne formira klasu definisanu zajedničkim predikatom. Ovu činjenicu treba da imamo u vidu i moramo nastojati da otkrijemo koja svojstva mora da ima jedna kolekcija da bi uopšte formirala takvu klasu. Ono što je egzaktno ustanovljeno prethodnom protivrečnošću može da se formuliše na sledeći način: iskaz koji izgleda kao da sadrži samo jednu promenljivu može da ne bude ekvivalentan bilo kojem iskazu koji tvrdi da ta promenljiva ima izvestan predikat. Ostaje otvoreno pitanje da li svaka klasa mora da ima definišući predikat.

Da svi termini koji su u datoj relaciji prema nekom datom terminu formiraju klasu definisanu isključivo zajedničkim predikatom proizlazi iz teorije izložene u Glavi VII, po kojoj iskaz *aRb* može da se izanalizira na subjekat *a* i na tvrdnju *Rb*. Izgleda da je biti termin o kome *Rb* može da se tvrdi predikat. Ali, mislim da ne sledi da je biti termin o kome, za neku vrednost *y*, *Ry* može da se tvrdi, takođe predikat. Teorija iskaznih funkcija pak zahteva da svi termini koji imaju ovo poslednje svojstvo formiraju klasu. Ovu klasu ću da nazovem *domenom* relacije *R* baš kao i klasu referencija. Domen konverzne relacije ću onda da nazovem konverznim domenom ili klasom relata. Ova dva domena zajedno nazvaću *poljem* date relacije – ovo je pojam koji je uglavnom značajan za nizove. Tako, ako očinstvo uzmemo za relaciju, očevi konstituišu domen relacije, deca konverzni domen, a očevi i deca uzeti zajedno konstituišu polje.

Moglo bi da bude sumnjivo da li za iskaz *aRb* može da se kaže da tvrdi *aR* o *b* ili pak da samo *Řa* može da se tvrdi o *b*. Drugim rečima, da li je relacioni iskaz samo tvrđenje koje se odnosi na referenciju ili je takođe, tvrđenje koje se odnosi i na relat? Ako zauzmemo ovo drugo gledište u vezi sa (recimo) „*a* je veće od *b*", imaćemo četiri tvrđenja, naime, „je veće od *b*", „*a* je veće od"; „je manje od" i „*b* je manje od". Iako sam i ja sâm sklon da prihvatim ovo gledište, ne znam nijedan argument bilo u prilog jednoj, bilo u prilog drugoj strani.

97. Možemo da formiramo logički zbir i proizvod dve relacije ili klase relacija potpuno isto kao i u slučaju klasa, s tim što ovde imamo posla sa dvostrukom varijabilnošću. Pored ove kombinacije, imamo takođe i relativni proizvod koji, uopšte uzev, nije komutativan, te samim tim zahteva da broj činilaca bude konačan. Ako su *R* i *S* dve relacije, reći da njihov relativni proizvod *RS* povezuje dva termina *x* i *z* znači reći da postoji termin *y* sa kojim termin *x* stoji u relaciji *R* i da on sam stoji u relaciji *S* sa *z*. Tako je zet relativni proizvod žene i brata ili sestre i muža, a svekar relativni proizvod žene i oca, dok je relativni proizvod oca i žene majka ili maćeha.

98. Možemo biti u iskušenju da relaciju ekstenzionalno definišemo preko klase parova. Ovo ima formalnu prednost utoliko što omogućava da izbegnemo nužnost primitivnih iskaza koji tvrde da svaki par termina stoji u relaciji koja ne povezuje nijedan drugi par termina. Ali, paru je potrebno dati smer, razlikovati referenciju od relata: tako par postaje bitno različit od klase od dva termina, i mora sâm da se uvede kao primitivna ideja. Gledano s filozofskog stanovišta izgledalo bi da smer može da se izvede samo iz nekog relacionog iskaza i da tvrdnja da je *a* referencija a *b* relat već sadrži posve relacioni iskaz u kome su *a* i *b* termini, iako je tvrđena relacija samo opšta relacija referencije prema relatu. U stvari, postoje pojmovi poput *veće* koji se javljaju drugačije nego kao termini u iskazima koji imaju dva termina (§§48, 54); takve iskaze nijedno učenje o parovima ne može da izbegne. Otuda izgleda da je ispravnije zauzeti intenzionalno gledište o relacijama i poistovetiti ih pre sa klasnim pojmovima nego sa klasama. Ovaj postupak je praktičniji sa formalnog stanovišta, a izgleda i da je bliži logičkim činjenicama. Svuda u matematici se javlja isti neobičan odnos između intenzionalnog i ekstenzionalnog: simboli različiti od termina za promenljive (to će reći, od promenljivih za klasne pojmove i relacije) predstavljaju intenzije, dok su objekti kojima se aktualno bavimo uvek ekstenzionalni. Tako su u računu relacija relevantne klase parova, ali simbolizam se njima bavi posredstvom relacija ovo je sasvim slično onome, što je objašnjeno u vezi sa klasama, i izgleda da je nepotrebno da ta objašnjenja ponavljamo.

99. U delu *Pojava i Realnost* (*Appearance and Reality*), gospodin Bredli je, u Glavi III, razvio jedan argument protiv realnosti relacija koji je zasnovan na beskonačnom regresu koji nastaje zbog toga što relacija koja povezuje dva termina mora da bude povezana sa svakim od njih. Regres je nepobitan ako su relacioni iskazi uzeti kao fundamaentalni, ali je sasvim sumnjivo da on izaziva bilo kakvu logičku teškoću. Već smo imali priliku (§55) da razlikujemo dve vrste regresa, jednu koja naprosto stalno vodi novom impliciranom iskazu, i drugu koja je sadržana u značenju samog iskaza; od ove dve vrste, složili smo se da se prvoj od kako je rešen problem beskonačnosti nema šta prigovoriti, dok druga ostaje nedopustiva. Moramo da istražimo koja vrsta regresa se javlja u ovom slučaju. Može da se insistira da je deo samog značenja relacionog iskaza to da relacija o kojoj je reč treba da prema terminima stoji u relaciji koja je izražena time što je rečeno da ih povezuje, i da je to ono što obezbeđuje razliku koju smo ranije ostavili neobjašnjenom (§54) između povezujuće relacije i relacije po sebi. Međutim, protiv ovog gledišta može se reći da tvrdnja o relaciji između relacije i njenih termina, mada je implicirana, ipak nije deo prvobitnog iskaza i da se povezujuća relacija razlikuje od relacije po sebi nedefinljivim elementom tvrdnje koji iskaz razlikuje od pojma. Na ovo može da se odgovori da u pojmu „razlika između *a* i *b*“ razlika povezuje *a* i *b*, kao u iskazu „*a* i *b* se razlikuju“; ali, ovome može da se prigovori da uviđamo da je razlika između *α* i *b*, izuzev ukoliko nije u pitanju neki specifičan aspekt razlike, nerazlučiva od puke razlike. Tako izgleda da je nemoguće dokazati da je u tome sadržan beskonačni regres sporne vrste. Mislim da možemo da razlikujemo „*a* prevazilazi *b*“ i „*a* je veće od *b*“, mada bi bilo apsurdno negirati da ljudi uobičajeno hoće da kažu istu stvar ovim dvama iskazima. Na osnovu principa – za koji ne vidim način kako bih ga izbegao – da svaka prava reč mora da ima neko značenje, *jeste* i *od* moraju da čine deo od „*a* je veće od *b*“ koji onda sadrži više od dva termina i relaciju. Izgleda da *jeste* tvrdi da *a* stoji sa *veće* u relaciji referencije, dok *od* na sličan način izražava da *b* stoji prema *veće* u relaciji relata. Ali, „*a* prevazilazi *b*“ može da se uzme kao da izražava samo relaciju *a* prema *b* bez uključivanja ikojih implikacija daljih relacija. Takođe, moramo da zaključimo da relacioni iskaz *aRb* ne uključuje u svoje *značenje* nikakvu relaciju *a* ili *b* prema *R* i da je beskonačni regres, iako je nepobitan, logički sasvim bezopasan. Uz ove opaske možemo da ostavimo dalje razvijanje teorije relacije za kasnije delove ove knjige.

Glava X

PROTIVREČNOST

100. Pre nego što napustimo ova fundamentalna pitanja, neophodno je da bliže ispitamo već pomenutu jedinstvenu protivrečnost koja pogađa predikate koji nisu predikabilni samima sebi. Ali, pre nego što pokušamo da rešimo ovu zagonetku, poželjno je da načinimo neke dedukcije u vezi sa njom i da je formulišemo na različite načine. Mogu pomenuti da sam na nju naveden u nastojanju da uskladim Kantorov dokaz da ne postoji najveći kardinalni broj, sa vrlo plauzibilnom pretpostavkom da klasa svih termina (za koju smo videli da je bila suštinska za sve formalne iskaze) nužno ima najveći mogući broj članova[1].

Neka je *w* klasni pojam koji može da se tvrdi o sebi samom, to jest „*w* je *w*". Primeri su *klasni pojam* i negacije običnih klasnih pojmova kao na primer ne-čovek. Onda (*α*) ako je *w* sadržano u nekoj drugoj klasi *v*, a pošto *w* je *w*, *w* je onda *v*; prema tome, postoji termin klase *v* koji je klasni pojam koji može da se tvrdi o samom sebi. Stoga, kontrapozicijom, (*β*) ako je *u* klasni pojam čiji nijedan član nije klasni pojam koji može da se tvrdi o samom sebi, onda nijedan klasni pojam koji je sadržan u *u* ne može da se tvrdi o samom sebi.

---

[1] Vidi Deo V, Glavu XLIII, §344ff.

Stoga, nadalje, (γ) ako je *u* bilo koji klasni pojam, a *u*' klasni pojam klase onih članova od *u* koji nisu predikabilni sebi samima, ovaj klasni pojam je sadržan u samom sebi i nijedan od njegovih članova nije predikabilan sebi samom; dakle, na osnovu (β), *u*' nije predikabilno sebi samom. Stoga *u*' nije *u*' te prema tome nije ni *u* jer su svi termini od *u* koji nisu termini od *u*' predikabilni sebi samima, što nije slučaj sa *u*'. Dakle, (δ) ako je *u* bilo koji klasni pojam, onda postoji jedan klasni pojam sadržan u *u* koji nije član od *u* i koji je, takođe, jedan od onih klasnih pojmova koji nisu predikabilni sebi samima. Izgleda da se naše dosadašnje dedukcije teško mogu osporiti. Ali, ako sada uzmemo poslednju od njih i prihvatimo klasu onih klasnih pojmova koji ne mogu da se tvrde o sebi samima, uvidećemo da ova klasa mora da sadrži klasni pojam koji nije član sebe samog, a koji, ipak, ne pripada klasi o kojoj je reč.

Takođe, možemo da primetimo da, na osnovu onoga što smo dokazali u (β), klasa klasnih pojmova koji ne mogu da se tvrde o samima sebi i koju ćemo nazvati *w* sadrži kao svoje članove sve njene potklase, iako je lako dokazati da svaka klasa ima više potklasa nego termina. A pritom, ako je *y* bilo koji termin od *w*, a *w*' celo *w* izuzev *y*, onda *w*' budući potklasa od *w* nije *w*' već *w* i stoga *y*. Otuda, svaki klasni pojam koji je termin od *w* sadrži sve druge termine od *w* kao svoju ekstenziju. Sledi da je pojam *bicikl* kafena kašičica, a *kafena kašičica* bicikl. Ovo je potpuno apsurdno i može se dokazati koliko god se želi ovakvih apsurdnosti.

101. Ostavimo po strani ove paradoksalne posledice i pokušajmo da pružimo egzaktnu formulaciju same protivrečnosti. Na prvom mestu dolazi formulacija pomoću predikata koju smo već dali. Ako je *x* predikat, *x* može ali ne mora da bude predikabilno samom sebi. Uzmimo da je „nepredikabilan samom sebi“ predikat. Onda je samoprotivrečno pretpostaviti bilo da je ovaj predikat predikabilan sebi samom, bilo pretpostaviti da nije. U ovom slučaju zaključak deluje očigledno: „nepredikabilan samom sebi“ nije predikat.

Formulišimo sada istu protivrečnost pomoću klasnih pojmova. Klasni pojam može ali ne mora da bude termin svoje sopstvene ekstenzije. Izgleda da je „klasni pojam koji nije termin svoje sopstvene ekstenzije" klasni pojam. Ali, ako je on termin svoje sopstvene ekstenzije, onda je klasni pojam koji nije termin svoje sopstvene ekstenzije i obratno. Stoga, protivno tome kako nam se stvari čine, moramo da zaključimo da „klasni pojam koji nije termin svoje sopstvene ekstenzije" nije klasni pojam.

Formulisana preko klasa, protivrečnost izgleda još neobičnije. Klasa kao jedno može biti termin same sebe kao mnogo. Stoga, klasa svih klasa je klasa. Klasa svih termina koji nisu ljudi nije čovek, itd. Da li sve klase koje imaju ovo svojstvo formiraju klasu? Ako je to slučaj, da li je ona kao jedno član sebe kao mnogo, ili nije? Ako jeste, ona je jedna od klasa koje kao jedna (*as ones*) nisu članovi samih sebe kao mnogo i obratno. Tako ponovo moramo da zaključimo da klase koje kao jedna (*as ones*) nisu članovi sebe samih, kao mnoga ne formiraju klasu – ili, bolje, da ne formiraju klasu kao jedno zato što argument ne može da pokaže da ne formiraju klasu kao mnogo.

102. Sličan rezultat koji pak ne vodi protivrečnosti može da se dokaže za bilo koju relaciju. Neka je *R* relacija, i razmotrimo klasu *w* termina koji nisu u relaciji *R* prema samima sebi. Onda je nemoguće da bi tu trebalo da postoji bilo koji termin *a* sa kojim svi termini iz *w* i nikakvi drugi termini stoje u relaciji *R*. Jer, ako bi postojao neki takav termin, iskazna funkcija „*x* nije u relaciji *R* prema *x*" bila bi ekvivalentna sa „*x* je u relaciji *R* prema *a*". Zamenjujući svuda *x* sa *a*, što je legitimno pošto je ekvivalencija formalna, nailazimo na protivrečnost. Kada umesto *R* stavimo $\in$, relaciju termina prema klasnom pojmu koji se može tvrditi o njemu, ponovo dobijamo prethodnu protivrečnost. Razlog iz kojeg se ovde protivrečnost javlja jeste taj što smo uzeli kao aksiom da je bilo koja iskazna funkcija koja sadrži samo jednu promenljivu ekvivalentna tvrđenju pripadnosti određenoj klasi definisanoj tom iskaznom funkcijom. Ili je ovaj aksiom ili je princip da svaka klasa može da se posmatra kao jedan termin očigledno lažan i nema nikakve fundamentalne primedbe protiv toga da se i jedno i drugo odbaci. Ali, ako se odbaci prvi, onda se postavlja sledeće pitanje: koje iskazne funkcije definišu klase koje su pojedinačni termini kao i mnoga (*many*), a koje ne? Prave teškoće počinju upravo sa ovim pitanjem.

Bilo koji metod kojim nastojimo da ustanovimo jedan-jedan ili mnogo-jedan korelaciju između svih termina i svih iskaznih funkcija mora da izostavi barem jednu iskaznu funkciju. Takav metod bi postojao ako bi sve iskazne funkcije bile izražene u obliku ... $\in u$ pošto ovaj oblik korelira u sa ... $\in u$. Ali, nemogućnost svake takve korelacije se dokazuje na sledeći način. Neka je ϕ_x iskazna funkcija korelirana sa x; onda, ako ova korelacija pokriva sve termine, negacija $\phi_x(x)$ će biti iskazna funkcija pošto je ona iskaz za sve vrednosti od x. Ali, ona ne može biti uključena u korelaciju; jer, ako bi bila u korelaciji sa a, $\phi_a(x)$ bilo bi, za sve vrednosti od x, ekvivalentno sa negacijom $\phi_x(x)$; ali, ova ekvivalencija je nemoguća za vrednost a pošto ona čini $\phi_a(a)$ ekvivalentnim sa njegovom sopstvenom negacijom. Sledi da postoiji više iskaznih funkcija nego što postoji termina – rezultat koji deluje očigledno nemoguće, iako je dokaz uverljiv kao i bilo koji drugi dokaz u matematici. Uskoro ćemo videti kako se ova nemogućnost otklanja posredstvom teorije tipova.

103. Prvi metod koji nam se nudi sastoji se u traženju dvosmislenosti u pojmu $\in$. Ali u Glavi VI smo razlikovali razna značenja utoliko što je bilo koja distinkcija izgledala moguća, a upravo smo videli da se sa svakim značenjem pojavljivala ista protivrečnost. Međutim, pokušajmo da izrazimo tu protivrečnost koja se svuda javljala pomoću iskaznih funkcija. Pretpostavili smo da svaka iskazna funkcija koja nije nulta definiše klasu i da svaka klasa nesumnjivo može da se definiše pomoću iskazne funkcije. Stoga, reći da klasa kao jedno nije član sebe same kao mnogo, znači reći da klasa kao jedno ne zadovoljava funkciju kojom je ona sama kao mnogo definisana. Pošto sve iskazne funkcije osim onih koje su nulte definišu klase, sve ćemo ih potrošiti uzimanjem u obzir svih klasa koje imaju gorenavedeno svojstvo, izuzev onih koje to svojstvo nemaju. Ako bi bilo koja iskazna funkcija bila zadovoljena svakom klasom koja ima ovo svojstvo, ona bi stoga nužno bila zadovoljena klasom *w* svih klasa te vrste posmatranih kao jedan termin. Otuda, klasa *w* sama ne pripada klasi *w*, te stoga mora da postoji iskazna funkcija koja je zadovoljena terminima od *w* ali ne i samim *w*. Tako se protivrečnost ponovo pojavljuje i moramo pretpostaviti ili da ne postoji takav entitet kao što je *w* ili da ne postoji iskazna funkcija zadovoljena terminima od *w* i nikojim drugim.

Moglo bi se pomisliti da bi rešenje moglo da se sastoji u poricanju legitimnosti varijabilnih iskaznih funkcija. Ako za trenutak sa k_ϕ označimo klasu vrednosti koje zadovoljavaju ϕ, naša iskazna funkcija će onda biti poricanje $\phi(k_\phi)$ gde je ϕ promenljiva. Učenje iz Glave VII, prema kojem ϕ nije odvojiv entitet, može dovesti do toga da jedna takva promenljiva deluje nelegitimno, ali takva primedba može da se prevaziđe zamenom ϕ klasom iskaza ϕx ili relacijom ϕx prema x. Štaviše, nemoguće je da u potpunosti odbacimo varijabilne iskazne funkcije. U slučajevima u kojima se javlja varijabilna klasa ili varijabilna relacija, prihvatili smo da postoji varijabilna iskazna funkcija koja je stoga suštinska za tvrđenja o svakoj klasi i o svakoj relaciji. Na primer, definicija domena relacije i svih opštih iskaza koji konstituišu račun relacija bili bi odstranjeni odbijanjem da se prihvati ovaj tip varijacije. Stoga imamo potrebu za nekom dodatnom karakteristikom pomoću koje bismo razlikovali dve vrste varijacija. Mislim da ta karakteristika mora biti zasnovana na nezavisnoj varijabilnosti funkcije i argumenta. Uopšte uzev, sâmo ϕx je funkcija sa dve promenljive, ϕ i x; svaka od njih može da dobije konstantnu vrednost ili može da varira nezavisno od druge. Ali, u tipu iskaznih funkcija koje razmatramo u ovoj glavi, sâm argument je funkcija iskazne funkcije: umesto ϕx imamo $\phi\{f(\phi)\}$, gde je $f(\phi)$ definisano kao funkcija od ϕ. Stoga, kada ϕ varira, argument o kojem je ϕ tvrđeno takođe varira. Tako je „x je x" ekvivalentno sa: „ϕ može da se tvrdi o klasi termina koji zadovoljavaju ϕ", gde ta klasa termina predstavlja x. Ako se ovde varira ϕ, onda istovremeno varira i argument na način koji zavisi od varijacije samog ϕ. Ovo je razlog zašto $\phi\{f(\phi)\}$, iako predstavlja određeni iskaz, kada je x određeno ipak nije iskazna funkcija u uobičajenom smislu kada je x promenljivo. Iskazne funkcije ovog sumnjivog tipa mogu se nazvati *kvadratnom formom*, pošto se u njoj promenljiva javlja na način analogan onom u algebri, gde se promenljiva javlja u izrazu drugog stepena.

104. Možda je najbolji način da se predloženo rešenje formuliše to da se kaže da ako kolekcija termina može da se definiše samo varijabilnom iskaznom funkcijom, onda, iako klasa kao mnogo može da se prihvati, klasa kao jedno mora da se porekne. Ovakva formulacija pokazuje da iskazne funkcije mogu da variraju pod uslovom da se rezultujuća kolekcija nikad ne učini subjektom prvobitne iskazne funkcije. U takvim slučajevima samo postoji klasa kao mnogo, a ne klasa kao jedno. Smatrali smo aksiomom da u slučajevima u kojima postoji klasa kao mnogo mora da postoji i klasa kao jedno; ali, ovaj aksiom nije potrebno univerzalno prihvatiti, a izgleda i da je izvor protivrečnosti. Stoga njegovim odbacivanjem cela teškoća biva prevladana.

Možemo reći da je klasa kao jedno objekat istog *tipa* kao i njeni termini; to će reći, bilo koja iskazna funkcija $\phi(x)$ koja je smislena kada se x zameni jednim od termina, takođe je smislena kada se x zameni i klasom kao jedno. Ali, klasa kao jedno ne postoji uvek, a klasa kao mnogo je različitog tipa od termina klase čak i onda kada klasa ima samo jedan termin, što znači da postoje iskazne funkcije $\phi(u)$ u kojima u može biti klasa kao mnogo, a koje nemaju smisla ako u zamenimo jednim od termina te klase. Stoga, „x je jedan od x-ova“ uopšte nije iskaz ako je podrazumevana relacija, relacija termina prema njegovoj klasi kao mnogo i to je jedina relacija čije prisustvo nam iskazna funkcija uvek garantuje. Sa ovog stanovišta klasa kao mnogo može biti logički subjekat, ali u iskazima različite vrste od onih u kojima su njeni termini subjekti; za bilo koji objekat drugačiji od pojedinačnog termina, pitanje da li je to jedno ili mnogo imaće različite odgovore u zavisnosti od iskaza u kome se javlja. Tako imamo iskaz „Sokrat je jedan od ljudi", u kome su ljudi u množini, ali i iskaz „ljudi su jedna od vrsta životinja", u kome su ljudi u jednini. Ovo razlikovanje logičkih tipova je ključ za celu misteriju[1].

105. Drugi načini izbegavanja protivrečnosti koji bi mogli da se predlože deluju nepoželjno zato što uništavaju isuviše mnogo neophodnih vrsta iskaza. Moglo bi se predložiti da je identitet u „*x* nije *x*" uveden na nedopustiv način. Ali, već je pokazano da su relacije termina prema njima samima neizbežne i može se primetiti da su samoubice ili samoostvareni ljudi, poput junaka Smajlzove (Smiles) knjige *Samopomoć* (*Self-Help*), svi definisani relacijom prema samima sebi. Na sličan način je i identitet uključen u formalnu implikaciju, zbog čega ga je sasvim nemoguće odbaciti.

Jedan od načina da se izbegnu protivrečnosti, koji prirodno pada na pamet podrazumevao bi protivljenje pojmu *svi* termini ili *sve* klase. Moglo bi se insistirati da nijedan takav ukupan zbir nije shvatljiv i da, ako *sve* ukazuje na celinu, onda naše izbegavanje protivrečnosti zahteva da to prihvatimo. Ali, kao što smo već videli, i to mnogo puta, ako bi se ovo gledište podržalo protiv *bilo kog* termina, sve formalne istine bi postale nemoguće, a matematika, čija se svojstvenost sastoji u tome da izrazi istine koje se odnose na *bilo koji* termin, bila bi uništena jednim udarcem. Stoga, ispravno izražavanje formalnih istina zahteva pojam *bilo koji* termin ili *svaki* termin, ali ne i zbirni pojam *svi* termini.

Na kraju bi trebalo istaći da nijedna posebna filozofija nije bila podrazumevana u prethodnom razmatranju protivrečnosti koja izvire direktno iz zdravog razuma i koja se jedino može razrešiti napuštenjem neke zdravorazumske pretpostavke. Jedino hegelijanska filozofija koja se hrani protivrečnostima može ovde da ostane indiferentna, pošto ona svuda nailazi na slične probleme. U svakom drugom

---

[1] O ovome vidi Apendiks.

učenju, ovakav direktan izazov zahteva odgovor ili nevoljno priznavanje nemoći. Srećom, koliko mi je poznato, nijedna druga slična teškoća nije se pojavila ni u jednom drugom delu principa matematike.

106. Sada ukratko možemo da pružimo pregled zaključaka do kojih smo došli u Delu I. Čista matematika je definisana kao klasa iskaza koji tvrde formalne implikacije i koji ne sadrže nikakve druge konstante osim logičkih konstanti. Logičke konstante su: implikacija, relacija termina prema klasi kojoj pripada, pojam *takvo da*, pojam relacije i svi drugi pojmovi koji su obuhvaćeni formalnom implikacijom, a kao što smo videli (u §93), to su: iskazna funkcija, klasa[1], označavanje i *bilo koji* ili *svaki termin*. Ova definicija dovodi matematiku u vrlo blisku vezu sa logikom i čini je praktično identičnom sa simboličkom logikom. Ispitivanje simboličke logike opravdava prethodno pobrojavanje matematičkih nedefinljivih. U Glavi III smo pravili razliku između implikacije i formalne implikacije. Prva važi između bilo koja dva iskaza, pod uslovom da je prvi lažan ili drugi istinit, dok druga i nije relacija već tvrđenje, za svaku vrednost promenljive ili promenljivih, iskazne funkcije koja za svaku vrednost promenljive ili promenljivih tvrdi implikaciju. U Glavi IV pravili smo razliku između onoga što se može nazvati *stvarima* i predikata i relacija (uključujući i *je* predikacije među relacije, u tu svrhu). Pokazano je da je ova distinkcija povezana sa učenjem o supstanciji i atributima, ali nije vodila tradicionalnim rezultatima. U Glavama V i VI razvili smo teoriju o predikatima. U prvoj od njih je pokazano da se izvesni pojmovi koji su izvedeni iz predikata javljaju u iskazima koji se ne odnose na *njih same* nego na kombinacije termina poput onih na koje se ukazuje sa *svi*, *svaki*, *bilo koji*, *jedan*, *neki* i *the*. Kao što smo videli, pojmovi ove vrste su fundamentalni u matematici i oni nam omogućuju da tretiramo beskonačne klase

---

[1] Kao što smo odlučili, pojam *klase* uopšte bi kao nedefinljiv mogao da bude zamenjen pojmom klase iskaza definisanih nekom iskaznom funkcijom.

posredstvom iskaza konačne složenosti. U Glavi VI smo razlikovali predikate, klasne pojmove, pojmove klasa, klase kao mnogo i klase kao jedno. Složili smo se da su pojedinačni termini ili kombinacije poput onih koje rezultiraju iz *i* klase i to klase kao mnogo, a da su klase kao mnogo objekti označeni pojmovima klasa, koje predstavljaju množine klasnih pojmova. Ali, u ovoj glavi smo odlučili da je neophodno razlikovati pojedinačan termin od klase čiji je on jedini član i da se, prema tome, može prihvatiti nulta klasa.

U Glavi VII smo rezimirali istraživanje glagola. Kao što smo videli, subjekat-predikatski iskazi i iskazi koji izražavaju fiksiranu relaciju prema fiksiranom terminu, mogli bi da se razlože na subjekat i tvrđenje, ali ta analiza postaje nemoguća kada je dati termin uključen u iskaz na komplikovaniji način nego što je recimo referencija uključena u relaciju. Stoga je postalo neophodno da *iskaznu funkciju* uzmemo kao prvobitan pojam. Iskazna funkcija sa jednom promenljivom je bilo koji iskaz nekog skupa defnisan varijacijom samo jednog termina, dok drugi termini ostaju konstantni. Ali, uopšte uzev je nemoguće definisati ili izolovati konstantni element u iskaznoj funkciji pošto ono što ostaje kada se izvesni termin ukloni iz iskaza svuda gde se javlja uopšte ne predstavlja entitet one vrste koji se može otkriti. Isto tako, termin o kojem je reč ne sme naprosto biti izostavljen već mora biti zamenjen *promenljivom*.

Kao što smo videli, pojam promenljive je krajnje komplikovan – *x* nije naprosto *bilo koji* termin već bilo koji termin sa izvesnom individualnošću; ako ne bi bilo tako, bilo koje dve promenljive bile bi nerazlučive. Složili smo se da je promenljiva bilo koji termin *qua* termin u izvesnoj iskaznoj funkciji, i da se promenljive razlikuju na osnovu iskaznih funkcija u kojima se javljaju ili, u slučaju nekoliko promenljivih, na osnovu mesta koje zauzimaju u datoj višestruko varijabilnoj iskaznoj funkciji. Kao što smo rekli, promenljiva je *određeni* termin u *bilo kom* iskazu skupa koji je označen datom iskaznom funkcijom.

U Glavi IX je istaknuto da su relacioni iskazi nesvodivi i da svi skupa imaju *smer*; to će reći, kada je relacija pojam kao takav u iskazu sa dva termina, onda postoji neki drugi iskaz koji sadrži iste te termine i isti taj pojam kao takav, kao u slučaju „*A* je veće od *B*“ i „*B* je veće od *A*“. Iako su ova dva iskaza različita, imaju tačno iste konstituente. To je karakteristika relacija i primer onoga što se gubi analizom. Složili smo se da relacije moraju da se shvate intenzionalno, a ne kao klase parova[1].

Na kraju smo, u ovoj glavi, ispitali protivrečnost koja proizlazi iz prividne činjenice da, ako uzmemo da je w klasa svih klasa koje kao pojedinačni termini nisu članovi sebe samih kao mnogo, onda se može dokazati da klasa w kao jedno istovremeno i jeste i nije član same sebe kao mnogo. Predloženo rešenje sastoji se u tome da je neophodno razlikovati različite tipove objekata, naime, termine, klase termina, klase klasa, klase parova termina itd; i da iskazna funkcija ϕx generalno zahteva, da bi imala bilo kakvo značenje, da x pripada nekom određenom tipu. Tako bi $x \in x$ bilo besmisleno zato što $\in$ zahteva da je relat klasa sastavljena od objekata koji su različitog tipa od referencije. Kao što smo rekli, klasa kao jedno u slučajevima u kojima postoji istog je tipa kao njeni konstituenti, ali kvadratna iskazna funkcija, uopšte uzev, definiše samo klasu kao mnogo, a protivrečnost dokazuje da klasa kao jedno, ako uopšte postoji, zasigurno ponekada izostaje.

[1] Međutim, o tome vidi Apendiks.

Drugi deo

BROJ

Glava XI

DEFINICIJA KARDINALNIH BROJEVA

107. Razmotrili smo aparat opštih logičkih pojmova sa kojima matematika operiše. U ovom delu treba pokazati kako je ovaj aparat dovoljan da se bez novih nedefinljivih ili novih postulata ustanovi cela teorija kardinalnih celih brojeva kao posebna grana logike[1]. Poslednjih godina nijedna grana matematike nije napredovala više od teorije aritmetike. Ovaj pokret u prilog tačnosti u izvođenju koji je inaugurisao Vajerštras briljantno su nastavili Dedekind, Kantor, Frege i Peano, čiji je krajnji cilj dostignut posredstvom logike relacija. Kako je pak moderna matematička teorija nedovoljno poznata čak i najvećem broju matematičara, u prve četiri glave ovog dela izložiću skicu ove teorije u nesimboličkoj formi. Zatim ću da ispitam proces dedukcije sa filozofskog stanovišta kako bi se otkrilo, ako je moguće, da li su se bilo kakve neopažene prepostavke prikriveno uvukle u tok ove argumentacije.

108. Često se smatralo da su broj i pojedinačni brojevi nedefinljivi. Definljivost je reč koja u matematici ima precizan smisao,

[1] Kantor je pokazao da je neophodno razdvojiti izučavanje kardinalnih od izučavanja ordinalnih brojeva, koji su različiti entiteti, i od kojih su prvi prostiji, ali su obe vrste suštinske za običnu matematiku. O ordinalnim brojevima cf. Glave XXIX i XXXVIII *infra*.

mada je reč o definljivosti koja se odnosi na neki dati skup pojmova[1]. Neka je dat jedan skup pojmova; termin je definljiv pomoću ovih pojmova onda i samo onda kada je on jedini termin koji stoji prema nekom od ovih pojmova u izvesnoj relaciji, a koja je i sama jedan od pojmova o kojima je reč. Ali, filozofski posmatrano, reč *definicija* se, po pravilu, ne upotrebljava u ovom smislu; ona je zapravo ograničena na razlaganje ideje na njene konstituente. Ova upotreba je bila nepodesna i, mislim, neupotrebljiva; pored toga, izgleda da ona previđa činjenicu da celine po pravilu nisu određene kada su njihovi konstituenti dati, već da su i same novi entiteti (koji u nekom smislu mogu biti prosti) koji su u matematičkom smislu definisani izvesnim relacijama prema njihovim konstituentima. Prema tome, ubuduće ću ignorisati filozofski smisao i govoriću samo o matematičkoj definljivosti. Međutim, ovaj pojam ću ograničiti više nego što su to učinili profesor Peano i njegovi sledbenici. Oni su smatrali da različite grane matematike imaju različite nedefinljive, pomoću kojih su ostale ideje predmeta istraživanja o kojima je reč, definisane. Smatram – a to je značajan deo svrhe mog dokazivanja – da sva čista matematika (uključujući geometriju i čak racionalnu dinamiku) sadrži samo jedan skup nedefinljivih, naime, fundamentalne logičke pojmove koje smo razmatrali u Delu I. Kada su različite logičke konstante navedene, donekle je proizvoljno koju od njih smatramo nedefinljivom, iako je očigledno da u svakoj teoriji postoje neke koje moraju biti nedefinljive. Moje tvrđenje je da su sve nedefinljive čiste matematike ove vrste i da prisustvo svih drugih nedefinljivih ukazuje na to da naš predmet istraživanja pripada primenjenoj matematici. Pored toga, od tri vrste definicija koje prihvata Peano – nominalna definicija, definicija pomoću postulata i definicija pomoću apstrahovanja[2] – priznajem

---

[1] Vidi Peano, *F*. 1901, str. 6ff. i Padoa „Théorie algébrique des nombres entiers“, *Congrès*, Vol. III, str. 314ff.

[2] Cf. Burali-Forti, „Sur les différentes définitions du nombre réel“, *Congrès*, III, str. 294ff.

samo nominalnu: izgleda da su one druge neophodne zbog Peanovog odbijanja da prizna relacije delom fundamentalnog logičkog aparata i njegovom donekle preteranom žurbom da smatra individuom ono što je u stvari klasa. Ove primedbe će najbolje biti objašnjene razmatranjem njihove primene na definiciju kardinalnih brojeva.

109. U prošlosti je bilo uobičajeno, među onima koji su brojeve smatrali definljivim, da se učini izuzetak u pogledu broja 1, a da se ostalo definiše pomoću njega. Tako je 2 bilo 1+1, 3 je bilo 2+1 itd. Ovaj metod je bio primenljiv samo na konačne brojeve i pravljena je jedna nezanimljiva razlika između 1 i drugih brojeva; štaviše, značenje + uobičajeno, nije bilo objašnjeno. Danas smo u stanju da u velikoj meri popravimo ovaj metod. Prvo, pošto je Kantor pokazao kako da se bavimo beskonačnošću, postalo je i poželjno i moguće bavljenje fundamentalnim svojstvima brojeva na način koji je podjednako primenljiv i na konačne i na beskonačne brojeve. Drugo, logički račun nam je omogućio da damo egzaktnu definiciju aritmetičkog sabiranja, a treće, na taj način je postalo lako definisati i 0 i 1 kao i svaki drugi broj. Da bismo objasnili kako je ovo učinjeno, najpre ćemo da damo definiciju brojeva pomoću apstrahovanja. Zatim ću da istaknem formalne nedostatke te definicije i zameniću je nominalnom definicijom.

Prihvatljivo je da su brojevi suštinski primenljivi na klase. Kada je broj konačan, istina je da individue moraju biti nabrojane kako bi se dobio dati broj i mogu da se broje jedna po jedna, bez ikakvog pominjanja klasnog pojma. Ali, sve konačne kolekcije individua formiraju klase tako da ono što naposletku dobijamo jeste broj klase. Tamo gde je broj beskonačan, individue ne mogu da se nabroje već moraju da budu definisane intenzijom, to jest, na osnovu nekog zajedničkog svojstva na osnovu kojeg formiraju klasu. Stoga, kada je dat bilo koji klasni pojam, onda postoji izvestan broj individua na koje se taj klasni pojam primenjuje, a taj broj stoga može da se smatra svojstvom te klase. Ovo gledište o brojevima je učinilo mogućom celokupnu teoriju o beskonačnosti, pošto nas je oslobodilo neophodnosti nabrajanja individua čiji broj razmatramo. U osnovi, ovo gledište zavisi od pojma *svi* koji smo nazvali (§59) numeričkom konjunkcijom. Na primer, *svi ljudi* označava ljude povezane na izvestan način, te je time označeno da oni imaju broj. Slično, *svi brojevi* ili *sve tačke* označava brojeve ili tačke povezane na izvestan način te tako povezani brojevi ili tačke imaju broj. Dakle, brojeve možemo smatrati svojstvima klasa.

Sledeće pitanje je: pod kojim uslovima su dve klase istobrojne? Odgovor bi bio da su one istobrojne kada njihovi termini mogu da se koreliraju jedan-jedan tako da bilo koji termin jedne klase odgovara jednom i samo jednom terminu druge klase. To zahteva da bi tu morala da postoji neka jedan-jedan relacija čiji je je domen jedna klasa, a konverzni domen druga klasa. Tako, na primer, ako su u nekoj zajednici svi muškarci oženjeni i sve žene udate, a poligamija i poliandrija zabranjene, broj muškaraca mora biti isti kao i broj žena. Moglo bi se misliti da relacija jedan-jedan ne može da se definiše bez pozivanja na broj 1. Ali, to nije slučaj. Relacija je jedan-jedan kada, ako *x* i *x*' stoje u relaciji o kojoj je reč prema *y*, onda su *x* i *x*' identični; dok, ako *x* stoji u relaciji o kojoj je reč prema *y* i *y*' onda su *y* i *y*' identični. Tako bez pojma jedinstva postaje moguće definisati ono što se podrazumeva pod relacijom jedan-jedan. Ali, da bi se pokrio slučaj dve klase koje nemaju termine, neophodno je neznatno modifikovati gorenavedeno objašnjenje onoga što se podrazumeva kada se kaže da su dve klase istobrojne. Jer, ako termini ne postoje, onda oni ne mogu da budu korelirani jedan-jedan. Moramo reći: dve klase su istobrojne onda i samo onda kada postoji jedan-jedan relacija čiji domen obuhvata jednu klasu i koji je takav da je klasa korelata termina jedne klase identična sa drugom klasom. Iz ovoga sledi da dve klase koje nemaju termine uvek imaju isti broj termina; jer, ako uzmemo bilo koju jedan-jedan relaciju njen domen obuhvata nultu klasu, a klasa korelata nulte klase je opet nulta klasa. Kada su dve klase istobrojne, za njih se kaže da su *slične*.

Neki čitaoci bi mogli da pretpostave da je definicija onoga što se podrazumeva kada kažemo da su dve klase istobrojne sasvim nepotrebna. Mogli bismo reći da je način da se to uvidi brojanje obe klase. Takvi pojmovi su poput onih koji su, do sasvim nedavno, ometali predstavljanje aritmetike kao grane čiste logike. Jer, odmah nastaje pitanje: šta se podrazumeva pod brojanjem? Na ovo pitanje obično dajemo samo neki irelevantan psihološki odgovor, kao da se brojanje sastoji u sukcesivnim aktima pažnje. Da bismo izbrojali 10 pretpostavljam da je za to potrebno deset akata pažnje: to je nesumnjivo najkorisnija definicija broja 10! Brojanje zapravo ima jedno valjano značenje koje nije psihološko. Ali, to značenje je veoma složeno; ono je primenljivo samo na klase koje mogu da se dobro urede što, kao što je dobro poznato, ne važi za sve klase, a to daje samo broj klase u slučaju kada je taj broj konačan, što je redak i izuzetan slučaj. Prema tome, ne možemo da primenimo brojanje za definisanje broja o kome je reč.

Relacija sličnosti između klasa ima tri svojstva: refleksivnost, simetričnost i tranzitivnost, što će reći, ako su *u*, *v* i *w* klase, *u* je slično samom sebi; ako je *u* slično *v*, *v* je slično *u* i, ako je *u* slično *v*, a *v* slično w, onda je *u* slično *w*. Sva ova svojstva su lako izvodiva iz definicije. Ova tri svojstva relacije dao je i Peano, a zdrav razum upućuje na to da kada relacija važi između dva termina, onda ta dva termina imaju izvesno zajedničko svojstvo i obratno. Ovo zajedničko svojstvo ćemo nazvati njihovim brojem[1]. Ovo je defnicija brojeva pomoću apstrahovanja.

110. Ova definicija pomoću apstrahovanja i, uopšte uzev, postupak koji je u njoj upotrebljen pate od jednog apsolutno fatalnog formalnog nedostatka: ona ne pokazuje da samo jedan objekt zadovoljava definiciju[2]. Stoga, umesto da dobijemo *jedno* zajedničko

---

[1] Cf. Peano, *F*. 1901, §32, ˙0, napomena.

[2] O nužnosti ovog uslova cf. Padoa, *loc. cit*., str. 324. Međutim, izgleda da Padoa ne primećuje da *sve* definicije definišu samo individuu klase: kada je

svojstvo sličnih klasa koje je tačno onaj broj klasâ o kome je reč, mi dobijamo neku *klasu* takvih svojstava na osnovu kojih ne možemo da odlučimo koliko termina ta klasa sadrži. Da bismo ovo učinili jasnim, ispitajmo šta se u ovom slučaju podrazumeva pod zajedničkim svojstvom. Ono što podrazumevamo jeste to da svaka klasa prema izvesnom entitetu, njenom broju, stoji u relaciji u kojoj ne stoji ni prema čemu drugom, ali u kojoj sve slične klase (a ne drugi entiteti) stoje prema broju o kome je reč. To znači da postoji mnogo-jedan relacija koju svaka klasa ima prema svom broju i ni prema čemu drugom. Stoga, u meri u kojoj definicija pomoću apstrahovanja to može da pokaže, bilo koji skup entiteta prema svakom od kojih neka klasa stoji u izvesnoj mnogo-jedan relaciji, i od kojih prema jednom i samo jednom bilo koja data klasa stoji u toj relaciji, a koje su takve da sve klase slične datoj klasi stoje u toj relaciji prema jednom istom entitetu datog skupa izgledaju kao skup brojeva, a bilo koji entitet tog skupa jeste tačno određeni (*the*) broj neke klase. Onda, ako postoje mnogi takvi skupovi entiteta – a lako je pokazati da postoji beskonačno takvih skupova – svaka klasa će imati mnogo brojeva, a definicija neće moći da dâ onaj tačno određeni (*the*) broj klase. Ovaj argument je savršeno opšti i pokazuje da definicija pomoću apstrahovanja nikada nije logički validan postupak.

111. Postoje dva načina na koje možemo pokušati da iznađemo lek za ovaj nedostatak. Jedan od njih se sastoji u tome da se cela klasa entiteta definiše kao onaj tačno određeni broj klase, pri čemu je svaki od entiteta izabran iz jednog od gorenavedenih skupova entiteta prema kojima sve klase slične datoj klasi (i nijednoj drugoj) stoje u ovoj ili onoj mnogo-jedan relaciji. Ali, ovaj metod je praktično beskoristan pošto svi entiteti bez izuzetka pripadaju svakoj takvoj klasi, tako da će svaka klasa imati kao svoj broj klasu svih entiteta svake vrste i opisa. Drugi način je praktičniji i primenjuje se na sve slučajeve u kojima Peano upotrebljava definiciju pomoću

ono što je definisano klasa, to onda mora da bude samo termin neke klase klasâ.

apstrahovanja. Ovaj metod se sastoji u tome da se klasa svih klasa sličnih datoj klasi definiše kao broj te klase. Članstvo u ovoj klasi klasa (uzeto kao predikat) predstavlja zajedničko svojstvo svih sličnih klasa i nikojih drugih; štaviše, svaka klasa ovog skupa sličnih klasa mora da stoji prema tom skupu u relaciji u kojoj on ne stoji ni prema čemu drugom, a u kojoj svaka klasa stoji prema svom sopstvenom skupu. Tako ova klasa klasâ u potpunopsti ispunjava ove uslove i ima tu prednost da je određena kada je klasa data, a da je različita za dve klase koje nisu slične. Ovo je stoga jedna definicija broja klase u čisto logičkim terminima kojoj se ne može prigovoriti.

Smatrati broj klasom klasa na prvi pogled mora da izgleda kao potpuno nerazrešiv paradoks. Tako Peano (*F*. 1901, §32) primećuje da „ne možemo identifikovati broj od [klase] *a* sa klasom klasa o kojima je reč [to jest, klasom klasa sličnih klasi *a*], jer ovi objekti imaju različita svojstva". On nam ne kaže koja su to svojstva i, što se mene tiče, nisam u stanju da ih otkrijem. Njemu je verovatno izgledalo neposredno očigledno da broj nije klasa klasâ. Ali, može se reći nešto kako bi se ublažio privid paradoksalnosti u ovom gledištu. Prvo, reči kao što su *par* ili *trio* očigledno označavaju klasu klasa. Stoga moramo reći, na primer, da „dva čoveka" znači „logički proizvod klase ljudi i para" i da „postoje dva čoveka" znači „postoji klasa ljudi koja je takođe par". Drugo, kada se prisetimo da sam klasni pojam nije kolekcija već svojstvo na osnovu kojeg je kolekcija definisana, onda vidimo da ako broj definišemo kao klasni pojam a ne kao klasu, broj onda zapravo definišemo kao zajedničko svojstvo skupa sličnih klasa i ničega drugog. Ovo gledište u velikoj meri otklanja privid paradoksalnosti. Međutim, u ovom gledištu kao i generalno u vezi sa klasama i predikatima, postoji jedna filozofska teškoća. Moguće je da postoje mnogi predikati koji su zajednički izvesnoj kolekciji objekata a ne drugoj. U ovom slučaju, simbolička logika sve te predikate smatra ekvivalentnim i za bilo koji od njih se kaže da je ekvivalentan bilo kojem drugom. Stoga, ako je predikat definisan kolekcijom objekata, onda, uopšte uzev, ne bismo dobili pojedinačni predikat nego klasu predikata, a za ovu klasu predikata bi trebalo zahtevati novi klasni pojam, itd. Jedini klasni pojam koji bi nam tu bio na raspolaganju bio bi „predikabilnost date kolekcije termina i nikojih drugih". Ali, u razmatranom slučaju u kojem je kolekcija definisana izvesnom relacijom prema jednom od svojih termina postoji opasnost od logičke greške. Neka *u* bude klasa; rekli smo da je onda broj od *u* klasa klasâ sličnih klasi *u*. Ali, „sličan *u*" ne može biti stvarni pojam koji konstituiše broj klase *u*; jer, ako je klasa *v* slična klasi *u*, „slično klasi *v*" definiše istu klasu iako je to različit pojam. Tako se kao definicija predikata klase sličnih klasa zahteva neki pojam koji ne stoji ni u kakvoj posebnoj relaciji prema jednoj ili više konstituentnih klasa. U pogledu svakog pojedinačnog broja koji može biti naveden, bio on konačan ili beskonačan, takav predikat se *de facto* može otkriti, ali kada je sve što nam se kaže o tom broju to da je on broj neke klase *u*, bilo bi prirodno da se u definiciji tog broja javi naročito pozivanje na *u*. Međutim, to nije sporno. Sporno je zapravo to da je ono što je definisano isto bilo da upotrebljavamo predikat „slično klasi *u*" ili „slično klasi *v*" pod uslovom da je klasa *u* slična klasi *v*. Ovo pokazuje da ono što je definisano nije klasni pojam ili definišući predikat već sama klasa čiji su termini različite klase koje su slične klasi *u* ili klasi *v*. Dakle, moramo smatrati da su takve klase a ne predikati poput „slično klasi *u*" ono što konstituiše brojeve.

Rezimirajmo. Matematički posmatrano, broj nije ništa do klasa sličnih klasâ: ova definicija omogućava izvođenje svih uobičajenih svojstava brojeva, bilo konačnih ili beskonačnih, i (koliko mi je poznato) ona je jedina definicija koju je moguće formulisati pomoću fundamentalnih pojmova opšte logike. Ali, filozofski posmatrano, možemo prihvatiti da svaka kolekcija sličnih klasa ima neki zajednički predikat koji nije primenljiv ni na koje druge entitete izuzev na klase o kojima je reč i, ako bližim ispitivanjem možemo da ustanovimo da postoji izvesna klasa takvih zajedničkih predikata od kojih se jedan i samo jedan primenjuje na svaku kolekciju sličnih klasa, onda možemo (ako nam odgovara) da nazovemo tu posebnu klasu predikata klasom brojeva. Što se mene tiče, ne znam da li postoji neka takva klasa predikata, ali znam da je potpuno irelevantna u matematici. Bilo gde, gde matematika izvodi zajedničko svojstvo iz refleksivne, simetične i tranzitivne relacije, sve matematičke svrhe koje se tiču tog pretpostavljenog zajedničkog svojstva potpuno su ostvarene kada se ono zameni klasom termina koji stoje u datoj relaciji prema datom terminu, a upravo to je slučaj sa kardinalnim brojevima. Prema tome, ubuduće ću prihvatiti prethodnu definiciju pošto je ona sasvim tačna i adekvatna za sve matematičke upotrebe.

Glava XII

SABIRANJE I MNOŽENJE

112. U većini matematičkih objašnjenja aritmetičkih operacija nalazimo grešku u nastojanju da se da definicija koja će istovremeno biti primenljiva i na racionalne i čak na realne brojeve, bez dovoljno dugog prethodnog bavljenja teorijom celih brojeva. Za sada ćemo se baviti jedino celim brojevima. Definicija celih brojeva koju smo dali u prethodnoj glavi očigledno ne dopušta proširenje na razlomke, a čak se i apsolutna razlika između celih brojeva i razlomaka, pa čak i između celih brojeva i razlomaka čiji je imenilac jedinica, ne može dovoljno snažno istaći. Nastojaću da objasnim šta su racionalni razlomci i realni brojevi u nekom narednom delu ovog rada; pozitivni i negativni brojevi su za sada takođe isključeni. Celi brojevi kojima se sada bavimo nisu pozitivni već bez znaka. Stoga su sabiranje i množenje koje ćemo definisati u ovoj glavi primenljivi samo na cele brojeve, ali imaju tu odliku da su podjednako primenljivi i na konačne i na beskonačne cele brojeve. U stvari, za sada ću strogo isključiti sve iskaze koji uključuju bilo konačnost bilo beskonačnost brojeva o kojima je reč.

113. Postoji samo jedna fundamentalna vrsta sabiranja, naime, logička vrsta. Sve druge vrste mogu da se definišu pomoću ove i logičkog množenja. U ovoj glavi sabiranje celih brojeva moramo da definišemo logičkim putem. Kao što je objašnjeno u Delu I, logičko sabiranje je isto što i disjunkcija; ako su *p* i *q* iskazi, njihov logički zbir je iskaz „*p* ili *q*“, a ako su *u* i *v* klase, njihov logički zbir je klasa „*u* ili *v*“, to jest klasa kojoj pripada svaki termin koji pripada ili klasi *u* ili klasi *v*. Logički zbir dve klase *u* i *v* možemo da definišemo pomoću logičkog proizvoda dva iskaza kao klasu termina koji pripadaju svakoj klasi u kojoj su sadržane i *u* i *v*[1]. Ova definicija u suštini nije ograničena na dve klase već može da se proširi i na klasu klasâ, konačnu ili beskonačnu. Tako, ako je *k* klasa klasâ, logički zbir klasa koje čine *k* (skraćeno zbir od *k*) predstavlja klasu termina koji pripadaju svakoj klasi koja sadrži svaku klasu koja je termin od *k*. Ovaj pojam je u osnovi aritmetičkog sabiranja. Ako je *k* klasa klasâ od kojih nikoje dve nemaju nijedan zajednički termin (što se skraćeno zove isključujućom klasom klasâ), onda je aritmetički zbir brojeva raznih klasa od *k* broj termina u logičkom zbiru od *k*. Ova definicija je sasvim opšta i podjednako se primenjuje bilo da je *k* ili bilo koja od njenih konstituentnih klasa konačna ili beskonačna. Da bi se obezbedilo da rezultujući broj zavisi samo od *brojeva* raznih klasa koje pripadaju *k* a ne od pojedinačne klase *k* koja je slučajno izabrana, neophodno je dokazati (što je lako učiniti) da ako je *k*’ neka druga isključujuća klasa klasâ slična klasi *k*, a svaki član od *k* sličan svom korelatu u *k*’ i obratno, onda je broj termina u zbiru od *k* isti kao broj termina u zbiru od *k*’. Tako, na primer, pretpostavimo da *k* ima samo dva termina *u* i *v* i pretpostavimo da *u* i *v* nemaju zajednički deo. Onda je broj termina u logičkom zbiru od *u* i *v* zbir broja termina u *u* i *v*, a ako je *u*’ slično *u* i *v*’ slično *v*, i ako *u*’ i *v*’ nemaju zajednički deo, onda je zbir od *u*’ i *v*’ sličan zbiru od *u* i *v*.

114. U vezi sa ovom definicijom zbira brojeva treba primetiti da se ona ne može osloboditi od pozivanja na klase koje imaju brojeve o kojima je reč. Broj dobijen zbrajanjem je suštinski broj logičkog zbira izvesne klase klasâ ili zbira slične klase sličnih klasa.

[1] *F*. 1901, §2, Prop. 1˙0.

Neophodnost ovog pozivanja na klase nastaje kada se jedan broj javlja dva ili više puta u zbrajanju. Treba primetiti da brojevi o kojima je reč nemaju *poredak* zbrajanja, tako da nema takvog iskaza kakav je komutativni zakon: ovaj iskaz, na način na koji je uveden u aritmetiku, proizlazi samo iz manjkavog simbolizma koji uzrokuje poredak između simbola koji nemaju korelativan poredak u onome što simbolizuju. Ali, usled odsustva poretka, ako se jedan isti broj javlja dva puta u zbrajanju, onda ne možemo da razlikujemo njegovo prvo i drugo javljanje. Ako isključimo pozivanje na klase koje imaju broj o kome je reč, onda nema smisla pretpostaviti njegovo dvostruko javljanje: zbrajanje klase brojeva može biti definisano, ali u tom slučaju nijedan broj ne može biti ponovljen. U prethodnoj definiciji zbira, brojevi o kojima je reč su definisani kao brojevi izvesnih klasa, te stoga nije neophodno utvrditi da li se neki broj ponovio ili nije. Ali, da bi se bez pozivanja na pojedinačne klase defnisao zbir brojeva od kojih su neki ponovljeni, neophodno je prvo definisati množenje.

Ovo se može učiniti jasnijim razmatranjem posebnog slučaja kao što je 1+1. Jasno je da ne možemo sâm broj jedan uzeti dva puta, zato što postoji samo jedan broj 1 i ne postoje njegove dve instance; a ako bi se radilo o sabiranju broja 1 sa njim samim, shodno opštem principu simboličke logike, uvideli bismo da 1 i 1 daje 1. Isto tako, 1+1 ne možemo da definišemo ni kao aritmetički zbir izvesne klase brojeva. Ovaj metod može da se koristi u pogledu 1+2 ili bilo kojeg zbira u kojem se nijedan broj ne ponavlja, ali u pogledu 1+1 jedina klasa brojeva o kojoj se tu radi jeste klasa čiji je jedini član 1, i pošto ta klasa ima jedan član a ne dva, 1+1 možemo da definišemo pomoću nje. Stoga, potpuna definicija 1+1 glasi: 1+1 je broj klase *w* koja predstavlja logički zbir dve klase *u* i *v* koje nemaju zajednički termin a od kojih svaka ima samo jedan termin. Ono što je ovde bitno i što mora biti primećeno jeste da je logičko sabiranje klasa fundamentalan pojam, dok aritmetičko sabiranje brojeva u potpunosti od njega zavisi.

115. Opštu definiciju množenja dugujemo gospodinu A. N. Vajthedu[1]. Ona se sastoji u sledećem. Neka je *k* klasa klasâ od kojih nikoje dve nemaju nijedan zajednički termin. Formirajmo ono što se naziva multiplikativnom klasom od *k*, to jest klasu čiji je svaki termin klasa formirana izborom jednog i samo jednog termina iz svake od klasa koje pripadaju *k*. Onda je broj termina u multiplikativnoj klasi od *k* proizvod svih brojeva raznih klasa koje sačinjavaju *k*. Ova definicija, slično gorenavedenoj definiciji sabiranja, ima dve odlike koje joj obezbeđuju prednost u odnosu na bilo koju drugu do sada predloženu definiciju. Prvo, ona ne uvodi poredak među brojevima koji se množe, tako da nema potrebe za komutativnim zakonom koji se ovde, kao i u slučaju sabiranja, više tiče simbola nego onoga što je simbolizovano. Drugo, gorenavedena definicija od nas ne zahteva da odlučimo da li su brojevi o kojima je reč konačni ili beskonačni. Kantor je dao[2] definicije zbira i proizvoda *dva* broja koje ne zahtevaju odluku o tome da li su ovi brojevi konačni ili beskonačni. Ove definicije mogu da se prošire na zbir i proizvod *konačno* mnogo konačnih ili beskonačnih brojeva, ali ne omogućavaju definiciju zbira i proizvoda beskonačno mnogo brojeva. Ovaj težak nedostatak je uklonjen u gorenavedenim definicijama, što nam omogućava da se bavimo aritmetikom, kao što bi i trebalo, bez uvođenja razlike između konačnog i beskonačnog, sve dok ne poželimo da se njome bavimo. Dakle, Kantorove definicije imaju formalni nedostatak zato što uvode poredak među brojevima koji se sabiraju i množe, ali to je u njegovom slučaju puki nedostatak u pogledu izabranog simbolizma, a ne i u simbolizovanim idejama. Štaviše, u slučaju zbira i proizvoda *dva* broja nije praktično poželjno da se izbegne ovaj formalni nedostatak, zato što onda sve postaje nepodnošljivo nezgrapno.

116. Iz gorenavedene definicije lako je izvesti uobičajenu povezanost sabiranja i množenja koja se na taj nažin može ustanoviti.

---

[1] *American Journal of Mathematics*, Oct. 1902.

[2] *Math. Annalen*, Vol. XLVI, §3.

Ako je *k* klasa od *b* uzajamno isključujućih klasa od kojih svaka sadrži *a* termina, onda logički zbir od *k* sadrži $a \times b$ termina[1]. Takođe je jednostavno dobiti i definiciju a^b i dokazati asocojativne i distributivne zakone kao i formalne zakone za stepene poput $a^b a^c = a^{b+c}$. Ali, treba primetiti da stepenovanje ne moramo smatrati novom nezavisnom operacijom, zato što ono predstavlja samo jednu primenu množenja. Istina je da stepenovanje može biti nezavisno definisano kao što je to učinio Kantor[2], ali to ne daje nikakvu prednost. Štaviše, stepenovanje neizbežno uvodi ordinalne pojmove pošto a^b uopšte nije jednako sa b^a. Iz tog razloga ne možemo da definišemo rezultat beskonačnog broja stepenovanja. Stoga, stepene naprosto treba smatrati skraćenicama za proizvode u kojima su svi brojevi koji se množe međusobno jednaki.

Na osnovu svega do čega smo došli mogu se izvesti svi iskazi koji se podjednako tiču i konačnih i beskonačnih brojeva. Prema tome, sledeći korak jeste razmatranje razlike između konačnog i beskonačnog.

---

1 Vidi Vajthed, *loc. cit*.

2 *Loc. cit.*, §4.

Glava XIII

KONAČNO I BESKONAČNO

117. Svrha ove glave nije razmatranje filozofskih teškoća u vezi sa beskonačnošću; njih odlažemo do Dela V. Za sada ću samo ukratko da istaknem matematičku teoriju konačnog i beskonačnog i to kako se ona javlja u teoriji kardinalnih brojeva. Ovo je najfundamentalniji oblik i mora da se shvati pre nego što ordinalna beskonačnost može da bude adekvatno objašnjena[1].

Neka je *u* bilo koja klasa, a *u*' klasa formirana otklanjanjem jednog termina *x* iz *u*. Onda može, ali i ne mora, da se desi da je *u* slično *u*'. Na primer, ako je *u* klasa svih konačnih brojeva, a *u*' klasa svih konačnih brojeva osim 0, termini od *u*' su dobijeni dodavanjem 1 svakom terminu od *u*, a to korelira jedan termin od *u* sa jednim terminom od *u*' i obratno, pri čemu nijedan termin iz obe klase neće biti izostavljen niti uzet dva puta. Stoga je *u*' slično *u*. Ali, ako se *u* sastoji od svih konačnih brojeva sve do *n* gde je *n* neki konačan broj, a *u*' od svih konačnih brojeva osim 0, onda *u*' nije slično *u*. Ako postoji jedan termin *x* koji može da se otkloni iz klase *u* tako da preostane slična klasa *u*', lako je dokazati da, ako je neki drugi termin *y*

[1] O ovoj temi vidi Kantor, *Math. Annalen*, Vol. XLVI, §§5 i 6 gde se može naći većina onoga što sledi.

otklonjen umesto *x*, onda takođe dobijamo klasu sličnu klasi *u*. Kada je moguće otkloniti jedan termin od *u* tako da preostane klasa *u*' slična klasi *u*, onda kažemo da je *u beskonačn*a klasa. Kada to nije moguće, onda kažemo da je *u konačna* klasa. Iz ovih definicija sledi da je nulta klasa konačna pošto nijedan termin iz nje ne može da se otkloni. Takođe je lako dokazati da, ako je *u* konačna klasa, onda je klasa formirana dodavanjem jednog termina klasi *u* konačna; i obrnuto, ako je ova klasa konačna, takva je i klasa *u*. Iz ove definicije sledi da su brojevi konačnih klasa različitih od nulte klase izmenjeni oduzimanjem 1, dok su brojevi beskonačnih klasa neizmenjeni ovom operacijom. Lako je dokazati da isto važi i za dodavanje 1.

118. Među konačnim klasama, ako je jedna pravi deo druge, onda ta klasa ima manji broj termina od one druge. (Pravi deo je deo a ne celina). Ali, ovo više ne važi za beskonačne klase. Ova distinkcija zapravo predstavlja suštinski deo gorenavedenih definicija konačnog i beskonačnog. Od dve beskonačne klase, jedna može da ima veći ili manji broj termina od druge. Kaže se da je klasa *u* veća od klase *v* ili da ima veći broj od broja klase *v* kada ove dve klase nisu slične, a *v* je slično pravom delu od *u*. Poznato je da ako je *u* slično pravom delu od *v*, a *v* pravom delu od *u* (što je slučaj koji može da nastane samo kada su klase *u* i *v* beskonačne), onda je klasa *u* slična klasi *v* pošto je „*u* je veće od *v*" inkonzistentno sa „*v* je veće od *u*". Danas nije poznato da li jedan od dva različita beskonačna broja mora da bude veći a drugi manji, ali je poznato da postoji najmanji beskonačan broj, to jest broj koji je manji od bilo kog različitog beskonačnog broja. Taj najmanji broj je broj konačnih celih brojeva koji ću u ovom radu označavati sa α_0[1]. Ovaj broj može da ima nekoliko definicija u kojima se ne pominju konačni brojevi. Prvo, možemo ga definisati (kako je to implicitno učinio i Kantor[2])

---

[1] Kantor za ovaj broj upotrebljava hebrejsko slovo alef sa sufiksom 0 [$\aleph_0$] ali je takva notacija nepodesna.

[2] *Math. Annalen*, Vol. XLVI, §6.

pomoću principa matematičke indukcije. Ova definicija glasi: α_0 je broj bilo koje klase *u* koja predstavlja domen jedan-jedan relacije *R* čiji je konverzni domen sadržan u klasi *u*, ali nije koekstenzivan sa *u*, i koji je takav da, ako termin prema kojem *x* stoji u relaciji *R* nazovemo *sledbenikom* od *x*, ako je *s* bilo koja klasa kojoj pripada termin od *u* koji nije sledbenik nekog drugog termina od *u* i kome pripada sledbenik svakog termina od *u* koji pripada klasi *s*, onda svaki termin od *u* pripada klasi *s*. Ili, α_0 možemo da definišemo još i na sledeći način. Neka je *P* tranzitivna i asimetrična relacija i neka bilo koja dva različita termina polja relacije *P* stoje u relaciji *P* ili u njenom konversu. Nadalje, neka bilo koja klasa *u* koja je sadržana u polju relacije *P* i koja ima sledbenike (to jest termine prema kojima svaki termin klase *u* stoji u relaciji *P*) ima neposrednog sledbenika, to jest termin čiji prethodnici ili pripadaju klasi *u* ili prethode nekom terminu od *u*; neka postoji jedan termin polja relacije *P* koji nema prethodnike, ali neka svaki termin koji ima prethodnike ima sledbenike a takođe i neposrednog prethodnika; onda je α_0 broj termina u polju relacije *P*. Mogu se predložiti i druge definicije, ali pošto su sve ekvivalentne nije neophodno da ih umnožavamo. Sledeća karakteristika je značajna: svaka klasa čiji je broj α_0 može biti uređena u niz koji ima uzastopne termine, početak ali ne i kraj, i takva da je broj prethodnika bilo kojeg termina ovog niza konačan; a bilo koji niz koji ima ove karakteristike ima broj α_0.

Vrlo je lako dokazati da svaka beskonačna klasa sadrži klase čiji je broj α_0. Jer, neka je *u* takva klasa, i neka je x_0 termin od *u*. Onda je klasa *u* slična klasi dobijenoj otklanjanjem x_0, a koju ćemo nazvati klasom u_1. Stoga je u_1 beskonačna klasa. Iz nje možemo da otklonimo termin x_1 tako da se dobije beskonačna klasa u_2, itd. Niz termina $x_1, x_2, ...$ sadržan je u klasi *u* i taj niz je tipa koji ima broj α_0. Odavde možemo da pređemo na alternativnu definiciju konačnog i beskonačnog pomoću matematičke indukcije, a što sada moramo da razjasnimo.

119. Neka je *n* bilo koji konačan broj, broj dobijen dodavanjem 1 broju *n* takođe je konačan i različit je od *n*. Tako, počinjući sa 0 možemo da formiramo niz brojeva sukcesivnim dodavanjem 1. Ako tako izaberemo, konačne brojeve možemo da definišemo kao one brojeve koji mogu da se dobiju od 0 ovakvim koracima i koji se pokoravaju matematičkoj indukciji. To znači: klasa konačnih brojeva je klasa brojeva koja je sadržana u svakoj klasi *s* kojoj pripadaju 0 i sledbenik svakog broja koji pripada klasi *s*, gde je sledbenik nekog broja broj dobijen dodavanjem 1 datom broju. Sada, α_0 nije neki takav broj pošto na osnovu već dokazanih iskaza sledi da nijedan takav broj nije sličan delu samog sebe. Stoga, takođe, nijedan broj veći od α_0 nije konačan, prema novoj definiciji. Ali, pomoću nove defincije kao i pomoću stare, lako je dokazati da je svaki broj manji od α_0 konačan. Stoga su ove dve definicije ekvivalentne. Tako, konačne brojeve možemo da definišemo ili kao one koji mogu da se dosegnu matematičkom indukcijom, polazeći od 0 i povećavanjem za 1 pri svakom koraku, ili kao one brojeve klasa koje nisu slične delovima njih samih a koje su dobijene otklanjanjem pojedinačnih termina. Obe ove definicije su često upotrebljavane i značajno je imati na umu da jedna predstavlja posledicu druge. Obema ćemo se detaljno baviti mnogo kasnije; za sada je namera da se bez kontroverzi naznače okviri matematičke teorije konačnog i beskonačnog, a detalji će biti upotpunjeni u daljem toku ovog rada.

Glava XIV
TEORIJA KONAČNIH BROJEVA

120. Budući da sada jasno razlikujemo konačno i beskonačno, možemo se posvetiti razmatranju konačnih brojeva. I u najboljim raspravama o elementarnoj aritmetici[1] nije uobičajeno definisati broj ili pojedinačne konačne brojeve nego se počinje sa izvesnim aksiomima ili prvobitnim iskazima iz kojih se pokazuje da slede svi uobičajeni rezultati. Ovaj metod čini od aritmetike nezavisan predmet istraživanja umesto da je smatra, kao što se to čini u ovom radu, pukim razvijanjem izvesne grane opšte logike, bez novih aksioma ili nedefinljivih. Iz ovog razloga, izgleda da metod o kome je reč ukazuje na niži stepen analize od onog koji je ovde usvojen. Uprkos tome, ja ću početi predstavljanjem uobičajenijeg metoda, a onda ću nastaviti sa definicijama i dokazima onoga što je po pravilu smatrano nedefinljivim i nedokazivim. U tu svrhu ću se držati Peanovog izlaganja u *Formularu*[2] koje je, koliko mi je poznato, najbolje sa stanovišta tačnosti i strogosti. To izlaganje ima neprocenjivu vrednost utoliko što pokazuje da celokupna aritmetika može da se razvije iz tri

[1] Izuzev Fregeovih *Grundgesetze der Arithmetik* (Jena, 1893).

[2] *F*. 1901, deo II i *F.* 1899, §20ff. *F*. 1901 razlikuje se od ranijih izdanja po tome što iskaz „broj je klasa" čini prvobitnim iskazom. Ne mislim da je to neophodno pošto je implicirano sa „0 je broj". Prema tome, ja sledim ranija izdanja.

fundamentalna pojma (uz pojmove opšte logike) i pet fundamentalnih iskaza koji se odnose na te pojmove. Ono takođe dokazuje da, ako se ta tri pojma smatraju određenim pomoću tih pet iskaza, onda su tih pet iskaza međusobno nezavisni. Ovo je pokazano pronalaženjem interpretacije koja za svaki skup od četiri od ovih pet iskaza čini preostali iskaz lažnim. Prema tome, da bi se Peanova teorija povezala sa teorijom koju ovde prihvatamo, ostaje samo da se dâ definicija tri fundamentalna pojma i dokaz pet fundamentalnih iskaza. Kad se ovo ispuni, onda ćemo sa izvesnošću znati sve što sledi u teoriji konačnih celih brojeva.

Peanove tri nedefinljive su 0, *konačan ceo broj*[1] *i sledbenik*. Pretpostavlja se, kao deo ideje sledovanja (iako bi, mislim, bilo bolje to tvrditi posebnim aksiomom), da svaki broj ima jednog i samo jednog sledbenika. (Pod sledbenikom se, naravno, misli na neposrednog sledbenika). Peanovi prvobitni iskazi su sledeći: (1) 0 je broj; (2) ako je *a* broj, sledbenik od *a* je takođe broj; (3) ako dva broja imaju istog sledbenika, onda su ta dva broja identična; (4) 0 nije sledbenik nijednog broja; (5) ako je *s* klasa kojoj pripadaju i 0 i sledbenik svakog broja koji pripada klasi *s*, onda svaki broj pripada klasi *s*. Poslednji od ovih iskaza predstavlja princip matematičke indukcije.

121. Peano i Padoa su dokazali međusobnu nezavisnost ovih pet iskaza na sledeći način[2]. (1) Pridavajući uobičajeno značenje broju 0 i *sledbeniku*, a nazivajući *brojem* konačne cele brojeve različite od 0, istiniti su svi gorenavedeni iskazi osim prvog. (2) Pridavajući uobičajeno značenje broju 0 i *sledbeniku*, a nazivajući *brojem* samo konačne cele brojeve manje od 10 ili manje od bilo kog drugog pojedinačnog celog broja, svi gorenavedeni iskazi su istiniti, izuzev drugog. (3) Niz koji počinje jednim antiperiodom, a zatim, postaje periodičan (na primer, brojevi u decimalnoj ekspanziji koji počinju da se

---

[1] U ostatku ove glave, *broj* ću upotrebljavati kao sinonim za konačan ceo broj.

[2] *F*. 1899, str. 30.

ponavljaju nakon izvesnog broja mesta) zadovoljiće sve gorenavedene iskaze, osim trećeg. (4) Periodični niz (kao što su časovi na satu) zadovoljava sve prvobitne iskaze osim četvrtog. (5) Pridavajući *sledbeniku* značenje *veći od* 2, tako da sledbenik od 0 bude 2, a od 2 bude 4 i tako dalje, svi prvobitni iskazi su zadovoljeni osim petog, koji nije zadovoljen ako je *s* klasa svih parnih brojeva, uključujući 0. Stoga nijedan od pet prvobitnih iskaza ne može da se izvede iz preostala četiri.

122. Peano ističe (*loc. cit.)* da i druge klase, pored klase konačnih celih brojeva, takođe zadovoljavaju gorenavedenih pet iskaza. On kaže sledeće: „Postoji beskonačno mnogo sistema koji zadovoljavaju sve prvobitne iskaze. To potvrđuje, na primer, sistem dobijen zamenom *broja* sa *broj različit od* 0, a 0 sa 1. Svi sistemi koji zadovoljavaju prvobitne iskaze stoje u jedan-jedan korespondenciji sa brojevima. Broj je ono što se dobija iz svih ovih sistema apstrahovanjem: drugačije rečeno, broj predstavlja sistem koji ima sva i samo ona svojstva određena prvobitnim iskazima“. Izgleda mi da ovom zapažanju nedostaje logička ispravnost. Prvo se nameće pitanje: na koji način se razlikuju različiti sistemi koji podjednako zadovoljavaju prvobitne iskaze? Na koji način se, na primer, sistem koji počinje sa 1 razlikuje od sistema koji počinje sa 0? Na ovo pitanje mogu da se pruže dva različita odgovora. Možemo reći da su i 0 i 1 prvobitne ideje ili da je barem 0 takva i da stoga 0 i 1 mogu intrinsično da se razlikuju, kao što se razlikuju žuto i plavo. Ali, ako prihvatimo ovo gledište – koje će usput morati da se proširi na druge prvobitne ideje, broj i sledovanje – moraćemo da kažemo da su ova tri pojma ono što se naziva konstantama i da ne postoji nikakva potreba za bilo kakvim procesom apstrahovanja o kojem Peano govori u defniciji broja. Prema ovom metodu 0, broj i sledovanje, slično drugim nedefinljivim, izgledaju kao ideje koje jednostavno moraju da se priznaju kao takve. Njihovo priznavanje rezultuje onim što matematičari nazivaju teoremom egzistencije, to jest ono nam osigurava da brojevi zaista postoje. Ali, ovaj proces ostavlja nejasnim da li su brojevi *logičke* konstante ili ne i time čini aritmetiku, prema definiciji u Glavi I Prvog dela, *prima facie* granom primenjene matematike. Štaviše, jasno je da to nije proces koji Peano ima na umu. Drugi odgovor na ovo pitanje se sastoji u tome što bismo 0, broj i sledovanje tretirali kao klasu tri ideje koje pripadaju izvesnoj klasi trijâ definisanoj sa pet prvobitnih iskaza. Stoga je vrlo lako ustanoviti da tih pet prvobitnih iskaza postaju transformisani u nominalnu definiciju izvesne klase trijâ. Tada ne postoji više ništa što je nedefinljivo i nedokazivo u našoj teoriji koja je postala čisti deo logike. Ali 0, broj i sledovanje postaju promenljive pošto su određeni kao jedna od klasa trijâ. Štaviše, teorema egzistencije sada postaje sumnjiva pošto ne možemo znati da nekakav takav trio uopšte postoji, osim otkrićem barem jednog stvarnog trija ovih klasa. Međutim, *stvarni* trio bio bi konstanta te bi stoga bio potreban neki metod pridavanja konstantnih vrednosti 0, broju i sledovanju. Ono što možemo pokazati jeste da, ako postoji takav trio, onda postoji beskonačan broj njih. Jer, brisanjem prvog termina iz bilo koje klase koja zadovoljava postavljene uslove koji se tiču broja, uvek dobijamo klasu koja opet zadovoljava uslove o kojima je reč. Ali, pošto je značenje broja i dalje upitno, čak i ovo tvrđenje mora različito da se formuliše ako treba da izbegnemo cirkularnost. Pored toga, moramo se upitati: da li je svako apstrahovanje od svih sistema koji zadovoljavaju pet aksioma, kako to Peano zamišlja, logički moguće? Svaki termin klase jeste upravo onaj termin koji jeste i koji zadovoljava neki iskaz koji postaje lažan kada se zameni nekim drugim terminom te klase. Prema tome, ne postoji termin klase koji ima samo ona svojstva koja definišu tu klasu i nijednu drugu. Ono na šta se Peanovo apstrahovanje, zapravo, svodi jeste razmatranje klase i njenih promenljivih članova uz isključenje konstantnih članova. Jer, samo promenljivi član klase će imati samo ona svojstva kojima je klasa definisana. Stoga Peano nije uspeo da ukaže na bilo koje konstantno značenje 0, broja i sledovanja, niti je uspeo da pokaže da je bilo koje konstantno značenje moguće zato što nije dokazao teoremu egzistencije. Dakle, njegov jedini metod jeste reći da bar jedno takvo konstantno značenje može da se neposredno opazi, ali da je nedefinljivo. Ovaj metod nije logički neosnovan, ali se sasvim razlikuje od nemogućeg apstrahovanja koje Peano sugeriše. I dokaz o uzajamnoj nezavisnosti njegovih pet prvobitnih iskaza je neophodan jedino da bi se pokazalo da definicija klase trijâ koja je njima određena nije suvišna. Suvišnost nije logička greška već samo nedostatak onoga što se može nazvati stilom. Moj cilj u gore pruženom objašnjenju kardinalnih brojeva bio je da u opštoj logici dokažem da postoji jedno konstantno značenje koje zadovoljava gorenavedenih pet iskaza i da bi se za to konstantno značenje moralo reći da predstavlja broj, ili bolje, konačni kardinalni broj. Na ovaj način su novi nedefinljivi pojmovi i nedokazivi iskazi potpuno izbegnuti jer, kada smo pokazali da klasa trijâ o kojoj je reč ima bar jedan član, i kada je taj član upotrebljen za definisanje broja, onda lako pokazujemo da klasa trijâ ima beskonačan broj članova i tu klasu definišemo pomoću pet svojstava nabrojanih u Peanovim prvobitnim iskazima. Ovo je od vrlo velikog značaja za razumevanje veze između matematike i logike, a slični uvidi će se neprestano javljati u toku celog ovog rada.

123. Da bih jasnije pokazao razliku između moje i Peanove procedure ovde ću ponoviti definiciju klase koja zadovoljava njegovih pet prvobitnih iskaza, definiciju *konačnog broja* i dokaz, u slučaju konačnih brojeva, njegovih pet prvobitnih iskaza.

Klasa klasâ koje zadovoljavaju njegove aksiome je ista kao i klasa klasâ čiji je kardinalni broj α_0, to jest kao klasa klasâ koja *je* prema mojoj teoriji α_0. Najjednostavnija definicija glasi: α_0 je klasa klasâ od kojih je svaka domen neke jedan-jedan relacije *R* (relacije termina prema njegovom sledbeniku) koja je takva da postoji barem jedan termin koji ne sledi ni za jednim drugim terminom, svaki termin koji sledi neki termin i sam ima sledbenika, i klasa *u* je sadržana u bilo kojoj klasi *s* koja sadrži termin iz *u* koji nema prethodnike i, takođe, sadrži sledbenika svakog termina iz *u* koji pripada klasi *s*. Ova definicija uključuje Peanovih pet prvobitnih iskaza i nijedan više. Tako o svakoj takvoj klasi mogu da se dokažu svi uobičajeni iskazi aritmetike konačnih brojeva: sabiranje, množenje, razlomci, itd. mogu da se definišu, a celokupna analiza može da se razvije ukoliko nisu uključeni kompleksni brojevi. Ali, u celom tom razvijanju, značenje entiteta i relacija koji se javljaju, je u izvesnom stepenu neodređeno pošto su entiteti i relacije od kojih polazimo promenljivi članovi izvesne klase. Štaviše, u celom tom razvijanju ništa ne pokazuje da postoje takve klase kakve bi bile one o kojima se govori u definiciji.

U logičkoj teoriji kardinala polazimo sa suprotnog kraja. Najpre definišemo izvesnu klasu entiteta a onda pokazujemo da ta klasa entiteta pripada gore definisanoj klasi α_0. To se radi na sledeći način. (1) 0 je klasa klasâ čiji je jedini član nulta klasa; (2) broj je klasa svih klasâ sličnih bilo kojoj od njih. (3) 1 je klasa svih klasâ koje nisu nulte i koje su takve da, ako *x* pripada toj klasi, klasa bez *x* je nulta klasa; ili takve da, ako *x* i *y* pripadaju toj klasi, onda su *x* i *y* identični. (4) Pošto se pokaže da, ako su dve klase slične i ako se klasa koja se sastoji od jednog termina doda svakoj, zbirovi su slični, onda definišemo da, ako je *n* broj, $n+1$ je broj koji rezultira iz dodavanja jedinice klasi od *n* termina. (5) Konačni brojevi su oni koji pripadaju svakoj klasi *s* kojoj pripada 0 i kojoj pripada $n+1$ ako joj pripada *n*. Ovim je završena definicija konačnih brojeva. Tada u pogledu pet iskaza koje pretpostavlja Peano imamo: (1) 0 je broj. (2) Misleći pod $n+1$ na sledbenik od *n*, ako je *n* broj, onda je i $n+1$ broj. (3) Ako je $n + 1 = m + 1$, onda je $n = m$. (4) Ako je *n* bilo koji broj, $n+1$ je različito od 0. (5) Ako je *s* klasa a 0 pripada toj klasi i ako, kada joj pripada i *n*, pripada joj i $n+1$, onda joj pripadaju svi konačni brojevi. Tako svih pet suštinskih svojstava zadovoljava gore definisana klasa konačnih brojeva. Stoga klasa klasâ α_0 ima članove, a klasa *konačni broj* jeste jedan određeni član klase α_0. Dakle, sa matematičkog stanovišta ne postoji potreba za bilo kakvim novim nedefinljivim pojmovima ili nedokazivim iskazima u celokupnoj aritmetici i analizi.

Glava XV

SABIRANJE TERMINA I SABIRANJE KLASA

124. Pošto smo ukratko prikazali matematičku teoriju kardinalnih brojeva, sada je vreme da obratimo pažnju na filozofska pitanja koja proizlaze iz ove teorije. Počeću sa nekoliko preliminarnih primedbi u pogledu distinkcije između filozofije i matematike, kao i u pogledu uloge filozofije u jednoj takvoj oblasti kao što je zasnivanje matematike. Sledeće primedbe se ne moraju nužno shvatiti kao da su primenljive i na druge grane filozofije zato što su izvedene posebno iz razmatranja problema logike.

Distinkcija između filozofije i matematike je uopšte uzev distinkcija u pogledu tačke gledišta: matematika je konstruktivna i deduktivna, a filozofija je kritička i u izvesnom, bezličnom smislu, kontroverzna. Svuda gde imamo deduktivno rasuđivanje imamo i matematiku; ali, principi dedukcije, prepoznavanje nedefinljivih entiteta i razlikovanje takvih entieta, to su poslovi filozofije. U stvari, filozofija je uglavnom vezana za pitanje uvida i opažanja. Entiteti koji se opažaju takozvanim čulima, poput boja i zvukova, iz nekog razloga se obično ne smatraju kao da ulaze u domen filozofije, osim u pogledu njihovih apstraktnijih relacija; ali, izglada da je u velikoj meri sumnjivo da li takvo isključivanje može da se podrži. U svakom slučaju, pošto se ovaj rad u suštini ne bavi čulnim objektima, naše primedbe mogu da se ograniče na entitete koji se posmatraju kao postojeći u prostoru i vremenu. Ako želimo da saznamo bilo šta o tim entitetima, onda i oni takođe, u nekom smislu, moraju da se opaze kao i da se razlikuju jedan od drugog, a njihove relacije takođe moraju biti, barem delimično, neposredno shvaćene. Izvesni korupus nedefinljivih entiteta i nedokazivih iskaza mora da formira polazište u svakom matematičkom rasuđivanju, a to je polazište kojim se bavi filozof. Kada je filozofsko delo savršeno uspelo, njegovi rezultati mogu u celosti da se pretoče u premise iz kojih onda može da započne dedukcija. Iz same prirode takvih istraživanja sledi da rezultati mogu biti pobijeni, ali nikada ne mogu biti dokazani. Pobijanje će se sastojati u isticanju protivrečnosti i inkonzistentnosti, ali njihovo odsustvo nikada ne čini dokaz. Naposletku, sve zavisi od neposrednog opažanja i, strogo govoreći, filozofski argument se uglavnom sastoji u nastojanju da navede čitaoca da opazi ono što je sam autor opazio. Ukratko, argument po svojoj prirodi nije dokaz već nagovaranje. Stoga pitanje u ovoj glavi – postoji li neki nedefinljiv skup entiteta koji se obično nazivaju brojevima, a koji je različit od skupa gore definisanih entiteta? – predstavlja suštinski filozofsko pitanje koje se mora razrešiti putem uvida pre nego putem tačnih lanaca rasuđivanja.

125. U ovoj glavi ćemo razmotriti pitanje da li gornja definicija kardinalnih brojeva, na neki način, pretpostavlja fundamentalniji smisao broja. Postoji nekoliko načina na koje može biti uzeto da je to slučaj. Na prvom mestu, za individue koje čine klase izgleda da svaka, u nekom smislu, mora biti *jedno*, te bi se moglo misliti da bi jedan-jedan relacija mogla biti definisana bez uvođenja broja 1. Na drugom mestu, moglo bi biti sasvim u redu pitati da li klasa koja ima samo jedan termin može biti razlikovana od tog jednog termina. I, na trećem mestu, moglo bi se smatrati da pojam *klase* pretpostavlja broj, koji je u nekom smislu različit od onog gore definisanog: moglo bi se tvrditi da klasa nastaje iz zbira individua, kako na to upućuje reč *i*, i da logički zbir klasa sledi zbiru individua. Ova pitanja zahtevaju novo istraživanje značenja pojmova *jedan* i *klasa*. Nadam se da će nam u tome pomoći teorije izložene u Prvom delu.

Što se tiče činjenice da je svaka individua (ili termin) u nekom smislu *jedno*, to je naravno neosporno. Ali iz toga ne sledi da je pojam *jedno* pretpostavljen kada se o individuama govori: naprotiv, može biti da je pojam termina (ili individue) fundamentalan pojam, iz kojeg je pojam *jedno* izveden. Ovo gledište je usvojeno u Prvom delu i izgleda da nema razloga da se odbaci. I, kao u slučaju jedan-jedan relacije, oni se definišu pomoću identiteta, bez ikakvog pominjanja broja *jedan*, na sledeći način: *R* je jedan-jedan relacija ako, kada su *x* i *x*' u relaciji *R* sa *y*, i *x* je u relaciji *R* sa *y* i *y*', onda su *x* i *x*' identični, a takvi su i *y* i *y*'. Istina, ovde su *x*, *y*, *x*', *y*' svaki *jedan* termin, ali (izgledalo bi) da to ni u kom smislu nije pretpostavljeno u definiciji. Ovo uklanja (do novog istraživanja prirode klasâ) prvu od gornjih primedbi.

Sledeće pitanje se tiče distinkcije između klase koja sadrži samo jedan termin i tog jednog člana koji ona sadrži. Ako bismo mogli da identifikujemo klasu sa njenim definišućim predikatom ili klasnim pojmom, nikakva teškoća ne bi nastala na ovom mestu. Kada se izvestan predikat prida jednom jedinom terminu, jasno je da taj termin nije identičan sa tim predikatom. Ali, ako se jednom istom terminu pridaju dva predikata, morali bismo reći da su, premda su predikati različiti, klase koje oni definišu identične, to će reći, postoji samo jedna klasa koju oba definišu. Ako su, na primer, svi dvonošci bez perja ljudi i svi ljudi dvonošci bez perja, klasa *ljudi* i klasa *dvonožaca bez perja* su identične, premda se *ljudi* razlikuju od *dvonožaca bez perja*. Ovo pokazuje da klasa ne može biti poistovećena sa klasnim pojmom ili definišućim predikatom. Moglo bi da izgleda da tu ništa nije ostalo izuzev aktualnih termina, tako da, kada postoji samo jedan termin, onda bi taj termin morao da bude identičan sa klasom. Ipak, iz više formalnih razloga ovo gledište ne može dati značenje simbolima koji stoje umesto klasa u simboličkoj logici. Razmotrimo, na primer, klasu brojeva koji, dodati broju 3, daju broj

5. To je klasa koja ne sadrži termine izuzev broja 2. Ali, mi možemo reći da je broj 2 član ove klase, to će reći, on prema klasi stoji u onoj posebnoj nedefinljivoj relaciji u kojoj termini stoje prema klasama kojima pripadaju. Ovo, izgleda, ukazuje na to da se jednočlana klasa razlikuje od termina koji je čini. Ovo je značajna poenta u Peanovoj simboličkoj logici i ona je povezana sa njegovom distinkcijom između relacije individualnog termina prema njegovoj klasi i relacije klase prema drugim klasama u kojima je on sadržan. Tako je klasa brojeva koja, kada se doda broju 3 biva 5, sadržana u klasi brojeva ali nije broj; dok je 2 broj, a ne klasa sadržana u klasi brojeva. Identifikovanje ove dve relacije, koje Peano razlikuje, uzrok je nereda u teoriji beskonačnosti, i ono razara formalnu preciznost mnogih argumenata i definicija. Izgleda nesumnjivo da je Peanova distinkcija tačna, i da mora biti nađen neki način razlikovanja termina od klase koja se samo od njega sastoji.

126. Da bismo razrešili ovaj problem, nužno je preći na našu treću teškoću, i ponovo razmotriti sam pojam *klase*. Izgleda da je ovaj pojam povezan sa pojmom *označavanja* koji je objašnjen u Prvom delu, u Glavi V. Tamo smo istakli pet načina označavanja, od kojih se jedan naziva *numerička konjunkcija*. Na ovu vrstu se ukazuje sa *svi*. Ova vrsta konjunkcije izgleda da je ona koja je relevantna u slučaju klasa. Na primer, budući da je *čovek* klasni pojam, *svi ljudi* će biti klasa. Ali to neće biti *svi ljudi* kao pojam koji će biti klasa, nego ono što taj pojam označava, to će reći, izvesni termini kombinovani na poseban način, na koje se ukazuje sa *svi*. Ovaj način kombinovanja je od suštinskog značaja pošto je jasno da *bilo koji čovek* ili *neki čovek* nije klasa, premda oboje označava kombinacije upravo istih termina. Moglo bi izgledati, ako identifikujemo klasu sa numeričkom konjunkcijom njenih termina, kao da moramo da negiramo razliku termina od klase čiji je jedini član taj termin. Ali u Glavi X smo videli da klasa uvek mora biti objekat različitog logičkog tipa od njenih članova, i da, da bi se izbegao iskaz $x \in x$, ovo učenje mora da se proširi čak i na klase koje imaju samo jedan član. Ne mogu da kažem u kojoj meri nam ovo zabranjuje da identifikujemo klase sa numeričkim konjunkcijama; u svakom slučaju, mora da se napravi razlika između termina i klase čiji je on jedini član, a ipak klase moraju biti uzete ekstenzionalno, u meri u kojoj su određene, kada su njihovi članovi dati. Takve klase je Frege nazvao *Werthverläufe*[*], a kardinalne brojeve treba smatrati klasama u tom smislu.

127. Međutim, i dalje postoji izvesna teškoća i ona se sastoji u sledećem: izgleda da klasa ne predstavlja mnogo termina, nego da je sama jedan jedinstveni termin čak i kada ima više termina koji su članovi klase. Izgledalo bi kao da ova teškoća ukazuje na to da klasa ne može biti poistovećena sa svim svojim članovima, već da bi je pre trebalo posmatrati kao celinu koju oni čine. Da bi se, međutim, ova teškoća ustanovila na neprigovorljiv način, moramo isključiti jedno i mnoštvo iz govora o njoj, pošto ovi pojmovi moraju biti definisani pomoću pojma *klase*. Bilo bi dobro da ovde razjasnimo nešto što će zasigurno da padne na pamet čitaocu. Da li je pojam *jedno* pretpostavljen uvek kada govorimo o *nekom* terminu? Moglo bi da se kaže da termin znači *jedan* termin, i zbog toga ništa ne može da se tvrdi o terminu, a da se ne pretpostavi *jedno*. U nekom smislu *jednog*, ovaj iskaz izgleda nesumnjiv. Štagod da jeste, jedno je: biće i jedno su, kako primećuje Lajbnic, uzajamno zamenljivi termini[1]. Teško je biti siguran u kojoj meri su ovakva tvrđenja samo gramatička. Jer, premda štagod jeste jedno, ipak je isto tako istina da štagod jeste, jeste i mnogo. Ali ovde se radi o objektu koji je klasa, to će reći, vrsta objekata označena sa *svi ljudi*, ili bilo kojim pojmom klase, i nije nešto *jedno* izuzev kada klasa ima samo jedan termin i ono ne sme biti učinjeno jedinstvenim logičkim subjektom. Kao što smo rekli u Glavi VI Prvog dela, u prostim slučajevima imamo termin pridružen klasi koji je klasa kao celina, ali ovo ponekad izostaje i u nekom smislu

---

[*] Fregeov pojam *Werthverlauf* (*einer Funktion*) prevodi se kao tok vrednosti (funkcije) (prim. stručnih redaktora prevoda).

[1] Ed. Gerhardt, II, str. 300.

nije identično sa klasom kao mnogo. Ali u ovom gledištu ne postoji protivrečnost kao u teoriji da glagoli i pridevi ne mogu biti subjekti; mogu da se formulišu tvrđenja o klasama kao o mnogom, ali subjekat tih tvrđenja je mnogo a ne jedno, kao u drugim tvrđenjima. „Braun i Džons su dva prosca gospođice Smit“ je tvrđenje o klasi „Braun i Džons“, ali ne o klasi posmatranoj kao pojedinačan termin. Tako jednost (*one-ness*) pripada, na neki način, izvesnom tipu logičkog subjekta, ali o klasama koje nisu jedno ipak možemo nešto da tvrdimo. Otuda zaključujemo da je u izrazima o terminu jednost implicirana ali ne i pretpostavljena i „termin“ mora biti smatran nedefinljivim.

128. Međutim, izgleda da je nužno napraviti jednu razliku u pogledu upotrebe *jedno*. Smisao u kojem je svaki objekat *jedno*, a koji je izgleda obuhvaćen u govoru o *nekom* objektu, taj smisao je, kako nas uverava Frege[1], vrlo nejasan, pošto je podjednako primenljiv na sve. Ali, smisao u kojem se za klasu može reći da ima jedan član, taj smisao je sasvim precizan. Klasa *u* ima jedan član kada *u* nije nula, a „*x* i *y* su *u*-ovi“ implicira „*x* je identično sa *y*“. Ovde je jednost osobina klase koja se stoga može nazvati jediničnom klasom. Ono *x* koje je njen jedini član i sâmo može biti klasa mnogih termina, što pokazuje da smisao *jednog*, obuhvaćen u *jednom terminu* ili *nekom terminu*, nije relevantan u aritmetici zato što mnogi termini kao takvi, mogu biti pojedinačan član klase klasa. *Jedno* se, prema tome, ne sme tvrditi o terminima već samo o klasama koje imaju jedan član u gore definisanom smislu, to će reći, „*u* je jedno“ ili, bolje, „*u* je jedinica“ znači „*u* nije nula, a "*x* i *y* su *u*-ovi" implicira "*x* i *y* su identični"“. Član od *u* u ovom slučaju sam neće biti ni nijedan, ni jedno, ni mnogo ako je *u* klasa klasâ; ali ako je *u* klasa termina, član od *u* neće biti ni nijedan, ni jedno ni mnogo, već će naprosto biti termin.

---

[1] *Grundlagen der Arithmetik*, Breslau, 1884, str. 40.

129. Opšte mišljenje u pogledu konačnih brojeva jeste da oni proizlaze iz brojanja ili, kako bi neki filozofi radije rekli, iz sintetizovanja. Nažalost, oni koji zastupaju ovo gledište nisu analizirali pojam brojanja: da su to učinili, uvideli bi da je on vrlo složen i da pretpostavlja upravo brojeve koje bi trebalo da generiše.

Proces brojanja, naravno, sadrži i jedan psihološki aspekt, ali je on posve irelevantan za teoriju aritmetike. Ono što sada želim da istaknem jeste logički proces koji je sadržan u aktu računanja, a on se sastoji u sledećem. Kada kažemo jedan, dva, tri, itd. mi nužno imamo u vidu neku jedan-jedan relaciju koja važi između brojeva upotrebljenih u brojanju i objekata koji se broje. Pod „jedan, dva, tri" misli se da su objekti koji su označeni ovim brojevima njihovi korelati, s obzirom na relaciju koju tu imamo u vidu. (Ova relacija je uglavnom krajnje složena i može da ukazuje na naše stanje duha u datom trenutku). Tako stavljamo u korelaciju klasu objekata sa klasom brojeva, a klasa brojeva se sastoji od svih brojeva od 1 do nekog broja n. Jedini neposredni zaključak koji može da se izvede iz ove korelacije jeste da je broj objekata isti kao i broj brojeva od 1 do n. Dalji proces je potreban da bi se pokazalo da je ovaj broj brojeva n, što je jedino istinito kao činjenica, kada je n konačno ili, u izvesnom širem smislu, kada je n zapravo α_0 (najmanji beskonačni broj). Pored toga, proces brojanja nam ne govori šta su brojevi, zašto formiraju niz, ili kako se može dokazati (u slučajevima kada je istinito) da postoji n brojeva od 1 do n. Brojanje je, dakle, irelevantno za zasnivanje aritmetike i s obzirom na to ono može biti zanemareno dok ne dođemo do poretka i ordinalnih brojeva.

130. Vratimo se pojmu numeričke konjunkcije. Jasno je da objektima poput „*A* i *B*", „*A* i *B* i *C*" treba pripisati brojeve različite od jedan. Takve objekte smo ispitali u Prvom delu, u vezi sa klasama sa kojima smo ih poistovetili. Sada moramo da ispitamo njihov odnos sa brojevima i mnoštvom.

Pojam koji sada treba ispitati jeste pojam numeričke konjunkcije ili, kraće, *kolekcije*. Pre svega, pojam kolekcije ne sme biti poistovećen sa pojmom određene *klase* već zahteva novo i nezavisno razmatranje. Pod kolekcijom podrazumevam ono što je označeno sa „*A* i *B*“ ili „*A* i *B* i *C*“ ili bilo koje drugo nabrajanje određenih termina. Kolekcija se definiše stvarnim navođenjem termina koji su povezani sa *i*. Izgledalo bi da *i* predstavlja fundamentalan način kombinovanja termina, i moglo bi se prihvatiti da je upravo taj način suštinski ako treba da proizađe bilo šta čemu bi se pripisao broj različit od 1. Kolekcije ne pretpostavljaju brojeve, pošto one jednostavno proizlaze iz termina zajedno sa *i*: one mogu *pretpostavljati* brojeve samo u posebnom slučaju kada ih pretpostavljaju sami termini kolekcija. Postoji jedna gramatička teškoća koja se mora istaći i imati u vidu pošto ne postoji nijedan metod kojim bi se izbegla. Kolekcija je, gramatički posmatrano, jedno, dok su *A* i *B* ili *A* i *B* i *C* suštinski mnoštvo. Strogo značenje *kolekcije* je celina sastavljena od mnogo, ali kako je jedna reč neophodna da označi sama mnoga ja sam u tom smislu izabrao da upotrebim reč *kolekcija*, tako da je kolekcija, prema ovde prihvaćenoj upotrebi, mnogo, a ne jedno.

U pogledu onoga što se misli pod kombinacijom na koju se upućuje sa *i*, to je ono što smo prethodno nazvali numeričkom konjunkcijom. To će reći, *A* i *B* su ono što je označeno pojmom klase čiji su *A* i *B* jedini termini, tačnije, *A* i *B* su označeni tako da se na to upućuje sa *svi*. Možemo reći, ako je *u* klasni pojam koji odgovara klasi čiji su *A* i *B* jedini termini, ono „svi *u*-ovi“ je pojam koji označava termine *A*, *B* kombinovane na izvestan način, a *A* i *B* su termini kombinovani tačno na taj način. Tako se *A* i *B* javljaju kao nerazlučivi od klase, iako su razlučivi od klasnog pojma i od pojma klase. Otuda, ako je *u* klasa od više od jednog termina, izgleda da je nužno tvrditi da *u* nije jedno nego mnogo, pošto je *u* razlučivo i od klasnog pojma i od celine sastavljene od termina od *u*[1]. Time smo se vratili na zavisnost brojeva od klasa; a tamo gde

[1] Konkluzivni razlog protiv poistovećivanja klase sa celinom sastavljenom

nije rečeno da su klase o kojima je reč konačne, praktično je nužno početi sa klasnim pojmovima i teorijom označavanja, a ne sa teorijom o *i* koja je upravo predočena. Teorija o *i* se praktično primenjuje samo na konačne brojeve i konačnim brojevima daje položaj koji je, barem psihološki, različit od položaja beskonačnih brojeva. Ukratko, postoje dva načina definisanja partikularnih konačnih klasa, ali postoji samo jedan izvodiv način definisanja partikularnih beskonačnih klasa, naime, putem intenzije. Rasprostranjen je običaj da se klase razmatraju primarno sa strane ekstenzije, što je do sada stajalo na putu tačne logičke teorije beskonačnosti.

131. Treba pažljivo primetiti da sabiranje primarno nije metod formiranja brojeva nego formiranja klasa ili kolekcija. Ako *B* dodamo *A*, ne dobijamo broj dva nego dobijamo *A* i *B*, što predstavlja kolekciju dva termina ili par. A par se definiše na sledeći način**:** *u* je par ako *u* ima termine i ako, ako je *x* termin od *u*, postoji jedan termin od *u* različit od *x*, ali ako su *x*, *y* različiti termini od *u*, a *z* se razlikuje od *x* i od *y*, onda se svaka klasa kojoj pripada *z* razlikuje od *u*. U ovoj definiciji javlja se jedino različitost, zajedno sa pojmom klase koja ima termine. Bez sumnje bi se moglo prigovoriti da moramo uzeti baš dva termina *x* i *y* u gornjoj definiciji: ali u suštini svaki konačan broj može biti definisan indukcijom bez uvođenja više od jednog termina. Jer, ako je *n* definisano, klasa *u* ima $n+1$ termin kada, ako je *x* termin od *u*, broj termina od *u* koji se razlikuju od *x* je *n*. A pojam aritmetičkog zbira $n+1$ je dobijen od onog logičkog zbira klasa sa *n* termina i klase sa jednim terminom. Kada kažemo $1+1 = 2$ nije moguće da time mislimo 1 i 1, pošto postoji samo jedno 1: ako 1 uzmemo kao individuu, 1 i 1 je besmisleno, dok ako ga uzmemo kao klasu, primenjuje se pravilo simboličke logike shodno kojem 1 i 1 jeste 1. Tako, u odgovarajućem logičkom iskazu, sa leve strane imamo termine

---

od njenih termina sastoji se u tome što jedan od ovih termina može sam biti klasa, kao u slučaju „klasa je klasa“ ili, bolje, „klase su jedno među klasama“. Logički tip ove klase *klasa* je beskonačnog reda, i otuda se uobičajena primedba na „$x \in x$“ ne primenjuje u ovom slučaju.

od kojih jedan može biti tvrđen, a sa desne strane imamo par. To će reći 1+1=2 znači „jedan termin i jedan termin su dva termina“ ili, izražavajući iskaz pomoću promenljivih, „ako *u* ima jedan termin i *v* ima jedan termin, i ako se *u* razlikuje od *v*, njihov logički zbir ima dva termina“. Mora biti primećeno da sa leve strane imamo numeričku konjunkciju iskazâ, dok sa desne strane imamo iskaz koji se tiče numeričke konjunkcije termina. Ali, istinita premisa u gornjem iskazu nije konjunkcija tri iskaza već njihovih logičkih proizvoda. Međutim, ovo ima mali značaj u trenutnom kontekstu.

132. Jedino pitanje koje preostaje glasi**:** da li pojam termina pretpostavlja pojam 1? Jer, videli smo da svi brojevi izuzev nule uključuju u svojoj definiciji pojam termina, a ako ovaj sa druge strane uključuje 1, definicija 1 postaje cirkularna, zbog čega ćemo morati da priznamo 1 kao nedefinljiv. Na ovu primedbu smo odgovorili onim što je rečeno u §128, da termin nije *jedno* u smislu koji je relevantan u aritmetici ili u smislu u kome je to suprotno od *mnogo*. Pojam *bilo koji termin* je logički nedefinljiv i pretpostavljen je u formalnoj istini i u celoj teoriji o promenljivoj; ali, taj pojam je pojam promenljive konjunkcije termina koja ni na kakav način ne uključuje broj 1. Prema tome, ne postoji nikakva cirkularnost u definisanju broja 1 pomoću pojma *neki termin* ili *bilo koji termin*.

Da rezimiramo: brojevi su klase klasa, naime, svih klasa sličnih nekoj datoj klasi. Ovde klase moraju da se shvate u smislu numeričkih konjunkcija u slučaju klasa koje imaju više termina; ali klasa može i da nema termine, a klasa sa jednim terminom je različita od tog termina, tako da klasa nije naprosto zbir svojih termina. Jedino klase imaju brojeve. Za ono što se obično zove jednim objektom, nije istinito, barem u zahtevanom smislu, reći da je jedan, a na šta ukazuje činjenica da objekat može biti klasa mnogih termina. „Jedan objekat“ izgleda da samo znači „logički subjekat u nekom iskazu“. Ne treba smatrati da su konačni brojevi nastali brojanjem koje ih, naprotiv, pretpostavlja; a sabiranje je primarno logičko sabiranje, najpre iskaza, a zatim klasa, iz kojeg je aritmetičko sabiranje onda izvodivo.

Tvrđenje o brojevima zavisi od činjenice da klasa sa mnogo termina može biti logički subjekat, a da nije aritmetički jedno. Tako se pokazalo da nijedan filozofski argument nije mogao da obori matematičku teoriju kardinalnih brojeva, izloženu od Glave XI do Glave XIV.

Glava XVI

CELINA I DEO

133. Da bi se razumela analiza, neophodno je ispitati pojam celine i dela, pojam koji su autori koji bi se mogli grubo označiti kao hegelijanci zamračili, mada ne bez izvesnih manje ili više valjanih logičkih razloga. U ovoj glavi ću nastojati da što bolje mogu izložim jednu jasnu i nemističnu teoriju o tome, ostavljajući koliko god je moguće, kontroverze po strani. Može biti dobro da, pre svega istaknem da ću reč *celina* upotrebljavati strogo korelativno *delu*, tako da ništa neće biti nazvano celinom ukoliko nema delove. Jednostavni termini poput tačaka, trenutaka, boja ili fundamentalnih pojmova logike neće biti nazivani celinama.

Kao što smo rekli u prethodnoj glavi, termini koji nisu klase mogu biti, dvojake vrste. Termini prve vrste su prosti: oni mogu biti okarakterisani mada ne i definisani činjenicom da iskazi koji tvrde da takvi termini postoje nemaju pretpostavke. Termini druge vrste koji nisu klase su, sa druge strane, složeni; a u njihovom slučaju, njihovo postojanje pretpostavlja postojanje izvesnih drugih termina. Bilo šta što nije klasa naziva se *jedinica*, i tako su jedinice ili proste ili složene. Složena jedinica je *celina*; njeni delovi su druge jedinice, bilo proste ili složene koje se u njoj pretpostavljaju. Ovo sugeriše mogućnost definisanja celine i dela pomoću logičkog prvenstva, što je sugestija koju je neophodno podrobno ispitati iako na kraju mora biti odbačena.

134. Gde god imamo jednosmernu formalnu implikaciju, može se istaći da ako dve obuhvaćene iskazne funkcije mogu biti dobijene jedna iz druge variranjem jednog jedinog konstituenta, onda je ono što je implicirano prostije od onoga što ga implicira. Tako „Sokrat je čovek" implicira „Sokrat je smrtan", ali ovaj drugi iskaz ne implicira onaj prvi: drugi iskaz je i jednostavniji od prethodnog pošto je *čovek* pojam kojeg je *smrtan* deo. Dalje, ako uzmemo iskaz koji tvrdi relaciju dva entiteta *A* i *B*, ovaj iskaz implicira postojanje *A* i postojanje *B* i postojanje relacije, od kojih nijedno ne implicira iskaz, a od kojih je svako prostije od iskaza. Tu će – shodno teoriji da intenzija i ekstenzija variraju obrnuto jedna u odnosu na drugu – jedino postojati jednaka složenost u slučaju uzajamne implikacije, kao u „*A* je veće od *B*" i „*B* je manje od *A*". To nas navodi da uvedemo sledeću definiciju: kaže se da je *A* deo od *B* kada *B jeste* implicira *A jeste*, ali *A jeste* ne implicira *B jeste*. Ako bi ova definicija bila održiva, celina i deo ne bi bili nova nedefinljiva, već bi bili izvodivi iz logičkog prvenstva. Međutim, ima razloga zbog kojih je ovakvo mišljenje neodrživo.

Prva primedba bi bila da logičko prvenstvo nije prosta relacija: implikacija je prosta, ali logičko prvenstvo *A* u odnosu na *B* ne zahteva samo „*B* implicira *A*" već i „*A* ne implicira *B*". (Radi pogodnosti, reći ću da *A* implicira *B* kada *A jeste* implicira *B jeste*). Ovo stanje stvari je, ako je tačno, ostvareno kada je *A* deo *B*; ali, izgleda da je nužno smatrati relaciju celine prema delu nečim što je prosto, a što mora biti različito od svake moguće relacije celine prema nečemu drugom što nije njen deo. Ovo ne bi sledilo iz gornje definicije. Na primer, „*A* je veće i bolje od *B*" implicira „*B* je manje od *A*", ali obrnuta implikacija ne važi; ipak, poslednji iskaz nije deo onog prvog[1].

---

[1] Vidi Četvrti deo, Glava XXVII.

Druga primedba je izvedena iz takvih slučajeva kao što su crvenost i boja. Ova dva pojma izgledaju podjednako jednostavno: ne postoji specifikacija drugačija i jednostavnija od same crvenosti koja može da se doda *boji* kako bi proizvela crvenost na način na koji će specifikacija pretvoriti *smrtan* u *čovek*. Otuda, *A je crveno* nije složenije od *A je obojeno*, iako ovde postoji jednosmerna implikacija. Izgleda da je crvenost u stvari (kada se uzme da znači jednu pojedinačnu nijansu) prost pojam, koji, mada implicira boju, ipak ne sadrži boju kao konstituent. Inverzan odnos ekstenzije i intenzije stoga ne važi u svim slučajevima. Iz ovih razloga moramo odbaciti, uprkos njihovoj vrlo uskoj vezi, pokušaj da se celina i deo definišu pomoću implikacije.

135. Iz neuspeha da se celine definišu logičkim prvenstvom, mislim da sledi da neće biti moguće da ih uopšte definišemo. Izgledalo bi da je relacija celine i dela nedefinljiva i nesvodiva ili, bolje rečeno, da se tu radi o više relacija, često pomešanih, od kojih je barem jedna nedefinljiva. Relacija dela prema celini mora biti drugačije razmatrana, shodno prirodi i celine i delova. Počnimo sa najjednostavnijim slučajem, pa nastavimo postepeno do onih koji su složeniji.

(1) Kad god imamo bilo koju kolekciju više termina, u smislu objašnjenom u prethodnoj glavi, ti termini, pod uslovom da postoji neka nekvadratna iskazna funkcija koju svi oni zadovoljavaju, zajedno formiraju celinu. U prethodnoj glavi smo klasu smatrali formiranom od svih termina, ali izgleda da upotreba ne pokazuje nikakav razlog zbog kojeg klasa ne bi bila smatrana takođe i kao celina sastavljena od svih termina u onim slučajevima gde takva celina postoji. Prva je klasa kao mnogo, a druga klasa kao jedno. Svaki od termina onda stoji prema celini u izvesnoj nedefinljivoj relaciji[1], što

[1] Koja, ako se želi, može biti uzeta kao Peanovo $\in$. Primedba na ovo značenje za $\in$ jeste da ne definiše svaka iskazna funkcija celinu zahtevane vrste. Celina se razlikuje od klase kao mnogo tako što je istog tipa kao i njeni termini.

predstavlja jedno značenje relacije celine i dela. Celina je u ovom slučaju celina posebne vrste koju ću zvati *agregat*: on se razlikuje od celina drugačije vrste po tome što je određen čim su njegovi konstituenti poznati.

(2) Ali, prethodna relacija važi samo između agregata i pojedinačnih termina kolekcije koji čine taj agregat: relacija prema našem agregatu agregatâ, koji sadrži neke ali ne sve termine našeg agregata drugačija je relacija, mada je ona ujedno i relacija koja bi se obično nazvala relacijom dela prema celini. Na primer, relacija grčke nacije prema ljudskoj rasi je drugačija od relacije Sokrata prema ljudskoj rasi; i relacija celine prostih brojeva prema celini brojeva je drugačija od relacije broja 2 prema celini brojeva. Ovu ključnu distinkciju dugujemo Peanu[1]. Relacija subordiniranog agregata prema agregatu u kome je sadržan može biti definisana, kao što smo to objasnili u Prvom delu, posredstvom implikacije i prve vrste relacije dela prema celini. Ako su *u* i *v* dva agregata i ako za svaku vrednost *x* „*x* je jedno *u*“ implicira „*x* je jedno *v*“ onda je *u*, pod uslovom da obrnuta implikacija ne važi, odgovarajući pravi deo (u ovom drugom smislu) od *v*. Ovaj smisao celine i dela je, prema tome, derivativan i definljiv.

(3) Ali, postoji i jedna druga vrsta celine koja se može nazvati *jedinstvo*. Takva celina je uvek iskaz mada ne mora da bude *tvrđen* iskaz. Na primer, „*A* se razlikuje od *B*“ ili „*A*-ovi različiti od *B*“ jeste kompleks čiji su delovi *A* i *B* i razlika; ali ovaj smisao celine i dela se razlikuje od prethodnih, pošto „*A* se razlikuje od *B*“ nije agregat i uopšte nema delove, u prva dva smisla dela. Delovi u ovom trećem smislu su oni koji su uglavnom razmatrani od strane filozofa, dok su prva dva smisla oni koji su obično relevantni u simboličkoj logici i matematici. Ovaj treći smisao *dela* je smisao koji odgovara analizi: izgleda da je nedefinljiv, slično prvom smislu – to će reći da ne znam nijedan način njegovog definisanja. Neophodno je da ova tri smisla uvek držimo razdvojenim: na primer, ako je *A* deo od *B* u jednom

---

[1] Cf. na primer *F*. 1901, §1; prop. 4.4, napomena (str. 12).

smislu, dok je *B* deo od *C* u drugom, ne sme se izvesti zaključak (uopšte uzev) da je *A* deo od *C* u bilo kom od ova tri smisla. Ali, mi možemo razlikovati i četvrti, opšti smisao, u kojem bilo šta što je deo u bilo kom smislu ili deo u ovom ili onom smislu, treba nazvati delom. Međutim, ovaj smisao je retko kada, ako uopšte ikada, koristan u aktualnim raspravama.

136. Razlika između ovih vrsti celina je značajna i ilustruje jednu fundamentalnu ideju u logici. Ja ću je stoga ponoviti drugim rečima. Bilo koja kolekcija, ako je definisana nekvadratnom iskaznom funkcijom, mada je kao takva mnogo, ipak čini celinu čiji su delovi termini kolekcije ili bilo koja celina sastavljena od nekih termina te kolekcije. Vrlo je značajno shvatiti razliku između celine i svih njenih delova, čak i u ovom slučaju gde je ta razlika minimalna. Reč *kolekcija*, budući u jednini, primenjuje se striktnije na celinu nego na sve njene delove, ali pogodnost izraza me je navela da zanemarim gramatiku te da govorim o svim terminima kao o kolekciji. Celinu obrazovanu od termina kolekcije nazivam *agregat*. Takva celina je sasvim specifikovana kada su svi njeni prosti konstituenti specifikovani; njeni delovi nemaju direktnu vezu *inter se* već samo indirektnu vezu, sadržanu u tome što su delovi jedne te iste celine. Ali, javljaju se i druge celine koje sadrže relacije ili ono što se može nazvati predikati, a koje se ne javljaju naprosto kao termini u kolekciji već kao ono što povezuje ili kvalifikuje. Takve celine su uvek iskazi. One nisu potpuno specifikovane kada su svi njihovi delovi poznati. Uzmimo, kao jednostavan primer, iskaz „*A* se razlikuje od *B*", gde su *A* i *B* prosti termini. Prosti delovi ove celine su *A* i *B* i razlika, ali nabrajanje ovih triju delova ne specifikuje celinu pošto postoje dve druge celine sastavljene od istih delova, naime, agregat formiran od *A* i *B* i razlike i iskaz „*B* se razlikuje od *A*". U prethodnom slučaju, premda se celina razlikuje od svih njenih delova, ona je ipak potpuno određena kada su njeni delovi specifikovani; ali u datom slučaju, ne samo da se celina razlikuje nego čak nije ni određena kada su njeni delovi specifikovani. Ovu činjenicu ne možemo objasniti time što bismo rekli da delovi stoje u izvesnim relacijama koje su izostavljene u analizi; jer u gornjem slučaju „*A* se razlikuje od *B*“, relacija je bila uključena u analizu. Izgleda da je relacija jedna stvar kada povezuje, a druga kada je samo nabrojana kao termin u kolekciji. Postoje izvesne fundamentalne teškoće u ovom gledištu, koje ipak ostavljam po strani kao irelevantne za našu sadašnju svrhu[1].

Slična zapažanja se mogu primeniti na *A jeste*, što je celina sastavljena od *A* i od *Bića*, ali se razlikuje od celine formirane od kolekcije *A* i *Bića*. Isto važi i za *A je jedno* kao i za *A* i *B su dva*. Uistinu, isto važi za sve iskaze, i možemo ih razlikovati među kompleksnim terminima upravo time što to za njih važi.

Tako vidimo da postoje dve vrlo različite klase celina, od kojih će se prva nazivati *agregati* a druga *jedinstva*. (*Jedinica* je reč koja ima sasvim različitu primenu, pošto je jedinica bilo koja klasa koja nije nula i koja je takva da su x i y identični ako su x i y njeni članovi). Svaka klasa celina se sastoji od termina koji nisu naprosto ekvivalentni svim njenim delovima; ali u slučaju jedinstava, celina čak nije ni određena svojim delovima. Na primer, delovi *A*, *veće od*, *B* mogu činiti samo agregat ili jedan od iskaza „*A* je veće od *B*“, „*B* je veće od *A*“. Tako, jedinstva pogađaju problemi koji ne pogađaju agregate. Kako su agregati, na poseban način, relevantniji u matematici nego jedinstva, ubuduće ću se, uopšte uzev, ograničiti na prve.

137. Značajno je shvatiti da je celina nov pojedinačan termin, različita od svakog od njenih delova, kao i od svih njih skupa: ona je jedno, a ne mnogo[2], i u relaciji je prema delovima, ali postoji na drugačiji način od njih. Čitalac bi mogao da posumnja u to da postoji neka potreba za celinama koje su drugačije od jedinstava, ali sledeći razlozi izgleda da čine agregate logički nezaobilaznim. (1) Mi govorimo o jednoj kolekciji, jednoj množini, itd. i izgleda da u svim tim slučajevima stvarno postoji nešto što je jedan pojedinačan termin.

---

[1] Vidi Prvi deo, Glava IV, a naročito §54.

[2] To će reći, celina je istog logičkog tipa kao njeni prosti delovi.

(2) Teorija razlomaka, kao što ćemo uskoro videti, izgleda da delimično zavisi od agregata. (3) Videćemo da je u teoriji ekstenzivnog kvantiteta nužno pretpostaviti da agregati, čak i kada su beskonačni, imaju ono što se može nazvati veličinom deljivosti, i da beskonačni agregati mogu imati isti broj termina, a da nemaju istu veličinu deljivosti: videćemo da je ova teorija neophodna u metričkoj geometriji. Iz ovih razloga izgleda da agregat mora biti prihvaćen kao entitet različit od svih njegovih konstituenata i koji sa svakim od njih stoji u izvesnoj nesvodivoj i nedefinljivoj relaciji.

138. Već sam dotakao jednu vrlo značajnu logičku doktrinu koja teoriju celine i dela stavlja u istaknut položaj – mislim na doktrinu prema kojoj je analiza falsifikovanje. Štagod može biti analizirano jeste celina, i već smo videli da je analiza celine u izvesnoj meri falsifikovanje, ali je značajno uvideti vrlo uske granice ove doktrine. Mi ne možemo zaključiti da delovi neke celine nisu stvarno njeni delovi, niti da delovi nisu pretpostavljeni u celini u smislu u kojem celina nije pretpostavljena u delovima, niti čak da, po pravilu, ono što logički prethodi nije prostije od onoga što logički sledi. Ukratko, iako nam analiza daje istinu i ništa osim istine, ona nam ipak nikada ne može dati celu istinu. Ovo je jedini smisao u kojem ova doktrina treba da bude prihvaćena. U svakom širem smislu ona postaje puko pokriće za lenjost, budući da pruža izgovor onima koji ne vole težak posao analiziranja.

139. Treba primetiti da se ono što nazivamo klase kao jedno uvek mogu interpretirati kao agregati, osim u onim slučajevima u kojima sadrže jedan ili nijedan termin ili su definisane kvadratnim iskaznim funkcijama. Logički proizvod dveju klasa od kojih je svaka jedno biće (u drugom od naša tri smisla) zajednički deo dva agregata, a njihov zbir će (opet u ovom drugom smislu) biti agregat koji je identičan sa ili koji je deo od bilo kog agregata čiji su delovi dva data agregata, ali nijedan nije identičan ni sa jednim delom bilo kog drugog agregata[1]. Relacija celine i dela, u drugom od tri navedena smisla, tranzitivna je i asimetrična, ali se razlikuje od drugih takvih relacija zato što dopušta logičko sabiranje i množenje. Ova posebnost formira osnovu logičkog računa kakav su razvili prethodnici Peana i Fregea (uključujući i Šredera)[2]. Ali, svuda gde su u pitanju beskonačne celine, nužno je, a u mnogim drugim slučajevima i praktično neizbežno, početi od klasnog pojma ili predikata ili iskazne funkcije i onda dobiti agregat iz toga. Tako je teorija celine i dela manje logički fundamentalna od teorije predikata ili klasnih pojmova ili iskaznih funkcija; a iz ovog razloga je razmatranje teorije celine i dela bilo odloženo za ovako kasnu fazu našeg izlaganja.

---

[1] Cf. Peano, *F*. 1901, §2, prop. 1˙0 (str. 19).

[2] Vidi, na primer, njegovu *Algebra der Logik*, Vol. I (Leipzig, 1890).

Glava XVII
BESKONAČNE CELINE

140. U ovoj glavi neće se razmatrati posebne teškoće vezane za beskonačnost: sve one su odložene za Peti deo. Moj cilj ovde jeste da razmotrim dva pitanja: (1) Postoje li bilo kakve beskonačne celine? (2) Ako postoje, mora li beskonačna celina, koja sadrži delove u drugom od naša tri smisla, da bude agregat delova u prvom smislu? Da bismo izbegli pozivanje na prvi, drugi i treći smisao, predlažem da od sada upotrebljavamo sledeću frazeologiju: neka deo u prvom smislu bude *termin* celine[1], deo u drugom smislu jednostavno *deo*, a deo u trećem smislu *konstituent* celine. Tako, termini i delovi pripadaju agregatima, dok konstituenti pripadaju jedinstvima. Kada je u pitanju beskonačnost, razmatranje agregata i jedinstava bi trebalo da sprovodimo odvojeno. Počeću sa agregatima.

Beskonačan agregat je agregat koji odgovara beskonačnoj klasi, to jest agregat koji ima beskonačan broj termina. Takvi agregati su definisani time što sadrže delove koji imaju isto toliko termina koliko ima i njih samih. Naše prvo pitanje je: postoje li takvi agregati?

Beskonačni agregati su često osporavani. Čak je i Lajbnic, koji je bio naklonjen aktualnoj beskonačnosti, tvrdio da je tamo gde su

[1] Deo u ovom smislu će se ponekad nazivati *prost* ili *nedeljiv*i deo.

beskonačne klase u pitanju, moguće formulisati valjane iskaze o *bilo kom* terminu klase, ali ne i o *svim* terminima, niti pak o celini koju (kako bi on to rekao) oni *ne* sačinjavaju[1]. Kant je, pak, bio mnogo kritikovan zbog tvrđenja da je prostor beskonačna data celina. Mnogi tvrde da svaki agregat mora da ima konačan broj termina i da tamo gde ovaj uslov nije ispunjen prava celina i ne postoji. Ja, međutim, ne verujem da ovo gledište može biti uspešno branjeno. Među onima koji osporavaju da je prostor data celina, nemalo njih bi priznali da ono što nazivaju konačnim prostorom može biti data celina, na primer, prostor u sobi, kutiji, torbi, ormanu za knjige. Ali, takav prostor je konačan samo u psihološkom smislu, što znači da možemo da ga obuhvatimo odjednom: on nije konačan u smislu u kojem agregat ima konačan broj termina, niti pak u smislu u kojem jedinstvo ima konačan broj konstituenata. Dakle, priznati da jedan takav prostor može biti celina znači priznati da postoje celine koje nisu konačne. (Mora se primetiti da ovo ne sledi iz priznavanja materijalnih objekata koji prividno zauzimaju konačne prostore, jer je uvek moguće tvrditi da se takvi objekti, iako izgledaju kontinuirano, stvarno sastoje od velikog ali konačnog broja materijalnih tačaka). U pogledu vremena važi isto: reći, na primer, da izvesna dužina vremena protiče između sunčevog izlaska i zalaska znači prihvatiti beskonačnu celinu ili, barem, celinu koja nije konačna. Kod filozofa je uobičajeno da osporavaju realnost prostora i vremena, kao i da osporovaju to da, ako bi ovi i bili realni, oni bi bili agregati. Nastojaću da u Šestom delu pokažem da su ova osporavanja zasnovana na pogrešnoj logici i na sadašnjem rešenju teškoća koje se tiču beskonačnosti. Budući da su nauka i zdrav razum saglasni u pogledu stanovišta koje je ovom suprotno, njega bi stoga trebalo da prihvatimo; i tako, budući da sada nijedan argument *a priori* ne može da se doda protiv beskonačnih agregata, mi na osnovu prostora i vremena izvodimo argument u prilog beskonačnih agregata.

---

[1] Cf. *Phil. Werke*, prir. Gerhardt, II, str. 315; a takođe i I, str. 338, V, str.144–5.

Nadalje, prirodni brojevi ili razlomci od 0 do 1 ili ukupnost svih boja jesu beskonačni i izgleda da su pravi agregati: stanovište koje tvrdi da, mada istiniti iskazi mogu da se formulišu o *bilo kom* broju, ipak ne postoje istiniti iskazi o *svim* brojevima, moglo bi da bude formalno zasnovano kao što je i Lajbnic to podržavao pomoću navodnih protivrečnosti vezanih za beskonačnost, ali je od Kantorovog rešenja tih protivrečnosti to stanovište postalo sasvim nepotreban paradoks. I tamo gde kolekcija može da se definiše nekvadratnom iskaznom funkcijom, mislim da mora biti tvđeno da to implicira da postoji istinski agregat sastavljen od termina te kolekcije. Takođe se može primetiti da, ako ne bi postojale beskonačne celine, reč *Univerzum* bi bila potpuno lišena značenja.

141. Moramo, dakle, prihvatiti beskonačne agregate. Ostaje da postavimo jedno teže pitanje, naime: da li prihvatamo beskonačna jedinstva? Ovo pitanje može biti izraženo i u ovom obliku: da li postoje, u bilo kakvoj formi, beskonačno kompleksni iskazi? Ovo pitanje je od velikog logičkog značaja, te ćemo morati da mu posvetimo mnogo pažnje, kako u pogledu ekspozicije, tako i u pogledu diskusije.

Prvo što mora biti jasno jeste značenje beskonačnog jedinstva. Jedinstvo je beskonačno kada je agregat svih njegovih konstituenata beskonačan, ali ovo jedva da konstituiše značenje beskonačnog jedinstva. Da bismo to značenje dobili, moramo da uvedemo pojam *prostog* konstituenta. Pre svega, možemo primetiti da je konstituent nekog konstituenta konstituent jedinstva, to će reći, ova forma relacije dela prema celini je, slično drugoj, ali ne i prvoj formi, tranzitivna. Prost konstituent sada mora biti definisan kao konstituent koji sam nema konstituente. Možemo pretpostaviti, da bismo otklonili pitanje koje se tiče agregata, da nijedan konstituent našeg jedinstva ne sme biti agregat, ili, ako postoji konstituent koji je agregat, onda taj konstituent mora biti uzet kao prost. (Ovo gledište o agregatu je učinjeno legitimnim time što je agregat pojedinačan termin i što nema onu vrstu kompleksnosti koja pripada iskazima). Ovim je definicija prostog konstituenta upotpunjena.

Sada možemo definisati beskonačno jedinstvo na sledeći način: jedinstvo je konačno onda i samo onda kada je agregat njegovih prostih konstituenata konačan. U svim drugim slučajevima za jedinstvo se kaže da je beskonačno. Moramo istražiti da li postoje neka takva jedinstva[1].

Ako je jedinstvo beskonačno, moguće je naći jedan konstituent jedinstva koji opet sadrži jedan konstituent jedinstva, i tako dalje, bez kraja. Ako bi postojala jedinstva takve prirode, *prima facie* su moguća dva slučaja. (1) Može biti prostih konstituenata našeg jedinstva, ali ih mora biti beskonačno po broju. (2) Može uopšte ne biti prostih konstituenata, nego svi konstituenti, bez izuzetka, mogu biti kompleksni; ili, da uzmemo neznatno komplikovaniji slučaj, može se desiti da, premda postoje neki prosti konstituenti, ipak, oni i jedinstva sastavljena od njih ne konstituišu sve konstituente prvobitnog jedinstva. Oba jedinstva ove dve vrste će biti nazvana beskonačna. Ove dve vrste, premda različite, mogu biti razmatrane zajedno.

Beskonačno jedinstvo će biti beskonačno kompleksan iskaz: ono neće ni na koji način biti analizabilno na konačan broj konstituenata. Tako se ono bitno razlikuje od tvrđenja o beskonačnim agregatima. Na primer, iskaz „svaki broj ima sledbenika" sastavljen je od konačnog broja konstituenata: broj pojmova koji ulaze u njega može biti nabrojan i pored njih postoji beskonačan agregat termina označen pomoću *bilo koji* koji se računa kao jedan konstituent. Uistinu, može se reći da je logička svrha kojoj služi teorija označavanja to da omogući izkaze konačne kompleksnosti koji se bave beskonačnim klasama termina. Ovaj cilj je ostvaren sa *svi*, *bilo koji* i *svaki*, a ako ne bi bio ostvaren, svaki opšti iskaz o beskonačnoj klasi bi morao da bude beskonačno kompleksan. Što se mene tiče, ja ne vidim neki mogući način da odlučim da li su iskazi o beskonačnoj kompleksnosti mogući

[1] U Lajbnicovoj filozofiji su sve kontingentne stvari beskonačna jedinstva.

ili ne; ali je barem jasno to da su svi nama poznati iskazi (a izgleda i svi iskazi koje *možemo* znati) konačne kompleksnosti. Znači da smo samo dobijanjem takvih iskaza o beskonačnim klasama u stanju da se bavimo sa beskonačnošću; i izvanredna je i srećna činjenica da je ovaj metod uspešan. Tako, pitanje da li postoje beskonačna jedinstva mora biti ostavljeno nerešenim; jedina stvar koju možemo reći o ovom predmetu jeste da se nikakva takva jedinstva ne javljaju u bilo kojoj oblasti ljudskog znanja, te otuda nešto takvo i nije relevantno za osnove matematike.

142. Prelazim sada na naše drugo pitanje: mora li beskonačna celina koja sadrži delove biti agregat termina? Često je, na primer, tvrđeno da prostori imaju delove i da mogu biti deljeni *ad lib*., ali da nemaju proste delove te da zbog toga nisu agregati tačaka. Isto se tvrdilo i u pogledu perioda vremena. Sada je jasno da ako je naša definicija *dela* pomoću termina (to jest drugog smisla *dela* pomoću prvog) bila tačna, ovaj problem nikada ne može nastati pošto *delovi* pripadaju jedino agregatima. Ali se može prihvatiti da bi pojam *dela* mogao biti uzet kao nedefinljiv, te da se može primeniti i na celine drugačije od agregata. Ovo bi zahtevalo da agregatima i jedinstvima dodamo jednu novu vrstu celine, koja odgovara drugom smislu *dela*. To bi bila celina koja ima delove u drugom smislu, ali koja nije ni agregat ni jedinstvo. Takva jedna celina izgleda da je ono što su mnogi filozofi skloni da nazovu kontinuum, te je za prostor i vreme često tvrđeno da predstavljaju primere takve celine.

Sada se može prihvatiti da među beskonačnim celinama nalazimo distinkciju koja *izgleda* relevantna, ali za koju verujem da je zapravo samo psihološka. U nekim slučajevima mi nemamo nikakve sumnje u pogledu termina, ali imamo velike sumnje u pogledu celine, dok nam u drugim celina izgleda očigledno, a termini izgledaju nepouzdano izvedeni. Na primer, odnosi brojeva između 0 i 1 su svakako nedeljivi entiteti, ali izgleda da je priroda celog agregata odnosa brojeva između 0 i 1 zasnovana na konstrukciji ili izvođenju. Sa druge strane, izgleda da su čulno opazivi prostori i vremena očigledne celine; ali, zaključivanje na nedeljive tačke i na trenutke je tako opskurno da mora biti smatrano nelegitimnim. Ova distinkcija, međutim, izgleda da nema logičke osnove nego da mora biti sasvim zavisna od prirode naših čula. Elementarno poznavanje koordinatne geometrije je dovoljno da učini da konačna dužina izgleda strogo analogna prostiranju razlomaka između 0 i 1. Međutim, mora se prihvatiti da u slučajevima gde su, kao kod razlomaka, nedeljivi delovi direktno utvrdivi, problem kojim se trenutno bavimo ne nastaje. Ali, zaključiti da sve beskonačne celine imaju nedeljive delove samo zato što je takav slučaj poznat kod nekih od njih svakako bi bilo prebrzo. Prema tome, opšti problem ostaje, naime: ako je data beskonačna celina, postoji li univerzalan razlog za pretpostavku da ona sadrži nedeljive delove?

143. Na prvom mestu, definicija beskonačne celine ne sme biti takva da osporava da celina ima odrediv broj prostih delova koji je ne rekonstituišu. Na primer, prostiranje razlomaka od 0 do 1 ima tri prosta dela, ⅓, ½ i ⅔. Ali, oni ne rekonstituišu celinu, to jest celina ima i druge delove koji nisu delovi datih delova ili zbira datih delova. Nadalje, ako formiramo celinu od broja jedan i linije duge jedan inč, ta celina sigurno ima jedan prost deo, naime, 1. Slučaj kao ovaj može biti isključen pitanjem da li je svaki deo naše celine prost ili sadrži proste delove. U ovom slučaju, ako je naša celina formirana dodavanjem *n* prostih termina beskonačnoj celini, ovih *n* prostih termina može biti uklonjeno, a onda se postavlja pitanje o beskonačnoj celini koja preostaje. Ali opet, teško da je značenje našeg pitanja: da li je naša beskonačna celina aktualni agregat neizbrojivih prostih delova? Ovo je nesumnjivo značajno pitanje, ali ono sledi pitanju koje postavljamo, a to je: da li uopšte uvek ima prostih delova? Možemo primetiti da ako je ustanovljen konačan broj prostih delova i oduzet od celine, ostatak je uvek beskonačan. Jer, ako ne bi bio takav, ostatak bi imao konačan broj prostih delova, a pošto je termin dva konačna broja konačan, prvobitna celina bi onda morala da bude konačna. Otuda, ako se može dokazati da svaka beskonačna celina sadrži jedan prost deo, onda sledi da ona sadrži beskonačan broj prostih delova. Jer, oduzimajući jedan prost deo, ostatak je beskonačna celina, i stoga ostatak ima nov prost deo, itd. Sledi da je svaki deo celine ili prost ili da sadrži proste delove, pod uslovom da svaka beskonačna celina ima barem jedan prost deo. Ali ovo je izgleda isto tako teško dokazati kao i dokazati da je svaka beskonačna celina agregat.

Ako se beskonačna celina podeli na konačan broj delova, barem jedan od tih delova mora biti beskonačan. Ako se taj deo dalje podeli, jedan od njegovih delova mora biti beskonačan, itd. Tako nijedan konačan broj podela neće svesti sve delove na konačnost. Uzastopne podele daju beskonačan niz delova, a u tim beskonačnim nizovima (kao što ćemo videti u Delovima IV i V) nema nikakve protivrečnosti. Tako ne postoji metod dokazivanja zasnovan na aktualnoj podeli pomoću kojeg bi se utvrdilo da svaka beskonačna celina mora biti agregat. U meri u kojoj ovaj metod to može pokazati, nema više razloga za proste konstituente beskonačne celine nego za prvi trenutak u vremenu ili poslednji konačan broj.

Protivrečnost bi možda mogla da iskrsne iz razmatranja pitanja o celini i delovima u vezi sa logičkim prioritetom. Izgleda sigurno veći paradoks tvrditi da beskonačne celine nemaju deljive delove, nego tvrditi da ne postoji prvi trenutak u vremenu ili najdalja granica prostora. Ovo bi se moglo objasniti činjenicom da mi znamo mnoge proste termine i da su neke beskonačne celine nesumnjivo sastavljene od prostih termina, dok ne znamo ništa što bi sugerisalo početak vremena ili prostora. Ali ovo bi možda moglo da bude čvršće utemeljeno u logičkom prioritetu. Jer, prostije je uvek implicirano u složenijem i stoga ne može biti istine o složenijem bez istine o prostijem. Tako smo se u analizi naše beskonačne celine uvek bavili sa entitetima kojih uopšte ne bi bilo ukoliko njihovi konstituenti ne bi postojali. Ovo predstavlja realnu razliku u odnosu na vremenski niz, na primer: trenutak ne prethodi logički prethodnom trenutku, i ako bi se činilo da bi možda bilo protivrečno po sebi osporavati prvi trenutak, bilo bi (iz istog razloga) protivrečno po sebi osporavati i prvi uzrok. Izgleda da sledi da beskonačne celine uopšte ne bi imale Biće, osim ukoliko ne bi postojala bezbrojna prosta Bića čije je Biće pretpostavljeno u Biću beskonačnih celina. Jer, tamo gde je pretpostavka lažna, posledica je takođe lažna. Tako izgleda da postoji poseban razlog za dovršenje beskonačnog regresa u slučaju beskonačnih celina, koji ne postoji tamo gde su u pitanju druge asimetrične tranzitivne relacije. Ovo je drugi primer posebnosti relacije celine i dela: relacije tako značajne i fundamentalne da skoro sva naša filozofija zavisi od teorije koju prihvatamo u odnosu na nju.

Isti argument može drugačije da se izrazi pitanjem kako naše beskonačne celine moraju biti definisane. Ta definicija ne sme biti beskonačno kompleksna, pošto bi zahtevala beskonačno jedinstvo. Ako postoji neka definicija koja je konačno kompleksna, ta kompleksnost se ne može dobiti od delova pošto ih ima beskonačno mnogo (u slučaju agregata) ili su sami jednako kompleksni kao i celina (u slučaju celine koja nije agregat). Ali svaka definicija koja je konačne kompleksnosti nužno će biti intenzionalna, to će reći, ona će dati neku karakteristiku kolekcije termina. Izgleda da nema drugog metoda definisanja beskonačne celine ili dobijanja takve celine na način koji ne uključuje bilo kakvo beskonačno jedinstvo.

Gorenavedeni argument, mora se prihvatiti, manje je konkluzivan nego što bismo želeli, imajući u vidu veliki značaj problema koji razmatramo. Međutim, u prilog ovog argumenta može se reći da svi argumenti zavise od pretpostavljenih teškoća beskonačnosti i da su stoga potpuno pogrešni; isto tako, procedura geometrije i dinamike (kao što će biti pokazano u Delovima VI i VII) neizostavno zahteva tačke i trenutke. Ukratko, u svim primenama, rezultati ovde zastupane doktrine su daleko jednostavniji, manje paradoksalni i logički više zadovoljavajući nego zaključci suprotnog gledišta. Prema tome, u daljem toku ovog rada smatraću da su sve beskonačne celine kojima ćemo se baviti agregati termina.

Glava XVIII

ODNOSI I RAZLOMCI

144. Ova glava je, ukoliko se bavi relacijama celih brojeva, bitno ograničena na *konačne* cele brojeve: oni koji su beskonačni nemaju relacije strogo analogne relacijama koje obično nazivamo odnosima. Ali, ja ću razlikovati odnose kao relacije između celih brojeva od razlomaka koji su relacije između agregata ili, bolje rečeno, između njihovih veličina deljivosti; a razlomci, kao što ćemo videti, mogu izražavati relacije koje važe tamo gde su oba agregata beskonačna. Biće neophodo početi sa matematičkom definicijom odnosa pre nego što se pređe na opštija razmatranja.

Odnos se obično vezuje za množenje i deljenje i na taj način postaje nerazlučiv od razlomaka. Ali, množenje i deljenje su podjednako primenljivi i na konačne i na beskonačne brojeve, mada u slučaju beskonačnih brojeva nemaju osobine koje ih povezuju sa odnosom u slučaju konačnih. Stoga je poželjno izložiti teoriju odnosa koja će biti nezavisna od množenja i deljenja.

Za dva konačna broja se kaže da su konsekutivni onda kada, ako je u klasa kojoj je pridodat jedan od ova dva broja, i ako se toj klasi doda jedan termin, rezultirajućoj klasi će biti pridodat onaj drugi broj. Tako je biti konsekutivan relacija koja je jedan-jedan i asimetrična. Ako je broj a u n-tom stepenu relacije konsekutivnosti sa brojem b (pri čemu je stepen relacije konsekutivnosti definisan relativnim proizvodom, što znači da je određen brojem iteracija relacije „biti neposredni sledbenik od“), onda imamo $a + n = b$. Ova jednačina između a i b izražava jedan-jedan relaciju koja je određena kada je n dato. Ako sada m-ti stepen ove relacije važi između a’ i b’, imaćemo $a' + mn = b'$. Možemo, takođe, definisati mn kao $0 + mn$. Ako sada imamo tri broja a, b, c takva da $ab = c$, ova jednačina između a i c izražava jedan-jedan relaciju koja je određena kada je b dato. Nazovimo ovu relaciju B. Pretpostavimo da imamo takođe $a'b' = c$. Onda je a prema a’ u relaciji koja je relativni proizvod od B i konversa od B’, gde je B’ izvedeno iz b’, kao što je B bilo izvedeno iz b. Ovu relaciju definišemo kao odnos a’ prema a. Ova teorija ima tu prednost što se primenjuje ne samo na konačne cele brojeve nego i na sve druge nizove istog tipa, to će reći na sve nizove koje ćemo nazvati progresijama.

145. Jedina stvar koju je ovde značajno primetiti u pogledu gornje definicije odnosâ jeste ta da su oni jedan-jedan relacije između konačnih celih brojava koje su sa jednim izuzetkom asimetrične, koje su takve da jedna i samo jedna važi između bilo kog specifikovanog para konačnih celih brojeva, koje su definljive pomoću konsekutivnosti, i koje same formiraju nizove koji nemaju prvi ili poslednji termin i koji stoga imaju beskonačan broj termina zato što imaju termin između bilo koja dva specifikovana termina. Iz činjenice da su odnosi relacije proizlazi da oni ne smeju biti poistovećeni sa celim brojevima: odnos 2 prema 1, na primer, sasvim je različit entitet od broja 2. Kada prema tome govorimo o nizu odnosa koji sadrži cele brojeve, celi brojevi o kojima je reč nisu kardinalni brojevi nego relacije koje imaju izvesnu jedan-jedan korespondenciju sa kardinalnim brojevima. Isto zapažanje važi i za pozitivne i negativne brojeve; n-ti stepen relacije konsekutivnosti je pozitivan broj $+n$ koji je očigledno sasvim različit pojam od kardinalnog broja n. Ovo brkanje entiteta sa nekim drugim entitetima, koji stoje u nekoj važnoj jedan-jedan relaciji sa njima, predstavlja zabludu kojoj su matematičari vrlo podložni, a koja je proizvela najveći haos u filozofiji matematike. U nastavku ćemo imati prilike da se sretnemo sa nebrojeno mnogo primera ove iste zablude, i bilo bi dobro da se što ranije moguće shvati da svaki nedostatak u suptilnosti distinkcija, bar u ovom predmetu, sasvim sigurno uzrokuje najveći broj razornih posledica.

Ne postoji teškoća u povezivanju ove teorije odnosa sa običnom teorijom izvedenom iz množenja i deljenja. Ali, obična teorija, za razliku od naše, ne pokazuje zašto beskonačni celi brojevi nemaju odnose koji bi bili strogo analogni odnosima između konačnih celih brojeva. Činjenica je da odnos zavisi od konsekutivnosti, a konsekutivnost, kako je gore definisana, ne postoji između beskonačnih celih brojeva pošto oni ostaju nepromenjeni dodavanjem broja 1.

Trebalo bi primetiti da ono što se naziva sabiranje odnosa zahteva novi skup relacija između odnosa, i to relacije koje se mogu nazvati pozitivni i negativni odnosi, upravo kao što su izvesne relacije između celih brojeva pozitivni i negativni celi brojevi. Međutim, ovaj predmet nije potrebno dalje razvijati.

146. Mora se priznati da naša teorija odnosa deluje krajnje veštački, zbog čega izgleda krajnje čudno da bi odnosi mogli da se jave u običnom životu. Činjenica je da ono što se ovde zapravo javlja nisu odnosi već razlomci, a ti razlomci nisu isključivo aritmetički nego se u stvari tiču relacija celine i dela.

Iskazi o razlomcima značajno se razlikuju od iskaza o celim brojevima. Mi kažemo *A* je jedan, *A* i *B* su dva, itd., ali ne možemo reći *A* je jedna trećina, *A* i *B* su dve trećine. Postoji uvek potreba za nekim drugim entitetom prema kome naš prvi entitet stoji u nekoj relaciji tipa relacije razlomaka. Tako kažemo da je *A* jedna trećina od *C*, *A* i *B* zajedno su dve trećine *C,* itd. Ukratko, razlomci su ili relacije prostog dela prema celini ili relacije dve celine prema nekoj drugoj. Ali, nije nužno da jedna celina ili prost deo bude deo druge celine. U slučaju konačnih celina stvar izgleda jednostavno: razlomak izražava odnos broja delova u jednoj prema broju delova u drugoj. Ali, razmatranje beskonačnih celina će nam pokazati da ova jednostavna teorija ne odgovara činjenicama.

147. Nesumnjivo je da su polovina metra kao i polovina dana legitimni pojmovi. Stoga je nužno pronaći smisao u kome razlomci neće suštinski da zavise od brojeva. Ako dati period od dvadeset četiri časa može biti podeljen na dva kontinuirana dela, od kojih svaki mora biti polovina celog perioda, postoji samo jedan način da se to učini: ali, Kantor je pokazao da svaki mogući način podele jednog perioda na dva kontinuirana dela deli taj period na dva dela koji imaju isti *broj* termina. Stoga mora postojati neki drugi smisao u kojem su dva perioda od dvanaest časova jednaki, dok su period od jednog časa i drugi period od dvadeset tri časa nejednaki. O ovoj temi ću morati da kažem nešto više u Trećem delu, a za sada ću samo ukazati na to da je ono što nama treba nekakva veličina i da ona mora suštinski da bude svojstvo uređenih celina. To svojstvo ću nazvati *veličina deljivosti*. Reći da je *A* jedna polovina *B* znači: *B* je celina, i ako je *B* podeljeno na dva slična dela od kojih i jedan i drugi imaju istu veličinu deljivosti, onda *A* ima istu veličinu deljivosti kao svaki od ovih delova. Razlomak ½ možemo interpretirati donekle jednostavnije time što ćemo ga smatrati relacijom (analognom odnosu ukoliko je u pitanju konačna celina) između dve veličine deljivosti. Tako će *konačni integralni razlomci** (poput $n/1$) meriti relaciju deljivosti agregata sa n termina prema deljivosti nekog pojedinačnog termina, dok će konverzna relacija biti $1/n$. Tako ovde opet imamo novu klasu entiteta koja je u opasnosti da bude pobrkana sa konačnim kardinalnim celim brojevima, iako su zapravo potpuno različiti. Razlomci, kako su sada interpretirani, imaju tu prednost (od koje zavisi celokupna metrička geometrija) što uvode razliku većeg i manjeg među beskonačnim agregatima koji imaju isti broj termina. Sve više ćemo uviđati ono na šta je ukazivala i logička neadekvatnost uobičajenih objašnjenja

---

* Rasel ovde ima u vidu smisao razlomka koji se tiče relacija celine i dela o kome je govorio na početku §146 (prim. stručnih redaktora prevoda).

merenja, naime, koliko je u stvari suštinski značajan pojam veličine deljivosti. U smislu u kojem mogu da izražavaju relacije beskonačnih agregata, što je smisao koji oni obično i imaju u svakodnevnom životu, razlomci su onda u stvari onaj tip relacija koje važe između veličina deljivosti, a veličine deljivosti se jedino mogu meriti brojem delova u slučajevima u kojima su agregati o kojima se radi konačni. Može se takođe primetiti (premda je ova primedba samo nagoveštavajuća) da razlomci, uzeti u gore definisanom smislu, mogu uzimati i iracionalne vrednosti, nasuprot odnosima koji su definisani kao suštinski racionalni, ali izlaganje ove teme mora biti ostavljeno za Peti deo.

148. Sada možemo da sumiramo rezultate dobijene u Drugom delu. U prve četiri glave ukratko je izložena moderna matematička teorija kardinalnih celih brojeva na način na koji je proizašla iz združenih radova aritmetičatra i simboličkih logičara. U Glavi XI je objašnjen pojam sličnih klasa i pokazano je da obične formalne osobine celih brojeva proizlaze iz njihove definicije kao klasa sličnih klasa. U Glavi XII smo pokazali kako aritmetičko sabiranje i množenje, i jedno i drugo, zavise od logičkog sabiranja, i kako oba mogu biti definisana na način koji se podjednako primenjuje na konačne i beskonačne brojeve, kao i na konačne i beskonačne zbirove i proizvode, i koji, štaviše, nigde ne uvodi neku ideju poretka. U Glavi XIII smo dali strogu definiciju beskonačne klase kao klase koja je slična klasi koja proizlazi iz oduzimanja jednog od njenih termina, i okvirno smo pokazali kako je ova definicija povezana posredstvom matematičke indukcije sa definicijom konačnih brojeva. Posebna teorija konačnih celih brojeva razmatrana je u Glavi XIV, gde je pokazano kako prvobitni iskazi za koje Peano dokazuje da su dovoljni u ovim razmatranjima mogu biti dedukovani iz naše definicije konačnih kardinalnih celih brojeva. Ovo je potvrđeno uvidom da u aritmetici nema ničeg nedefinljivog ili nedokazivog osim onoga što pripada opštoj logici.

Onda smo u Glavi XV stigli do razmatranja filozofskih pitanja sa ciljem da kritički testiramo prethodna matematička izvođenja.

Odlučili smo da i *termin* (*term*) i *jedan termin* (*a term*) tretiramo kao nedefinljive i da broj 1 definišemo kao i sve druge brojeve pomoću ovih nedefinljivih (zajedno sa izvesnim drugim). Takođe se ispostavilo da je nužno razlikovati klasu od klasnog pojma koji joj odgovara, pošto jedna klasa može imati više različitih klasnih pojmova. Zaključili smo da se klasa sastoji od svih termina označenih na izvestan nedefinljiv način klasnim pojmom; ali, izgledalo je da bi nam i obična upotreba i upotrebe koje služe većini matematičkih svrha dopustile da poistovetimo klasu sa celinom formiranom od termina označenih klasnim pojmom. Jedini razlozi protiv ovog gledišta su bili neophodnost razlikovanja klase koja sadrži samo jedan termin od samog tog termina i činjenica da su neke klase članovi sebe samih. Takođe smo uveli razliku između konačnih i beskonačnih klasa i utvrdili da prve mogu dok druge ne mogu da budu definisane ekstenzionalno, prostim nabrajanjem njihovih termina. Onda smo prešli na razmatranje onoga što se može nazvati sabiranjem individua, to jest pojma obuhvaćenog u „*A* i *B*", i uvideli smo da manje-više nezavisna teorija *konačnih* celih brojeva može biti zasnovana na ovom pojmu. Na osnovu naše analize pojma *klase* na kraju se ispostavilo da je ova teorija bila zapravo nerazlučiva od prethodno objašnjene teorije i da su se jedino razlikovale po tome što je ta teorija prihvatala ekstenzionalnu definiciju klasa.

Glava XVI bavila se relacijom celina-deo. Videli smo da postoje dva nedefinljiva smisla ove relacije kao i jedan smisao koji je definljiv, kao i to da postoje dve odgovarajuće vrste celina koje smo nazvali jedinstva i agregati. Videli smo takođe da bismo proširenjem pojma agregata tako da obuhvata i pojedinačne termine i nultu klasu mogli da tretiramo ceo tradicionalni kalkulus simboličke logike kao jednu algebru primenljivu na odnose celina i delova u definljivom smislu. Potom smo u Glavi XVII razmatrali pojam beskonačne celine. Izgledalo je da se beskonačna jedinstva, čak i ako su logički moguća, u svakom slučaju nikako ne javljaju u bilo čemu što je dostupno ljudskom znanju, ali smo uvideli da postojanje beskonačnih agregata mora biti prihvaćeno. Izgledalo je da sve beskonačne celine koje nisu jedinstva moraju biti agregati termina premda nikako nije nužno da ti termini budu prosti. (Oni se, međutim, moraju smatrati konačno kompleksnim radi isključenja beskonačnih jedinstava).

Na kraju smo u Glavi XVIII razmatrali odnose i razlomke: utvrdili smo da su prvi ponekad komplikovane relacije konačnih celih brojeva, dok su drugi predstavljali relacije između deljivosti agregata. S obzirom da su ove deljivosti veličine, njihovo dalje razmatranje pripada Trećem delu u kojem mora biti razmotrena opšta priroda kvantiteta.

Treći deo

KVANTITET

Glava XIX

ZNAČENJE VELIČINE

149. Među tradicionalnim problemima matematičke filozofije jedan od najznačajnijih jeste odnos kvantiteta i broja. Mišljenje u pogledu ovog odnosa je prošlo kroz mnoge revolucije. Euklid, što je očigledno iz njegovih definicija odnosa i proporcije i uistinu iz njegovog celog postupka, nije bio uveren u primenljivost brojeva na prostorne veličine. Kada su Dekart i Vilet (Villete) uvođenjem koordinatne geometrije učinili primenljivost brojeva na prostorne veličine fundamentalnim postulatom njihovih sistema, bio je otkriven novi metod koji je, slično mnogim matematičkim uspesima sedamnaestog veka, ma koliko plodan rezultatima, ipak uključivao umanjenje logičke preciznosti i gubitak suptilnosti pojmovnih distinkcija. Šta se podrazumeva pod merenjem i da li su sve prostorne veličine podložne merenju pomoću brojeva, bila su pitanja na koja sve doskora nije moglo da se odgovori jer je nedostajao neophodan matematički instrumentarijum, a i danas preostaje da se mnogo toga učini pre nego što bi mogao da se pruži potpun odgovor. Prevladavalo je gledište da su broj i kvantitet *primarni* objekti matematičkog ispitivanja i da su i jedan i drugi tako slični da se nije zahtevalo njihovo pažljivo razdvajanje. Tako je broj primenjivan na kvantitete bez ikakvog ustezanja i, obrnuto, tamo gde se utvrdilo da su postojeći brojevi neadekvatni za merenje, kreirani novi brojevi samo zato da bi svaki kvantitet bio meriv pomoću brojeva.

Sve to se na sreću danas promenilo. Dve različite struje u raspravi koju su vodili različiti ljudi postavile su temelje kako za široke generalizacije, tako i za potpunu tačnost u pogledu detalja. Sa jedne strane, Vajerštras, Dedekind, Kantor i njihove pristalice istakli su da, ako iracionalne brojeve treba upotrebiti na smislen način kao mere kvantitativnih razlomaka, onda oni moraju biti definisani bez pozivanja na kvantitet; ti isti ljudi koji su ukazali na neophodnost takve definicije su obezbedili i samu potrebu za njom. Na taj način je u toku poslednjih trideset ili četrdeset godina stvoren jedan nov predmet koji je neizmerno doprineo teorijskoj tačnosti i koji se s pravom može nazvati aritmetika; polazeći od celih brojeva, ova aritmetika uspeva da definiše sve drugo što joj je potrebno – racionalne brojeve, granice, iracionalne brojeve, kontinuitet, itd. Proizlazi da za celokupnu algebru i analizu nije neophodno pretpostaviti bilo šta osim celih brojeva koji, kako smo videli, sami mogu biti definisani logičkim terminima. Stoga je ova nauka, zapravo, više nego neeuklidska geometrija, fatalna po Kantovu teoriju *a priori* opažaja kao osnove matematike. Kontinuitet i iracionalni brojevi su ranije bili uporišta škole koja se može nazvati škola intuicionista, ali tih njihovih uporišta više nema. Aritmetika se toliko razvila da uključuje sve ono za šta se može reći da je čisto u tradicionalnoj matematici.

150. Ali, istovremeno sa ovom purističkom reformom, ostvaren je jedan dodatni napredak. Otkrivene su nove grane matematike koje se ne bave ni brojem ni kvantitetom, kao što su logički kalkulus, projektivna geometrija i, u svojoj suštini, teorija grupa. Pored toga, izgledalo je da merenje – ako se pod tim podrazumeva korelacija entiteta koji nisu brojevi ili agregati sa brojem – nije nešto što se prevashodno tiče kvantiteta: neki kvantiteti ne mogu biti mereni, a neke stvari koje nisu kvantiteti (na primer, projektivno definisani anharmonijski odnosi) mogu biti merene. Merenje je, u stvari, kao što ćemo videti, primenljivo na sve nizove izvesne vrste – vrste koja isključuje neke kvantitete, a uključuje neke stvari koje nisu kvantiteti. Odvajanje broja i kvantiteta je time upotpunjeno: svaki je sasvim nezavisan od onog drugog. Međutim, kvantitet je izgubio matematički značaj koji je posedovao zato što većina teorema koje se tiču kvantiteta mogu biti generalizovane tako da postaju teoreme koje se tiču poretka. Stoga bi bilo prirodno razmatrati poredak pre kvantiteta. Pošto svi iskazi koji se tiču poretka mogu biti ustanovljeni nezavisno za pojedinačne primere poretka, i pošto će kvantitet pružiti ilustraciju, koja zahteva neznatno manji napor apstrahovanja, principa koji će biti primenjeni na nizove uopšte, i pošto teorija rastojanja koja predstavlja deo teorije poretka pretpostavlja donekle kontroverzna mišljenja o prirodi kvantiteta, ja ću slediti tradicionalniji način izlaganja i najpre razmatrati kvantitet. Moj cilj u ovoj glavi će biti da pružim jednu teoriju kvantiteta koja ne zavisi od broja, a zatim, da ukažem na poseban odnos prema broju koji poseduju dve posebne klase kvantiteta, od kojih zavisi merenje kvantiteta svuda gde je merenje moguće. Međutim, treba imati na umu da ceo ovaj deo predstavlja ustupak tradiciji; kao što ćemo videti, kvantitet nije definljiv pomoću logičkih konstanti i nije u pravom smislu pojam koji pripada matematici uopšte. Kvantitet ću razmatrati zato što se tradicionalno pretpostavlja da se javlja u matematici i zato što je potrebna detaljna diskusija da bi se ova pretpostavka pobila; ali, da nema ove pretpostavke izbegao bih da uopšte pominjem bilo kakav pojam kvantiteta.

151. U fiksiranju značenja jednog takvog pojma kao što je *kvantitet* ili *veličina*, suočavamo se sa teškoćom da, kako god definisali ovu reč, izgleda moramo da odstupimo od upotrebe. Ova teškoća nastaje kad god se pretpostavi da su neke dve karakteristike neodvojive, a za koje je strožim ispitivanjem otkriveno da mogu da postoje odvojeno. U slučaju veličine, uobičajeno značenje izgleda da implicira (1) podesnost za stajanje u relacijama *biti veće* i *biti manje*, (2) deljivost. Od ovih karakteristika, za prvu se pretpostavlja da implicira drugu. Ali, pošto ja predlažem poricanje ove implikacije, moram da prihvatim ili da su neke stvari, koje su nedeljive, veličine, ili da neke stvari, koje su veće ili manje nego neke druge, nisu veličine. Izabraću prvu alternativu za koju verujem da je manje ozbiljna. Veličina tada mora biti definisana kao sve ono što je veće ili manje od nečeg drugog.

Moglo bi se pomisliti da bi u definiciji veličine zajedno sa većim i manjim morala da se pomene i *jednakost*. Međutim, videćemo zbog čega može da se misli – ma koliko paradoksalno to moglo da izgleda – da ono što može biti veće ili manje nego neki termin nikada ne može biti jednako bilo kojem terminu uopšte i suprotno. Ovo će zahtevati da napravimo razliku – čija neophodnost će postajati sve očiglednija u nastavku – između vrste termina koji mogu biti jednaki i vrste termina koji mogu biti veći ili manji. Prvu ću nazivati *kvantiteti* a drugu *veličine*. Preklopni metar je kvantitet, a njegova dužina je veličina. Veličine su apstraktnije od kvantiteta: kada su dva kvantiteta jednaka oni imaju *istu* veličinu. Prva stvar koju treba ustanoviti jeste neophodnost ove apstrakcije.

152. Ostavljajući za trenutak po strani veličine, razmotrimo prvo kvantitete. Kvantitet je sve ono što može da bude kvantitativno jednako sa nečim drugim. Treba razlikovati kvantitativnu jednakost od drugih vrsta jednakosti, kao što je aritmetička ili logička jednakost. Sve vrste jednakosti imaju tri zajedničke osobine – refleksivne su, simetrične i tranzitivne, što znači da termin za koji ova relacija uopšte važi onda stoji u ovoj relaciji prema samom sebi; ako *je A* u relaciji prema *B*, *B* je u relaciji prema *A*; ako je *A* u relaciji prema *B*, i *B* prema *C*, *A* je u relaciji prema *C*[1]. Šta je ono što razlikuje kvantitativnu jednakost od drugih vrsta jednakosti, i

---

[1] O nezavisnosti ova tri svojstva, vidi Peano, *Revue de Mathématique*, VII, str. 22. Svojstvo refleksivnosti nije strogo nužno, već ono što je zapravo nužno i što je jedino (barem na prvi pogled) istinito za kvantitativnu jednakost jeste da tu postoji barem jedan par termina koji stoje u relaciji o kojoj je reč. Onda za druga dva svojstva sledi da je svaki od njihovih termina u ovoj relaciji prema samom sebi.

da li je ova vrsta jednakosti analizabilna, to je dodatno i teže pitanje na koje sada treba da pređemo.

Koliko mi je poznato, postoje tri glavna gledišta o kvantitativnoj jednakosti: (1) tradicionalno gledište koje negira kvantitet kao nezavisnu ideju i koje tvrdi da su dva termina jednaka onda i samo onda kada imaju isti broj termina; (2) relativno gledište o kvantitetu prema kojem jednakost, veće i manje predstavljaju direktne relacije između kvantiteta. Po ovom gledištu nema potrebe za veličinom, pošto je istovetnost veličina zamenjena simetričnom i tranzitivnom relacijom jednakosti; (3) apsolutna teorija o kvantitetu prema kojoj jednakost nije direktna relacija nego mora biti izanalizirana na posedovanje zajedničke veličine, to jest na istovetnost relacije prema nekom trećem terminu. U ovom slučaju ćemo imati jednu posebnu vrstu relacije termina prema njegovoj veličini; između dve veličine iste vrste važiće relacija veće od i manje od, dok će se jednakost, veće i manje primenjivati na kvantitete jedino na osnovu njihove relacije prema veličinama. Razlika između druge i treće teorije potpuno oslikava razliku koja nastaje u slučaju mnogih drugih nizova, a posebno u pogledu prostora i vremena. Prema tome, veoma je značajno opredeliti se za neko od ovih gledišta.

153. (1) Vrsta jednakosti koja se sastoji u posedovanju istog broja delova bila je već razmatrana u Drugom delu. Ako je to uistinu značenje kvantitativne jednakosti, onda kvantitet ne uvodi nikakvu novu ideju. Ali, mislim da se može pokazati da veće i manje imaju šire polje primene nego celina i deo, kao i nezavisno značenje. Tome u prilog mogu se navesti sledeći argumenti: (α) moramo prihvatiti postojanje nedeljivih kvantiteta; (β) tamo gde je broj prostih delova beskonačan, ne postoji generalizacija broja koja će dati poznate rezultate u pogledu nejednakosti; (γ) mora se dopustuti da su neke relacije kvantitativne, a relacije se ne mogu čak ni shvatiti kao deljive; (δ) čak i tamo gde postoji deljivost, mora se priznati da aksiom da je celina veća nego deo mora da ima značenje koje nije puka posledica definicije.

(α) Neki kvantiteti su nedeljivi. Jer, opšte je prihvaćeno da su neka psihička stanja kao što su zadovoljstvo i bol kvantitativna. Ako jednakost znači istovetnost u pogledu broja nedeljivih delova, zadovoljstvo i bol ćemo onda morati da tretiramo kao da se sastoje od kolekcije jedinica koje su sve potpuno proste a ne, u nekom značajnom smislu, jednake među sobom; jer, jednakost složenih zadovoljstava proizlazi, po toj hipotezi, isključivo iz broja prostih jedinica koje ulaze u njihov sastav, tako da je jednakost formalno neprimenljiva na nedeljiva zadovoljstva. Ako, sa druge strane, dozvolimo da su zadovoljstva beskonačno deljiva, tako da se nijedna jedinica ne može smatrati nedeljivom, onda je broj jedinica u nekom datom zadovoljstvu potpuno proizvoljan, i ako tu mora da postoji neka jednakost zadovoljstava, moraćemo da prihvatimo da se za bilo koje dve jedinice može smisleno reći da su jednake ili nejednake[1]. Stoga će nam za jednakost biti potrebno neko značenje drugačije od onoga koje se svodi na istovetnost u pogledu broja delova. Međutim, ova druga teorija izgleda neizbežna. Jer, ne samo da ne postoji nijedan razlog da se zadovoljstva tretiraju kao da se sastoje od određenih suma nedeljivih jedinica, već je uvek moguće smisleno prosuditi dva zadovoljstva kao jednaka, ili nejednaka, u šta će se svako uveriti na osnovu dovoljno promišljanja. Ma koliko dva zadovoljstva mogla biti mala, uvek mora biti smisleno reći da su jednaka. Ali, prema teoriji koju pobijam, ovaj sud bi odjednom prestao da bude smislen kada bi oba zadovoljstva bila nedeljive jedinice. Takvo jedno gledište izgleda potpuno neodrživo i ne mogu da verujem da je bilo svesno zastupano od strane onih[2] koji su zastupali premise iz kojih je ono sledilo.

---

[1] Uprkos tome što je reč o istoj vrsti kvantitetâ, nikada neću da upotrebim reč *nejednako* naprosto u značenju *ne jednako*, nego uvek u značenju *veće ili manje,* to jest ne jednako.

[2] Vidi, na primer, kod gospodina Bredlija, „What do we mean by the Intensity of Psychical States?“, *Mind,* N.S. Vol. IV, posebno str. 5.

(*β*) Neki kvantiteti su beskonačno deljivi, i u njima, koju god definiciju beskonačnog broja da prihvatimo, jednakost nije koekstenzivna sa istovetnošću u pogledu broja delova. Pre svega, jednakost ili nejednakost mora biti određena: kada su u pitanju dva kvantiteta iste vrste, jedan odgovor mora biti istinit, a drugi lažan, premda često nije u našoj moći da utvrdimo šta je slučaj. Iz toga sledi da, kada se kvantiteti sastoje od beskonačnog broja delova, ako jednakost ili nejednakost uopšte treba da svedemo na broj delova, onda treba da ih svedemo na broj *prostih* delova, jer je broj složenih delova za koje se može smatrati da čine celinu potpuno proizvoljan. Ali, jednakost je, na primer u geometriji, daleko uže shvaćena nego istovetnost u pogledu broja delova. Kardinalni broj delova bilo koja dva kontinuirana dela prostora isti je, kako nam je poznato od Kantora; čak je i ordinalni broj ili tip isti za bilo koje dve dužine. Otuda, ako tu mora biti prostorne nejednakosti vrste, na koju su nas geometrija i zdrav razum navikli, onda moramo tražiti neko drugo značenje za jednakost nego što je značenje zasnovano na broju delova. Neko će mi ovde prigovoriti da je značenje sasvim očigledno: ono je dobijeno iz superpozicije. Ne ulazeći isuviše u razmatranje koje pripada jednom kasnijem delu, primetiću (*a*) da se superpozicija primenjuje na parče materije a ne na prostor, (*b*) da se kao kriterijum jednakosti pretpostavlja da je parče materije na koje se primenjuje superpozicija kruto telo, (*c*) da krutost znači konstantnost u pogledu metričkih svojstava. Ovo pokazuje da bez cirkularnosti ne možemo da definišemo prostornu jednakost pomoću superpozicije. Prostorna veličina je u stvari nedefinljiva kao i svaka druga vrsta; a broj delova je, u ovom slučaju, kao i u svim drugim gde je taj broj beskonačan, potpuno neadekvatan kao kriterijum.

(*γ*) Neke relacije su kvantiteti. Na to ukazuje prethodno razmatranje prostornih veličina gde je sasvim prirodno zasnivati jednakost na rastojanjima. Iako ovo gledište, kao što ćemo videti kasnije, nije potpuno adekvatno, ono je ipak delimično istinito. Izgleda da u izvesnim prostorima, a zasigurno i u nekim nizovima (poput niza racionalnih brojeva) postoje kvantitativne relacije rastojanja između različitih termina. Takođe, izgleda da su sličnost i razlika kvantiteti. Razmotrimo, na primer, dve nijanse boje. Izgleda nesumnjivo da su dve nijanse crvenog sličnije jedna drugoj nego bilo koja od njih nekoj nijansi plavog, a ipak ne postoji zajedničko svojstvo, u jednom slučaju, koje ne postoji i u drugom. *Crveno* je samo puko zajedničko ime za izvesni niz nijansi, a jedini razlog za davanje zajedničkog imena ovom nizu počiva na velikoj sličnosti njegovih termina. Otuda *crveno* ne sme da se smatra kao zajedničko svojstvo na osnovu kojeg dve nijanse crvenog liče jedna na drugu. A pošto se relacije čak ne mogu ni zamisliti kao deljive, veće i manje među relacijama ne može zavisiti od broja delova.

(δ) Naposletku je prikladno neposredno razmotriti značenja većeg i manjeg, s jedne strane, i celine i dela, s druge. Izgleda neporecivo da Euklidov aksiom, prema kom je celina veća nego deo, ima smisla; ali, prema tradicionalnom gledištu o kvantitetu, ovaj aksiom bi bio puka tautologija. Ovaj problem je opet povezan sa pitanjem da li superpoziciju moramo da smatramo značenjem jednakosti ili samo kriterijumom jednakosti. Prema ovom gledištu aksiom bi morao da ima netrivijalno značenje i ne bismo mogli da poistovetimo veličinu sa brojem delova[1].

154. (2) Postoji, dakle, u kvantitetu nešto što je više od ideja koje smo do sada razmatrali. Ostaje da se opredelimo između relativne i apsolutne teorije veličine.

Prema relativnoj teoriji, jednaki kvantiteti nemaju nikakvo zajedničko svojstvo koje nejednaki kvantiteti nemaju, već se razlikuju samo na osnovu uzajamne relacije jednakosti. Ne postoji veličina koju jednaki kvantiteti dele. Ne smemo reći: ovo i ono su dugački jedan jard, već moramo reći: ovo i ono su jednaki ili oba su jednaki standardnom jardu koji se nalazi u britanskom državnom trezoru.

---

[1] Sa ovim razmatranjem uporedti Meinong, *Ueber die Bedeutung des Weber'schen Gesetzes*, Hamburg und Leipzig, 1896, a naročito glavu I, §3.

Nejednakost je takođe direktna relacija između kvantiteta, a ne između veličina. Ne postoji ništa po čemu bi se jedan skup jednakih kvantiteta razlikovao od skupa koji im nije jednak, izuzev same relacije jednakosti. Tok definisanja je, prema tome, sledeći: imamo prvo kvalitet ili relaciju koja ima brojne instance, recimo zadovoljstvo, pri čemu su kvaliteti određeni vremenskim ili prostorno-vremenskim položajem, a relacije terminima koje povezuju. Razmotrimo kvantitete zadovoljstva kako bismo učinili ovu ideju jasnijom. Kvantiteti zadovoljstva se jedino sastoje od kompleksâ *zadovoljstva u to i to vreme*, i *zadovoljstva u neko drugo vreme* (čemu može biti dodato i *mesto*, ako se misli da zadovoljstva imaju položaj u prostoru). Prema relacionoj teoriji, u analizi pojedinačnog zadovoljstva ne možemo pronaći ništa više od toga. Ali, upoređujući ova pojedinačna zadovoljstva uviđamo da bilo koja dva stoje u jednoj i samo jednoj od ove tri relacije – jednako, veće i manje. Zašto neka stoje u jednoj, a neka u drugoj, to je pitanje na koje je teorijski i strogo uzev, nemoguće dati odgovor jer, *ex hypothesi*, ne postoji nijedan aspekt razlike izuzev vremenskog ili prostorno-vremenskog položaja, što je očigledno irelevantno. Jednaki kvantiteti zadovoljstva se ne slažu ni u jednom pogledu u kojem se nejednaka zadovoljstva razlikuju: samo se dešava da neki stoje u jednoj relaciji, a neki u drugoj.

Mora se priznati da je ovo stanje čudno, i da ono postaje još čudnije kada ispitamo nedokazive aksiome na koje nas relaciona teorije obavezuje da ih pretpostavimo. Oni su sledeći (pri čemu su A, B i C svi kvantiteti iste vrste):

(*a*) $A = B$, ili A je veće od B, ili A je manje od B.

(*b*) Ako je A dato, onda uvek postoji neko B koje može biti jednako A tako da je $A = B$.

(*c*) Ako $A = B$, onda $B = A$.

(*d*) Ako $A = B$ i $B = C$, onda $A = C$.

(*e*) Ako A je veće od B, onda B je manje od A.

(*f*) Ako A je veće od B, i B je veće od C, onda A je veće od C.

(*g*) Ako A je veće od B, a $B = C$, onda A je veće od C.

(*h*) Ako $A = B$, a B je veće od C, onda A je veće od C.

Iz (*b*), (*c*) i (*d*) sledi da $A = A$[1]. *Iz (e*) i (*f*) sledi da, ako je A manje od *B,* a B je manje od C, onda je A manje od C; iz (*c*), (*e*) i (*h*) sledi da, ako je A manje od *B,* a $B = C$, onda je A manje od C; iz (*c*), (*e*) i (*g*) sledi da, ako $A = B$, a B je manje od C, onda je A manje od C. [Umesto (*b*) možemo da uvedemo aksiom: ako je A kvantitet, onda $A = A$]. Kao što ćemo videti, ovi aksiomi vode zaključku da u bilo kom iskazu kojim se tvrdi da je nešto jednako, da je nešto veće ili da je nešto manje, jednak kvantitet može biti zamenjen bilo gde a da to ne utiče na istinitost ili lažnost iskaza. Dalje, iskaz $A = A$ je suštinski deo ove teorije. Prva od ovih činjenica nedvosmisleno ukazuje na to da ono što je relevantno u kvantitativnim iskazima nije sam kvantitet nego neko svojstvo koje on deli sa drugim jednakim kvantitetima; a ovo je skoro dokazano drugom činjenicom, $A = A$. Jer, može se tvrditi da samo neanalizabilna simetrična i tranzitivna relacija, u kojoj neki termin može da stoji prema samom sebi, predstavlja identitet, ako je to uopšte relacija. Stoga bi relacija jednakosti morala da bude analizabilna. Reći da je relacija analizabilna znači reći, ili da se sastoji od dve ili više relacija između njenih termina, što ovde prosto nije slučaj, ili da, kada se kaže da važi između dva termina, onda postoji neki treći termin prema kojem oba stoje u relaciji na takav način da, kada se sastave, daju prvobitnu relaciju. Tvrditi da je A deda ili baba od B znači tvrditi da postoji neka treća osoba C koja je sin ili ćerka od A i otac ili majka od B. Stoga, ako je jednakost analizabilna, onda dva jednaka termina moraju oba biti u relaciji sa nekim trećim terminom; i pošto termin može biti jednak sam sebi, svaka dva jednaka termina moraju biti u *nekoj* relaciji prema trećem terminu o kom se radi. Ali, prihvatiti ovo znači prihvatiti apsolutnu teoriju veličine.

---

[1] Ovo ne sledi samo iz (*c*) i (*d*) pošto se njima ne tvrdi da je A ikada jednako B. Vidi Peano, *loc. cit*.

Direktno ispitivanje toga šta podrazumevamo kada kažemo da su dva termina jednaka ili nejednaka ojačaće primedbe na relacionu teoriju. Izgleda preterano tvrditi da jednaki kvantiteti nemaju apsolutno ništa zajedničko, osim onoga što dele nejednaki kvantiteti. Osim toga, nejednaki kvantiteti nisu puko različiti: oni su različiti na specifičan način koji se izražava tako što se kaže da je jedan veći a drugi manji. Takva razlika deluje sasvim neshvatljivo, osim ukoliko ne postoji nešto u vezi sa nejednakim kvantitetima, što ne postoji kada su u pitanju jednaki kvantiteti. Tako se relaciona teorija ispostavlja kao komplikovana i paradoksalna, iako očigledno nije apsolutno samoprotivrečna. Kao što ćemo videti, u apsolutnoj teoriji nema ni komplikovanosti ni paradoksalnosti.

155. (3) U apsolutnoj teoriji skupu jednakih kvantiteta pripada određeni pojam, naime, određena veličina. Veličine se među pojmovima odlikuju time što stoje u relacijama veće od i manje od (ili barem u jednoj od njih) prema drugim terminima, koji su zbog toga takođe veličine. Dve veličine ne mogu biti jednake jer jednakost pripada kvantitetima i definisana je posedovanjem *iste* veličine. Svaka veličina je prost i nedefinljiv pojam. Ni za jednu od ma koje dve veličine ne važi da je jedna veća a druga manja, naprotiv, ako je data neka veličina, onda one veličine koje su veće ili manje od nje formiraju izvesnu određenu klasu, unutar koje bilo koja od dve jeste veća, a druga manja. Takva klasa se naziva *vrsta* veličine. Međutim, vrsta veličine može takođe biti definisana i na drugi način koji mora biti povezan sa nekim od gorenavedenih aksioma. Svaka veličina je veličina nečega – zadovoljstva, rastojanja, oblasti, itd. i stoga stoji u izvesnoj specifičnoj relaciji preme onom nečem čija je veličina. Ova relacija je naročita i izgleda da ne može dalje da se definiše. Sve veličine koje stoje u ovoj relaciji prema jednoj te istoj stvari (na primer zadovoljstvu) jesu veličine jedne vrste; a na osnovu ove definicije postaje aksiom tvrđenje da je od dve veličine iste vrste jedna veća a druga manja.

156. Izloženoj teoriji može da se uputi primedba zasnovana na relaciji veličine prema onome čija je veličina. Da bismo tačno odredili na šta se misli, razmotrimo zadovoljstvo. Veličina zadovoljstva je toliko-i-toliko zadovoljstva tolikog-i-tolikog intenziteta. Izgleda da je teško smatrati ovako nešto, pošto apsolutna teorija zahteva, kao prostu ideju, da su neophodna dva konstituenta, zadovoljstvo i intenzitet. Nije neophodno da intenzitet bude intenzitet zadovoljstva, a intenzitet zadovoljstva se razlikuje od apstraktnog zadovoljstva. Ali, ono što se zahteva za konstituisanje izvesne veličine zadovoljstva nije intenzitet uopšte nego izvestan specifičan intenzitet; a *specifičan* intenzitet ne može biti indiferentan u odnosu na zadovoljstvo ili na nešto drugo. Ne možemo prvo da odredimo koliko ćemo nečega imati pa tek onda odlučiti da li će to biti zadovoljstvo ili masa. Specifičan intenzitet mora biti specifične vrste. Tako, intenzitet i zadovoljstvo nisu nezavisni i koordinirani elementi u određivanju date količine zadovoljstva. Postoje različite vrste intenziteta i različite veličine u svakoj vrsti, ali veličine u različitim vrstama moraju biti različite. Tako, izgleda da zajednički element na koji se upućuje rečju *intenzitet* ili *veličina* nije nešto intrinsično što može biti otkriveno analizom nekog pojedinačnog termina, već je puka činjenica da jedan termin stoji u relaciji nejednakosti. Veličine su definisane samim tim što stoje u ovoj relaciji i one se ne slažu ni u čemu drugom do u onome što sama definicija kaže. Klasa kojoj sve one pripadaju, slično bračnom delu zajednice, definisana je uzajamnim relacijama između njenih termina a ne nekom zajedničkom relacijom prema nekom terminu spolja, osim ako sama nejednakost nije bila uzeta kao takav termin, što bi onda bila samo jedna suvišna komplikacija. Neophodno je razmotriti ono što se može nazvati ekstenzijom ili poljem relacije kao i ekstenzijom ili poljem klasnog pojma, a veličina je klasa koja formira ekstenziju nejednakosti. Tako je *veličina zadovoljstva* kompleks zato što predstavlja kombinaciju veličine i zadovoljstva; ali, pojedinačna veličina zadovoljstva nije kompleks, jer veličina uopšte ne ulazi u njen pojam. Ona je veličina samo zato što je veća ili manja nego izvesni drugi termini; ona je veličina *zadovoljstva* zbog izvesne relacije u kojoj stoji prema zadovoljstvu. Ovo se lakše shvata tamo gde veličina ima posebno ime. Jedan jard je, na primer, veličina, zato što je veći nego stopa; on je veličina dužine, zato što je ono što se naziva *jedna* dužina (*a length*). Tako, sve veličine su prosti pojmovi, a razvrstane su u vrste s obzirom na relacije u kojima stoje prema nekom kvalitetu ili relaciji. Kvantiteti koji su primeri veličina su partikularizovani prostorno-vremenskim položajem ili (u slučaju relacija koje su kvantiteti) terminima koje relacija povezuje. Kvantiteti zapravo nisu veći ili manji, jer relacije biti veće i biti manje važe između njihovih veličina koje su različite od kvantiteta.

Kada se ova teorija primeni na navođenje neophodnih aksioma, nalazimo jedno upadljivo pojednostavljenje. Aksiomi u kojima se javlja jednakost svi moraju postati dokazivi, a zahteva se samo sledeće (pri čemu su *L*, *M*, *N*, veličine jedne vrste):

(*a*) Nijedna veličina nije veća ili manja od same sebe.

(*b*) *L* je veće od *M* ili *L* je manje od *M*.

(*c*) Ako je *L* veće od *M*, onda je *M* manje od *L*.

(*d*) Ako je *L* veće od *M* i *M* je veće od *N*, onda je *L* veće od *N*.

Težak aksiom koji smo ranije nazvali (*b*) je izbegnut kao i drugi aksiomi koji se tiču jednakosti, a oni koji preostaju su jednostavniji nego prethodni skup aksioma.

157. Moguće je opredeliti se između apsolutne i relativne teorije pozivanjem na izvestan naširoko primenjiv princip, koji predlažem da se nazove princip apstrakcije. Ovaj princip tvrdi da kadgod neka relacija ima instance i kada ima svojstva simetričnosti i tranzitivnosti, onda ta relacija nije prvobitna već je svodiva na istovetnost relacije prema nekom drugom terminu; ova relacija je takva da postoji najviše jedan termin prema kojem neki dati termin može stajati u takvoj relaciji, premda mnogi termini mogu stajati u takvoj relaciji prema datom terminu. (To znači da je ova relacija slična relaciji sina prema ocu: čovek može imati mnogo sinova, ali može imati samo jednog oca).

Ovaj princip sa kojim smo se već susreli u vezi sa kardinalnim brojevima možda izgleda složeno. Ali, njega je moguće dokazati, i u stvari predstavlja vrlo pažljivu formulaciju jedne vrlo obične pretpostavke. Generalno se smatra da su sve relacije analizabilne na jednakost ili na raznovrsnost sadržaja. Premda potpuno odbacujem ovo gledište, zadržavam, ukoliko je reč o asimetričnim tranzitivnim relacijama, ono što predstavlja modifikaciju onoga što se tvrdi tradicionalnim učenjem. Takve relacije su, da upotrebim običniju frazeologiju, uvek konstituisane time što poseduju neko zajedničko svojstvo. Ali, zajedničko svojstvo nije baš precizan pojam i neće moći da u većini njegovih uobičajenih značenja formalno ispuni funkciju analiziranja relacija o kojima se radi. Zajednički kvalitet dva termina se uobičajeno smatra predikatom tih termina. Ali čitavo učenje o subjektu i predikatu kao jedina forma u kojoj iskazi mogu biti kao i celokupno negiranje ikakve realnosti relacija, odbačeni su logikom koja se zastupa u ovom radu. Napuštajući reč *predikat*, možemo reći da je najviši opšti smisao koji se može dati zajedničkom svojstvu ovaj: zajedničko svojstvo dva termina je neki treći termin prema kojem oba stoje u jednoj istoj relaciji. U ovom opštem smislu, posedovanje zajedničkog svojstva je simetrično, ali ne nužno i tranzitivno. Da bi mogla da bude tranzitivna, relacija prema zajedničkom svojstvu bi morala da bude takva da najviše jedan termin može biti svojstvo nekog datog termina[1]. Takva je relacija kvantiteta prema njegovoj veličini ili događaja prema vremenu u kome se zbiva: ako je dat jedan termin ove relacije, naime, referencija, onda je drugi određen, ali ako je dat drugi, onda onaj prvi nikako nije određen.

---

[1] Dokaz ovih tvrdnji je matematički i zavisi od logike relacija; ovo se može naći u mom članku „Sur la Logique des Relations“, *R.d.M.*, VII, br. 2, §1, props. 6.1 i 6.2.

Tako je moguće dokazati da posedovanje zajedničkog svojstva tipa koji je u pitanju uvek vodi simetričnoj tranzitivnoj relaciji. Ovim principom apstrakcije se tvrdi suprotno – da takve relacije proizlaze iz zajedničkih svojstava gorenavedenog tipa[1]. Trebalo bi primetiti da relacija terminâ prema onome što sam nazvao njihovim zajedničkim svojstvom nikada ne može biti relacija koja se obično označava kao relacija subjekta i predikata ili kao relacija individue prema njenoj klasi. Prema opštem mišljenju, nijedan subjekat ne može da ima samo jedan predikat i nijedna individua ne može da pripada samo jednoj klasi. Relacija terminâ prema njihovom zajedničkom svojstvu je, uopšte uzev, različita u različitim slučajevima. U slučaju koji trenutno razmatramo, kvantitet je kompleks čija je veličina element: relacija kvantiteta prema veličini je dalje određena činjenicom da veličina mora da pripada izvesnoj klasi, naime, klasi veličina. Stoga se mora prihvatiti kao aksiom (kao u slučaju boja) da dve veličine iste vrste ne mogu da koegzistiraju na jednom prostorno-vremenskom mestu ili da subzistiraju kao relacije između istog para terminâ, a ovo podržava zahtevana jedinstvenost veličine. Takvi sintetički sudovi o inkompatibilnosti vode negativnim sudovima; ali, ovo je isključivo logička tema na kojoj nije neophodno da se duže zadržavamo u ovom kontekstu.

158. Sada možemo da sumiramo prethodno razmatranje kratkim izlaganjem rezultata. Imamo par nedefinljivih relacija koje smo nazvali *veće od* i *manje od*; ove relacije su asimetrične i tranzitivne i nespojive su jedna sa drugom. Svaka predstavlja konvers one druge, u smislu da, kad god jedna važi između A i B, onda druga važi između B i A. Termini koji mogu da stoje u ovim relacijama su *veličine.*

[1] Ovaj princip se dokazuje pokazivanjem da, ako je R simetrična tranzitivna relacija, a a termin polja od R, onda a stoji prema klasi termina prema kojima stoji u relaciji R posmatranoj kao celini u mnogo-jedan relaciji koja je, kada se relaciono pomnoži sa svojim konversom, jednaka R. Kada se radi o formalnim argumentima, veličina može da se poistoveti sa klasom jednakih kvantiteta.

Svaka veličina stoji u izvesnoj posebnoj relaciji prema nekom pojmu, što se izražava tvrđenjem da je to veličina *tog* pojma. Za dve veličine koje stoje u toj relaciji prema istom pojmu kaže se da su iste vrste: biti iste vrste je nužan i dovoljan uslov za relacije veće od i manje od. Kada veličina može biti partikularizovana vremenski, prostorno ili prostorno-vremenski ili kada, budući relacija, može biti partikularizovana uzimanjem u obzir para termina između kojih važi, onda se tako partikularizovana veličina naziva *kvantitet.* Dve veličine iste vrste nikada ne mogu biti partikularizovane posredstvom potpuno istih određenja. Za dva kvantiteta koje dobijamo partikularizacijom jedne iste veličine kaže se da su *jednaki*.

Dakle, kao nedefinljivo preostaje (1) veće od i manje od, (2) svaka pojedinačna veličina. Naši nedokazivi iskazi su:

(1) Svaka veličina stoji prema nekom terminu u relaciji koja je čini relacijom izvesne vrste.

(2) Od neke dve veličine iste vrste, jedna je veća, a druga je manja.

(3) Dve veličine iste vrste, ako mogu da zauzimaju prostor ili vreme, onda ne mogu obe da imaju isti prostorno-vremenski položaj; ako su relacije, onda nikada ne mogu biti relacije između istog para termina.

(4) Nijedna veličina nije veća od same sebe.

(5) Ako je A veće od B, B je manje od A i obratno.

(6) Ako je A veće od B, a B je veće od C, onda je A veće od C[1].

Nadalje, aksiomi karakterišu različite vrste veličina, ali izgleda da gorenavedeni aksiomi nužno karakterišu samo veličinu uopšte. Nijedan od njih ne zavisi ni na koji način od broja ili merenja, te stoga ne moramo da se uznemiravamo zbog veličina koje se ne mogu deliti ili meriti, za koje ćemo u sledećoj glavi naći mnoštvo primera.

---

[1] Nije neophodno da se u (5) i (6) doda „ako su A, B, C veličine“ jer su gore navedene relacije *veće od* i *manje od* ono što definiše veličine, te bi stoga ovo dodavanje bilo tautološko.

Opaska na Glavu XIX. Majnongov rad na Veberovom zakonu, na koji je već upućivano, je rad od kog sam toliko mnogo naučio i sa kojim se u tolikoj meri slažem da izgleda poželjno da se opravdam s obzirom na ona mesta u kojima od njega odstupam. Ovaj rad počinje (§1) karakterizacijom veličine kao nečega što je ograničeno prema nuli. Nula je shvaćena kao negacija veličine, a nakon diskusije Majnong prihvata i sledeći iskaz (na str. 8):

„To jeste veličina ili to ima veličinu što dozvoljava interpolaciju termina između sebe i kontradiktorno suprotnog“.

Ostalo je nejasno (*ib.*) da li ovo predstavlja definiciju ili se radi o pukom kriterijumu, ali u svakom slučaju izgleda mi da je to nepoželjno kao fundamentalna karakterizacija veličine. Kako Majnong ističe (str. 6, napomena), ovaj iskaz dobija potporu od njegove sličnosti sa Kantovim „Anticipacijama opažaja“[1]. Ali ovo je, ako ne grešim, podložno veoma ozbiljnim primedbama. Na prvom mestu, celokupna teorija o nuli je krajnje teška i izgleda da pre sledi, nego što prethodi, teoriji drugih veličina. Izgleda da je pogrešno tretirati nulu kao kontradiktorno suprotnu drugim veličinama. Ova fraza bi morala da označava klasu dobijenu negacijom klase „veličine takve i takve vrste“, ali to očigledno, ipak, ne bi dalo nulu te vrste veličine. Ma kako interpretirali ovu frazu, izgleda da ona implicira da bismo morali da tretiramo nulu kao da nije veličina vrste čija je nula. Ali u tom slučaju ona nije manja od veličina vrste o kojoj je reč i izgleda da nema smisla reći da je manja veličina *između* nule i veće veličine. U svakom slučaju, pojam *između*, kao što ćemo videti u Četvrtom delu, zahteva asimetrične relacije između termina o kojima je reč. Izgleda da su ove relacije u slučaju veličina ništa drugo nego *veće od* i *manje od* koje, prema tome, prethode relaciji biti između veličina i pogodnije su za definisanje. U nastavku ću nastojati da dam ono što smatram istinitom teorijom nule i tada će se otkriti koliko je ovaj

[1] *Reine Vernunft*, prir. Hartenstein (1867), str. 158.

predmet težak. Stoga ne bi bilo mudro da se nula uvede u prvo objašnjenje veličine. Mogle bi da se iznesu i druge primedbe, na primer, da je nejasno da li sve vrste veličina imaju nulu; da je u diskretnim vrstama veličine nula nevažna; i da među rastojanjima, gde je nula naprosto identitet, jedva da postoji ista relacija nule prema negaciji i neegzistenciji, kao u slučaju kvaliteta, poput zadovoljstva. Ali, glavni razlog mora da bude logička inverzija koja je uključena u uvođenje *između* pre nego što je bilo koja od asimetričnih relacija specifikovana, a od koje bi mogla da nastane. Ovaj predmet će biti ponovo razmatran u Glavi XXII.

Glava XX

DOMEN KVANTITETA

159. U ovoj glavi ćemo razmatrati sledeća pitanja: Koje vrste termina postoje, koje, njihovom zajedničkom relacijom prema nekom broju veličina, konstituišu klasu kvantiteta jedne vrste? Imaju li takvi termini išta zajedničko? Postoji li neka oznaka koja će garantovati da se termin na takav način odnosi prema skupu veličina? Koje vrste veličina su podložne stepenovanju ili koje mogu da imaju intenzitet ili da budu veće ili manje?

Tradicionalno gledište tretira deljivost kao zajedničku oznaku svih termina koji imaju veličinu. Već smo videli da ne postoji *a priori* osnova za ovo gledište. Sada bi trebalo da ispitamo ovo pitanje induktivno – treba pronaći koliko god je moguće nesumnjivih primera kvantiteta i istražiti da li su svi oni deljivi ili pak da li imaju neku drugu zajedničku oznaku.

Bilo koji termin koji može da bude većeg ili manjeg stepena sadrži kolekciju veličina jedne vrste. Stoga je komparativna forma u gramatici *prima facie* svedočanstvo kvantiteta. Ako bi ovo svedočanstvo bilo konkluzivno, morali bismo da prihvatimo da svim, ili skoro svim, kvantitetima može da se pripiše veličina. Hvale i prekori adresirani od strane pesnika njihovim ljubavnicama pružili bi primere komparativa i superlativa najpoznatijih prideva. Ali, treba biti oprezan prilikom oslanjanja na svedočanstva gramatičke prirode. Mislim da uvek postoji *neko* kvantitativno upoređivanje svuda gde se javlja komparativ ili superlativ, ali to često nije upoređivanje u pogledu kvaliteta na koje upućuje gramatika.

„O rumenija od trešnje,
O slađa od jagode,
O nimfo svetlija od svetle mesečine"

su stihovi koji sadrže komparative*. Mislim da u pogledu slatkoće i svetline imamo prava kvantitativna poređenja, ali u pogledu rumenila to može biti sumnjivo. Mislim da komparativ ovde – i uopšte kada su boje u pitanju – ne upućuje na više od date boje, već na više sličnosti prema standardnoj boji. Pretpostavlja se da su različite nijanse boje uređene u niz tako da je razlika kvaliteta veća ili manja shodno većem ili manjem rastojanju u nizu. Jedna od ovih nijansi je idealno „rumenilo", dok se druge nazivaju više ili manje rumenim, shodno njihovoj blizini odnosno udaljenosti od ove nijanse u nizu. Mislim da se isto objašnjenje primenjuje i na takve termine kao što su *belije*, *crnije*, *crvenije*. Stvarni kvantitet o kome je reč u ovim slučajevima izgleda da je relacija, naime, relacija sličnosti. Razlika između dve nijanse boje je sigurno razlika u kvalitetu, a ne samo po veličini; i kada kažemo da je neka stvar crvenija nego neka druga, time ne impliciramo da su one iste nijanse. Ako tu ne bi bilo razlike u nijansi, verovatno bismo rekli da je jedna *svetlija* nego druga, što je sasvim različita vrsta upoređivanja. Ali, premda je razlika dve nijanse razlika kvaliteta, ipak je ova razlika kvaliteta podložna stepenovanju, što pokazuje i mogućnost serijskog uređenja nijansi. Izgleda da je svaka nijansa boje prosta i neanalizabilna, ali su susedne boje u spektru

---

* Stihove „O ruddier than the cherry, oh sweeter than the berry, oh nymph more bright than moonshine light" Rasel navodi prema istoimenoj Polifemovoj ariji iz Hendlove opere *Acis i Galatea*, libretisti Gej, Poup i Hjuz (J. Gay, A. Pope, J. Hughes) (prim. stručnih redaktora prevoda).

sigurno sličnije nego udaljene boje. To je ono što daje kontinuitet bojama. Rekli bismo da između dve nijanse boje, *A* i *B*, postoji uvek treća boja *C*, a to znači da je *C* sličnije *A*-u ili *B*-u, nego što su *B* i *A* slični međusobno. Ali, da nije takvih relacija neposredne sličnosti ne bismo bili u stanju da boje poređamo u niz. Ova sličnost mora biti neposredna pošto su sve nijanse boje neanalizabilne, na šta ukazuje svaki pokušaj da se one opišu ili definišu[1]. Tako imamo jedan nesumnjiv slučaj relacija koje imaju veličinu. Razlika ili sličnost dve boje je relacija a i veličina; jer ona je veća ili manja nego druge razlike ili sličnosti.

160. Na slučaju boja sam se zadržao zato što predstavlja primer jedne vrlo značajne klase. Kada neki broj termina može da se poređa u niz, često se dešava da bilo koja dva termina stoje u relaciji koja može da se, u uopštenom smislu, nazove *rastojanjem*. Ova relacija je dovoljna za generisanje serijskog uređenja i uvek je nužno veličina. U svim ovakvim slučajevima, ako termini niza imaju imena i ako ova imena imaju komparative, onda ovi komparativi ukazuju ne na više termina o kojem je reč, već na veću sličnost tom terminu. Tako, ako pretpostavimo vremenski niz u kojem ima rastojanja, kada se za neki događaj kaže da je skoriji nego drugi, to znači da je njegovo rastojanje od sadašnjeg trenutka bilo manje nego rastojanje onog drugog trenutka. Stoga skorašnjost nije kvalitet vremena ili događaja. Ono što je kvantitativno upoređeno u ovom slučaju su relacije a ne kvaliteti. Slučaj boja je pogodan za ilustraciju zato što boje imaju imena i zato što je opšte prihvaćeno da je razlika dve boje kvalitativna. Ovaj princip je široko primenjiv. Značaj ove klase veličina i apsolutna neophodnost da imamo jasne

[1] O sličnosti boja vidi Meinong „Abstrahiren und Vergleichen“, *Zeitschrift f. Psych. u. Phys. d. Sinnesorgane*, Vol. XXIV, str. 72ff. Nisam siguran da se slažem sa celim Majnongovim argumentom, ali mi se čini da je njegov opšti zaključak „dass die Umfangscollective des Aehnlichen Allgemeinheiten darstellen, an denen die Abstraction weningstens unmittelbar keinen Antheil hat“ (str. 78) tačan i važan logički princip.

pojmove o njihovoj prirodi sve više će se pokazivati. Celokupna filozofija prostora i vremena i doktrina takozvanih ekstenzivnih veličina, u svakom pogledu, zavise od jasnog razumevanja toga šta su niz i rastojanje.

Moramo da razlikujemo rastojanje od puke razlike ili nesličnosti. Rastojanje važi samo u pogledu termina u nizu. Ono je usko povezano sa poretkom i implicira da se termini između kojih važi naprosto razlikuju i da ta jednostavna razlika nije analizabilna na konstituente. Ono takođe implicira da je prelaženje sa jednog udaljenog termina na neki drugi termin koji pripada istom nizu više ili manje kontinuirano. Uzeta po sebi, puka razlika izgleda da predstavlja goli *minimum* relacije zato što čini preduslov gotovo svih relacija. Ona je uvek apsolutna i ne može da se stepenuje. Pored toga, ova razlika važi između ma koja dva termina i ona se jedva razlikuje od tvrđenja da se tu radi o dva termina. Ali rastojanje važi samo između članova nekog niza i njegovo postojanje čini da postoji i sam niz. Rastojanje je specifična relacija i ima *smer*; možemo da razlikujemo rastojanje *A* od *B* od rastojanja *B* od *A*. Ova poslednja oznaka je dovoljna kako bismo razlikovali rastojanje od puke razlike.

Možda bi moglo da se pretpostavi da, u slučaju niza koji sadrži rastojanje, pemda rastojanje *AB* mora biti veće ili manje od *AC*, rastojanje *BD*, ipak, ne mora da bude veće ili manje od rastojanje *AC*. Na primer, očigledno je veća razlika između zadovoljstva zbog posedovanja ₤5 i zadovoljstva zbog posedovanja ₤100, nego razlika između zadovoljstva zbog posedovanja ₤5 i zadovoljstva zbog posedovanja ₤20. Ali, treba li da bude ili jednakosti ili nejednakosti između razlike u zadovoljstvu zbog ₤1 i ₤ 20 i razlike u zadovoljstvu zbog ₤5 i ₤100? Na ovo pitanje se mora odgovoriti potvrdno. Jer, *AC* je veće ili manje od *BC*, a *BC* je veće ili manje od *BD*; stoga su *AC*, *BC* i takođe *BC*, *BD* veličine iste vrste. Otuda su i *AC*, *BD* veličine iste vrste i, ako nisu identične, onda jedna mora biti veća, a druga manja. Stoga, kada postoji rastojanje u nizu, svaka dva rastojanja u nizu su kvantitativno uporediva.

Trebalo bi primetiti da sve veličine jedne vrste formiraju niz i da, ako ima rastojanja, onda su i ta rastojanja takođe veličine. Ali, ne sme se pretpostaviti da se one mogu, uopšte uzev, dobiti oduzimanjem ili da su iste vrste kao veličine čije razlike izražavaju. Oduzimanje, po pravilu, zavisi od deljivosti, te je stoga, uopšte uzev, neprimenljivo na nedeljive kvantitete. Ovo je značajno te ćemo ga stoga detaljnije razmatrati u sledećoj glavi.

Blizina i rastojanje su relacije koje imaju veličinu. Postoje li i neke druge relacije koje imaju veličinu? U to se, mislim, može sumnjati[1]. Meni neka druga takva relacija nije poznata, mada ne znam nijedan način na koji bi se isključilo da one postoje.

161. Postoji jedna teško shvatljiva klasa terminâ koji se obično smatraju veličinama koje prividno impliciraju relacije iako sigurno nisu uvek relacione. To su diferencijalni količnici poput brzine i ubrzanja. Moramo ih imati u vidu pri svakom pokušaju generalizacije koji bi se odnosio na veličine, ali zbog njihove kompleksnosti zahtevaju posebno razmatranje koje ćemo sprovesti u Petom delu, kada ćemo videti da diferencijalni količnici nikada nisu veličine nego samo realni brojevi ili segmenti u nekom nizu.

162. Sve veličine kojima smo se bavili do sada bile su, strogo rečeno, nedeljive zbog čega se postavlja pitanje: da li ima nekih deljivih veličina? Mislim da se ovde mora napraviti jedna razlika. Veličina je suštinski jedno, a ne mnogo. Zato se nijedna veličina ne može pravilno izraziti kao broj termina. Ali, ne može li kvantitet koji ima veličinu biti zbir delova, a veličina veličina deljivosti? Ako je tako, svaka celina koja se sastoji od delova biće pojedinačni termin koji poseduje svojstvo deljivosti. Što se celina sastoji iz više delova, to je njena deljivost veća. Po ovoj pretpostavci, deljivost je veličina od koje možemo imati veći ili manji stepen, a stepen deljivosti u konačnim celinama tačno odgovara broju delova. Iako je celina koja

---

[1] Cf. Majnong, *Ueber die Bedeutung des Weber'schen Gesetzes*, Hamburg und Leipzig, 1896, str. 23.

ima svojstvo deljivosti deljiva, njena deljivost koja je sama strogo govoreći veličina zapravo nije strogo govoreći deljiva. Sama deljivost se ne sastoji iz delova već samo od svojstva imati delove. Da bismo dobili deljivost, neophodno je da celinu tretiramo strogo kao *jedno*, a deljivost kao njen pridev. Stoga, iako se u ovom slučaju radi o numeričkom merenju i o svim matematičkim posledicama deljenja, naša veličina je ipak, filozofski govoreći, nedeljiva.

Međutim, javljaju se teškoće ukoliko želimo da prihvatimo deljivost kao vrstu veličine. Izgleda da deljivost ne treba da bude svojstvo celine nego samo relacija prema delovima. O ovome je teško odlučiti, ali mislim da se prilično toga može reći u prilog shvatanja deljivosti kao prostog kvaliteta. Celina prema svim svojim delovima stoji u izvesnoj relaciji koju, pogodnosti radi, možemo nazvati relacijom uključivanja. Ova relacija je ista bilo da ima mnogo delova, bilo da ima malo delova; ono što odlikuje celinu sa mnogo delova je to što ima mnogo takvih relacija uključivanja. Ali, izgleda da je prihvatljivo pretpostaviti da se celina sa mnogo delova razlikuje od celine sa malo delova u nekom intrinsičnom pogledu. U stvari, celine se mogu ređati u nizove u zavisnosti od toga da li imaju više ili manje delova, a serijsko uređenje implicira, kao što smo već videli, neke nizove svojstava koja se više ili manje razlikuju jedna od drugih i koja se slažu kada dve celine imaju isti konačan broj delova, ali različit od broja delova u konačnim celinama. Ova svojstva ne mogu biti ništa drugo nego veći ili manji stepeni deljivosti. Stoga *izgleda* da je veličina deljivosti prosto svojstvo celine, različito od broja delova uključenih u tu celinu ali povezano sa tom celinom pod uslovom da je broj delova koji su u tu celinu uključeni konačan. Ukoliko je ovo gledište održivo, može se dopustiti da deljivost ostane numerički merljiva, ali ne deljiva klasa veličina. U ovoj klasi bi mogle da se nađu dužine, površine i zapremine, ali ne i rastojanja. Međutim, kasnije ćemo videti da deljivost beskonačnih celina, u smislu u kojem se ona ne meri kardinalnim brojevima, mora biti izvedena na osnovu relacija analogno načinu na koji je izvedeno rastojanje, te mora u stvari biti svojstvo relacija[1].

Tako bi u svakom slučaju izgledalo da su sve veličine nedeljive. Ovo je jedno zajedničko svojstvo koje sve veličine poseduju i, koliko mi je poznato, jedino koje bi trebalo dodati onima koja su nabrojana u Glavi XIX. Što se tiče domena kvantiteta, izgleda da se o tome ne može izreći neki opšti stav. Mnogi prosti nerelacioni termini imaju veličinu, pri čemu su glavni izuzeci boje, tačke, trenuci i brojevi.

163. Na kraju je značajno da se prisetimo da je, prema teoriji koja je prihvaćena u Glavi XIX, neka data veličina određene vrste prost pojam koji prema toj vrsti stoji u relaciji koja je analogna relaciji uključivanja u klasu. Kada je vrsta o kojoj govorimo vrsta postojećih stvari, kao što je zadovoljstvo, to što aktualno postoji nije nikada vrsta već samo različite pojedinačne veličine te vrste. Apstraktno uzeto, zadovoljstvo ne postoji, već postoje njegove različite količine. Ovaj stepen apstrakcije je suštinski za teoriju kvantiteta: moraju postojati entiteti koji se jedan od drugog ne razlikuju ni u čemu osim u pogledu veličine. Razlozi u prilog ovakve teorije se možda mogu jasnije istaći daljim ispitivanjem ovog slučaja.

Počnimo sa Bentamovim čuvenim tvrđenjem: „Ako je kvantitet zadovoljstva koje proizvodi čioda jednak kvantitetu zadovoljstva koje proizvodi poezija, čioda bi onda bila jednako dobra kao i poezija". Poenta ovog suda tiče se kvalitativne razlike zadovoljstava. Ali, da bismo bili u stanju da kažemo da su kvantiteti zadovoljstva jednaki, morali bismo da budemo u stanju da apstrahujemo od kvalitativnih razlika i da tako preostane izvesna veličina zadovoljstva. Ako je ovo apstrahovanje legitimno, kvalitativne razlike onda ne moraju da budu razlike kvaliteta već samo razlike relacije prema drugim terminima, kao što je u navedenom primeru razlika u uzročnoj relaciji. Jer, nisu stanja zadovoljstva ono što se poredi već samo – što i forma Bentamovog suda pogodno ilustruje – njihov kvalitet zadovoljstva.

---

[1] Vidi Glavu XLVII.

Ako pretpostavimo da veličina zadovoljstva nije odvojeni entitet, nastaće teškoća zato što puki element zadovoljstva mora da bude identičan u ova dva slučaja, dok je ono što mi zahtevamo moguća razlika veličine. Stoga ne možemo tvrditi niti da samo celo konkretno stanje postoji i da je bilo koji njegov deo apstrakcija, niti da je ono što postoji apstraktno zadovoljstvo, niti veličina zadovoljstva. A ne možemo reći ni da od celih stanja apstrahujemo dva elementa – veličinu i zadovoljstvo – jer onda ne bismo dobili kvantitativno upoređivanje zadovoljstava. Ova dva stanja bi bila usaglašena u pogledu toga što su zadovoljstva i što su veličine. Ali, ovo nam ne bi dalo veličinu zadovoljstva već bi dalo veličinu stanja kao celine što nije prihvatljivo. Stoga, uopšte uzev, ne možemo da apstrahujemo veličinu od stanjâ, pošto kao celine ona nemaju veličinu, a videli smo i da ne smemo da apstrahujemo golo zadovoljstvo ako treba da zadržimo mogućnost različitih veličina. Dakle, ono što treba da apstrahujemo je veličina zadoljstva kao celina. Ovo se ne sme razložiti na veličinu i zadovoljstvo već mora biti apstrahovano kao celina, a veličina zadovoljstva mora da postoji kao deo celine stanja zadovoljstva jer je kvantitativno poređenje moguće samo u slučajevima gde nema nikakve razlike osim razlike u pogledu veličine. Stoga, razmatranje ovog pojedinačnog slučaja potpuno potvrđuje teoriju prema kojoj je svaka veličina neanalizabilna i prema kojoj svaka veličina stoji samo u relaciji koja je analogna relaciji uključivanja u klasu prema tom apstraktnom kvalitetu ili relaciji čija je ona veličina.

Pošto smo videli da su sve veličine nedeljive, razmatranje koje sledi će se ticati toga u kojoj meri brojevi mogu da se upotrebe za izražavanje veličina, kao i prirode i granice merenja.

Glava XXI

IZRAŽAVANJE VELIČINA POMOĆU BROJEVA: MERENJE

164. Jedna od pretpostavki obrazovanog zdravog razuma jeste da dve veličine iste vrste moraju biti numerički uporedive. Ljudi su spremni da kažu da su oni trideset posto zdraviji i srećniji nego što su bili, ne sumnjajući da su takve rečenice lišene značenja. Svrha ove glave je da objasni šta se podrazumevalo pod merenjem, šta pod klasama veličina na koje se ono primenjuje, i kako se merenje na njih primenjuje.

Merenje veličina je, u najopštijem smislu, svaki metod kojim je uspostavljena neka biunivoka korespondencija između svih ili nekih veličina jedne vrste i svih ili nekih brojeva, celih, racionalnih ili realnih, u zavisnosti od slučaja. (Moglo bi se pomisliti da bi ovde trebalo uključiti i kompleksne brojeve, ali ono što *jedino* može biti mereno kompleksnim brojevima je u stvari uvek agregat veličina različite vrste a ne neka pojedinačna veličina). U ovom opštem smislu, merenje zahteva neku jedan-jedan relaciju između brojeva i veličina o kojima je reč – relaciju koja može biti direktna ili indirektna, značajna ili trivijalna, u zavisnosti od okolnosti. Merenje u ovom smislu može da se primenjuje na veliki broj klasa veličina; kao što ćemo videti, merenje se primenjuje na dve velike klase, rastojanja i deljivosti, u jednom značajnijem i užem smislu.

U pogledu merenja u najopštijem smislu ima malo toga da se kaže. Pošto brojevi formiraju niz i pošto svaka vrsta veličina takođe formira niz, bilo bi poželjno da poredak merenih veličina odgovara poretku brojeva, to će reći da sve relacije *između* budu iste za veličine i za njihove mere. Gdegod ima nule, poželjno je da ona bude merena brojem nula. Mogli bi da se formulišu ovakvi ili onakvi uslovi koje bi jedna mera trebalo da ispunjava, ako je moguće, ali to ima više praktičan nego teorijski značaj.

165. Postoje dva opšta metafizička stanovišta od kojih svako, ako se prihvati, pokazuje da su *sve* veličine teoretski podesne za merenje u gore definisanom smislu. Prvo od njih je teorija prema kojoj svi događaji predstavljaju ili događaje u dinamičkom uzročnom nizu ili sa njima korelirane događaje. U pogledu sekundarnih kvaliteta, na ovo gledište je u velikoj meri uticala fizika tako što je, time što nas je snabdela većinom takozvanih intenzivnih kvantiteta koji se javljaju u prostoru, sa prostornim i otuda numeričkim merama. U pogledu mentalnih kvantiteta, na teoriju o kojoj je reč uticala je teorija psihofizičkog paralelizma. U ovom slučaju kretanje koje je korelirano sa bilo kojim psihičkim kvantitetom, uvek teorijski pruža sredstva za merenje tog kvantiteta. Drugo metafizičko stanovište koje vodi univerzalnoj merljivosti jeste ono koje je zastupao Kant u „Anticipacijama opažaja“[1]; naime, radi se o tome da je među intenzivnim veličinama svako povećanje uvek praćeno povećanjem realnosti. Izgleda da je realnost u ovom kontekstu sinonim za egzistenciju. Stoga se ova teorija može izraziti na sledeći način: egzistencija je vrsta intenzivne veličine od koje tamo gde postoji veća veličina uvek postoji više nego tamo gde postoji manja veličina. (Ne izgleda

[1] *Reine Vernunft*, prir. Hart. (1867), str. 160. Način na koji je Kant to formulisao u prvom izdanju bolje ilustruje teoriju na koju ovde mislim. Vidi, na primer, Erdmanovo izdanje, str. 161.

neverovatno da je baš ovo Kantova teorija ali je to, u najmanju ruku, održivo gledište). U ovom slučaju, pošto dve instance iste veličine (to jest dva jednaka kvantiteta) moraju imati više egzistencije nego jedan, sledi da, ako je moguće naći neku pojedinačnu veličinu iste vrste koja ima istu količinu egzistencije kao dva jednaka kvantiteta zajedno, onda se ta veličina može nazvati dvostrukom veličinom od svakog od ovih kvantiteta. Teorijski posmatrano, na ovaj način mogu da se mere sve intenzivne veličine. Bilo bi apsurdno tvrditi da ovaj metod ima neki praktičan značaj, ali on može da doprinese da izraz dvostruko srećan dobije značenje. Na primer, možemo reći da detetu jedna čokolada pričinjava toliko zadovoljstvo koliko i dve kisele bombonice, a na osnovu ovakvih sudova bi mogao da se izgradi i hedonistički kalkulus.

Postoji jedno drugo opšte zapažanje koje je značajno u ovom kontekstu. Ako se tvrdi da su svi nizovi veličina ili kontinuirani u Kantorovom smislu ili da su slični nizovima koji mogu da se odaberu među kontinuiranim nizovima, onda je teorijski moguće korelirati neku vrstu veličina sa svim ili nekim od realnih brojeva, tako da nule odgovaraju nulama i da veće veličine odgovaraju većim brojevima. Ali, ako bilo koji niz veličina koji nije kontinuiran sadrži kontinuirani niz, onda će takav niz veličina biti, strogo i teorijski uzev, nemerljiv pomoću realnih brojeva[1].

166. Ostavljajući po strani ove donekle nejasne generalizacije, ispitajmo sada jedan običniji i konkretniji smisao merenja. Potreban nam je neki smisao merenja u kojem možemo reći da je jedna veličina dvostruko veća od druge. U prethodnim primerima ovaj smisao je izveden posredstvom koreliranja sa prostorno-vremenskim veličinama ili sa egzistencijom. Time se pretpostavljalo da je tako pronađeno značenje za „biti dvostruko veći od“. Stoga merenje zahteva da u nekim slučajevima treba da postoji intrinsično značenje iskaza „ova veličina je dvostruko veća od“. (U nastavku će biti pokazano

[1] Vidi Deo V, Glava XXXIII ff.

u kom smislu je to značenje intrinsično). E sad, sve dok se kvantiteti tretiraju kao inherentno deljivi, postoji sasvim očigledno značenje iskaza poput: veličina *A* je dvostruko veća od veličine *B*, kada je ona veličina dva kvantiteta uzeta zajedno, od kojih svaki ima veličinu *B*. (Trebalo bi primetiti da je nemoguće uvek podeliti *veličinu* na dva jednaka dela pošto ne postoje takve stvari kao jednake veličine). Takva interpretacija će se ipak primeniti na veličine deljivosti, ali pošto smo prihvatili druge veličine za njih se mora naći drugačija interpretacijja (ako je ima). Ispitajmo najpre slučaj deljivostî a potom nastavimo sa drugim slučajevima u kojima je merenje intrinsično moguće.

167. Deljivost konačnih celina je neposredno i inherentno u korelaciji sa brojem prostih delova u celini. U ovom slučaju, iako veličine i dalje ne mogu da se sabiraju na način koji se traži, kvantiteti mogu da se sabiraju onako kako je objašnjeno u Drugom delu. Sabiranje dve veličine deljivosti daje samo dve veličine, a ne novu veličinu. Ali, sabiranje dva kvantiteta deljivosti, to jest dve celine, daje novu pojedinačnu celinu pod uslovom da je sabiranje one vrste koja proizlazi iz logičkog sabiranja, tretirajući klase kao celine formirane od njihovih delova. Stoga postoji jedno prihvatljivo značenje toga da je jedna veličina deljivosti dvodstruko veća od druge kada se primenjuje na celinu koja sadrži dvaput toliko delova. Ali, u slučaju beskonačnih celina stvar nikako nije tako prosta. Ovde broj prostih delova (uzeto samo u smislu beskonačnog broja koji je do sada otkriven) može biti jednak a da nema jednakosti u pogledu veličine deljivosti. Ovde se zahteva metod koji se ne oslanja na proste delove. U aktualnom prostoru formiramo neposredne sudove o jednakosti u pogledu dve beskonačne celine. Kada formiramo takve sudove, možemo smatrati zbir od *n* jednakih celina kao *n* puta svake od njih; za sabiranje celina se ne zahteva njihova konačnost. Na ovaj način numeričko upoređivanje nekog para celina postaje moguće. Uobičajenim poznatim metodama, neprekidnom potpodelom i metodom granica, ovo je prošireno na sve parove celina koje su takve da su neposredna upoređivanja moguća. Bez ovih neposrednih upoređivanja koja su nužna i logički i psihološki[1], ništa ne može biti postignuto: u krajnoj liniji, sve se svodi na neposredni sud da naš merni štap nije značajno promenio svoju veličinu u toku merenja, a ovaj sud prethodi rezultatima fizike koji se tiču mere u kojoj tela *de facto* menjaju svoju veličinu. Ali, tamo gde je neposredno upoređivanje psihološki nemoguće, teorijski je moguće uvesti zamenu u vidu logičke raznolikosti merenja koja, međutim, ne daje svojstvo deljive celine već svojstvo neke relacije ili klase relacija koje su više ili manje analogne relacijama koje važe između tačaka u prostoru.

Deljivost, uzeta u smislu koji se zahteva za površine i zapremine, a koja nije osobina celine, proizlazi iz toga što između tačaka u prostoru uvek postoje relacije koje daju različit prostor (što će biti pokazano u Četvrtom delu). Tako, dva skupa tačaka koji s obzirom na jedan skup relacija daju jednake površine, s obzirom na neki drugi skup daju nejednake površine ili pak jedan formira površinu, a drugi liniju ili zapreminu. Ako bi deljivost u relevantnom smislu bila intrinsična osobina celine, ovo bi bilo nemoguće, ali to ne može biti u celosti razmatrano sve dok ne stignemo do metričke geometrije.

U slučaju kada su naše veličine i same deljivosti, ne samo da ih brojevi mere nego i razlika dva merna broja, uz izvesna ograničenja, meri veličinu razlike (u smislu nesličnosti) između deljivosti. Ako je jedna od ovih veličina fiksirana, njena razlika od drugih veličina raste kako razlika mernih brojeva raste, jer ova razlika zavisi od razlike u broju delova. Ali, ne mislim da može biti generalno pokazano da, ako su A, B, C, D brojevi koji mere četiri veličine, i ako $A - B = C - D$, onda su razlike ovih veličina jednake. Izgledalo bi, na primer, da je razlika između jednog inča i dva inča veća nego ona između 1001 inča i 1002 inča. Ova opaska nije značajna za slučaj kojim se trenutno bavimo pošto se tu nikad ne radi o razlikama deljivosti; ali u slučaju rastojanja ova opaska se na neobičan način tiče

[1] Cf. Majnong, *op.cit*. str. 63–4.

neeuklidske geometrije. Ali, teorijski je značajno primetiti da, ako je deljivost zaista veličina – što izgleda da jednakost površina i zapremina zahteva – onda strogo uzev ne postoji osnov da se kaže da je deljivost zbira dve jedinice dvostruko veća od jedne jedinice. U stvari, ovaj iskaz ne može biti uzet striktno, jer nijedna veličina *nije* zbir svojih delova i, prema tome, nijedna veličina nije dvostruko veća od druge. Možemo samo reći da zbir dve jedinice sadrži dvostruko više delova, što je aritmertički a ne kvantitativni sud koji je adekvatan samo u slučaju kada je broj delova konačan, pošto je u drugim slučajevima dvostrukost broja, uopšte uzev, jednaka samom tom broju. Stoga i merenje deljivosti pomoću brojeva sadrži element konvencionalnosti, a ovaj element je, kao što ćemo videti, još izraženiji u slučaju rastojanja.

168. U prethodnom slučaju se još radilo o sabiranju u jednom od njegova dva fundamentalna smisla, to jest o kombinaciji celina koja formira novu celinu. Ali, u drugim slučajevima veličine, ne radi se o nekom takvom sabiranju. Zbir dva zadovoljstva nije novo zadovoljstvo nego samo dva zadovoljstva. Zbir dva rastojanja takođe nije u pravom smislu jedno rastojanje. Ali, u ovom slučaju imamo proširenje ideje sabiranja. Neko ovakvo proširenje uvek mora biti moguće u slučajevima u kojima merenje treba izvršiti u prirodnijem i ograničenijem smislu koji ćemo sada da razmotrimo. Najpre ću objasniti ovo generalizovano sabiranje, apstraktno govoreći, a onda ću ilustrovati njegovu primenu na rastojanja.

Ponekad se dešava da dva kvantiteta koji ne mogu da se sabiraju u osnovnom smislu ipak stoje u relaciji koja je sama u jedan-jedan relaciji prema kvantitetu iste vrste koje su i kvantiteti između kojih ona stoji. Pretpostavljajući da su *a*, *b*, *c* takvi kvantiteti onda u pretpostavljenom slučaju važi iskaz *aBc* gde je *B* relacija koja jedinstveno određuje i jedinstveno je određena nekim kvantitetom *b*, iste vrste koje su i *a* i *c*. Tako su, na primer, dva odnosa u relaciji koju možemo nazvati njihovom razlikom, a koja je sama potpuno određena drugim odnosom, naime, razlikom, u aritmetičkom smislu, dva data odnosa.

Ako su α, β, γ termini u nizu u kom postoji rastojanje, rastojanja $\alpha\beta$, $\alpha\gamma$ stoje u relaciji koja se meri (mada nije identična sa) rastojanjem $\beta\gamma$. U svim takvim slučajevima, proširivanjem sabiranja možemo staviti $a + b = c$ umesto aBc. Kada god skup kvantiteta sadrži relacije ove vrste i ako još aBc implicira bAc tako da $a + b = b + a$, onda ćemo biti u stanju da postupamo kao da smo imali obično sabiranje i sledstveno tome ćemo da uvedemo numeričko merenje.

Koncepcija rastojanja će biti u celosti razmatrana u Četvrtom delu u vezi sa poretkom: sada mi je stalo da pokažem kako dolazi do toga da rastojanja mogu da se mere. Ova reč će biti upotrebljavana da pokrije daleko opštiju koncepciju od koncepcije rastojanja u prostoru. Pod vrstom rastojanja ću podrazumevati skup kvantitativnih asimetričnih relacija od kojih jedna i samo jedna važi između bilo kog para termina date klase koji su takvi da, ako relacija ove vrste važi između a i b i takođe između b i c, onda jedna relacija te vrste važi između a i c, pri čemu relacija između a i c predstavlja relativni proizvod relacija između a i b, b i c; ovaj proizvod mora biti komutativan, to jest nezavisan od drugih njegovih činilaca; i konačno, ako je rastojanje ab veće od rastojanja ac, onda, ako je d bilo koji drugi član te klase, db je veće od dc. Iako su, dakle, rastojanja relacije i stoga nedeljiva i nepodložna za pravo sabiranje, postoji jedna prosta i prirodna konvencija kojom takva rastojanja postaju numerički merljiva.

To je ova konvencija. Složimo se da, kada su rastojanja a_0a_1, a_1a_2, …, $a_{n-1}a_n$ sva jednaka i shvaćena u istom smislu, onda se kaže da je a_0a_n n puta svako od rastojanja a_0a_1, itd., to jest a_0a_n je merljivo brojem koji je n puta toliko veliki. Generalno se smatralo da ovo nije konvencija već očigledna istina; međutim, usled toga što su rastojanja nedeljiva, nijedno rastojanje u stvari nije zbir drugih rastojanja, a numeričko merenje mora biti jednim delom konvencionalno. Prema ovoj konvenciji, brojevi koji odgovaraju rastojanjima, tamo gde ima takvih brojeva, postaju određeni, osim što u pogledu zajedničkog činioca zavise od izbora jedinice. Posredstvom ovog metoda brojevi su pripisani članovima klase koji stoje na datom rastojanju; pored proizvoljnog činioca ovi brojevi imaju i proizvoljnu aditivnu konstantu koja zavisi od prvobitnog izbora. Ovaj metod se može dalje generalizovati, što će biti potpunije objašnjeno u Četvrtom delu. Da bismo pokazali da *svim* rastojanjima vrste o kojoj je reč i *svim* terminima skupa o kome je reč mogu da se pripišu brojevi, potrebna su nam još dva aksioma, Arhimedov aksiom i ono što se može nazvati aksiomom linearnosti[1].

169. Značaj numeričkog merenja rastojanja, barem kada je reč o prostoru i vremenu, delimično zavisi i od toga što se ono dovodi u relaciju sa numeričkim merenjem deljivosti. U svim nizovima postoje termini između svaka dva termina tog niza čije međusobno rastojanje nije minimalno. Ti termini su određeni kada su dva termina koji su na rastojanju specifikovana. Posredni termini se mogu nazvati *prostiranje* od a do a_n[2]. Celina sastavljena od ovih termina je kvantitet i ima deljivost merenu brojem termina, pod uslovom da je njihov broj konačan. Ako je ovaj niz takav da su rastojanja uzastopnih termina sve jednaka, onda, ako postoji n-1 termina između a i a_n, mera rastojanja je proporcionalna n. Stoga, ako uključimo u prostiranje jedan od krajnjih termina ali ne i drugi, mere prostiranja i rastojanja su proporcionalne i jednaka prostiranja odgovaraju jednakim rastojanjima. Tako broj termina u prostiranju meri rastojanje poslednjeg termina i količinu deljivosti celog prostiranja. Kada prostiranje sadrži beskonačan broj termina, jednaka prostiranja procenjujemo na način kako je to gore objašnjeno. To onda postaje aksiom koji može ili ne mora da važi u datom slučaju, a kojim se tvrdi da jednaka

---

[1] Deo IV, Glava XXXI. Ovim aksiomom se tvrdi da veličina može biti podeljena na n jednakih delova i da formira deo Diboa-Remonove definicije linearnih veličina. Vidi njegovu *Allgemeine Functionentheorie* (Tübingen, 1882), glava I, §16; vidi takođe Betazzi, *Teoria delle Grandezze* (Pisa, 1890), str. 44. Arhimedovim aksiomom se tvrdi da ako su date neke dve veličine iste vrste, onda neki konačni umnožak manjeg nadmašuje veći.

[2] Od strane Majnonga nazvano *Strecke*, *op.cit.*, na primer, str. 22.

prostiranja odgovaraju jednakim rastojanjima. U ovom slučaju, koordinate mere dve sasvim različite veličine, koje su usled njihove zajedničke mere stalno bile brkane.

170. Prethodna analiza razjašnjava jedan neobičan problem koji je morao da zbunjuje većinu ljudi koji su nastojali da filozofiraju o geometriji. Polazeći od jednodimenzionalnih veličina povezanih pravom linijom, većina teorija se može podeliti u dve klase, one primerene površinama i zapreminama, i one primerene uglovima između linija i ravni. Površine i zapremine se radikalno razlikuju od uglova, i generalno su zanemarene u filozofijama koje zastupaju relaciono shvatanje prostora ili koje polaze od projektivne geometrije. Razlog za to je očigledan. Ako na pravoj liniji, kako se obično pretpostavljalo, postoji relacija kao što je rastojanje, onda imamo dve filozofski različite ali praktično stopljene veličine, naime, rastojanje i deljivost prostiranja. Prva je slična uglovima a druga površinama i zapreminama. Uglovi takođe mogu da se tretiraju kao rastojanja između termina u nizu, naime, između linija koje prolaze kroz tačku ili između ravni koje prolaze kroz liniju. Površine i zapremine su, naprotiv, zbirovi ili veličine deljivosti. Usled brkanja ove dve vrste veličina koje se tiču linije, ili uglovi ili površine i zapremine nisu u skladu sa filozofijom koja je smišljena tako da pogoduje linijama. Prethodnom analizom ovaj nesklad je istovremeno objašnjen i prevaziđen[1].

171. Tako vidimo kako su dve velike klase veličina – deljivosti i rastojanja – učinjene merljivim. Ove dve klase praktično pokrivaju ono što se obično naziva ekstenzivnim veličinama i biće pogodno da ih i u nastavku tako zovemo. Ovo ime ću proširiti tako da pokrije sva rastojanja i deljivosti, bilo da su u ikakvoj relaciji

---

[1] U Delu IV ćemo videti razloge za poricanje postojanja rastojanja u većini prostora. Ali, postoji i razlika između prostiranja koja se sastoje od termina nekog niza i kvantiteta, kao što su površine i zapremine, gde termini, u nekom prostom smislu, ne formiraju jednodimenzionalni niz.

prema prostoru i vremenu ili pak ne. Ali, ne sme se pretpostaviti da reč *ekstenzivna* ukazuje, kako se uobičajeno čini, da su tako označene veličine deljive. Već smo videli da nijedna veličina nije deljiva. Deljivi su samo kvantiteti i to na druge kvantitete i samo u slučaju celina koje su kvantiteti deljivosti. Kvantiteti koji su rastojanja, premda ću ih zvati ekstenzivnim, nisu deljivi na manja rastojanja ali oni omogućavaju jednu značajnu vrstu sabiranja koje smo objasnili, a koje ću ubuduće zvati *relaciono* sabiranje[1].

Sve druge veličine i kvantiteti mogu biti prikladno nazvani *intenzivnim*. Što se njih tiče numeričko merenje je nemoguće, osim ako ne posredstvom neke kauzalne relacije ili pomoću neke više ili manje zaobilazne relacije, poput onih koje smo objasnili na početku ove glave. Oni matematičari koji su naviknuti da se isključivo fokusiraju na brojeve, misliće da nema mnogo toga određenog da se kaže o veličinama koje ne mogu da se mere. Međutim, to nipošto nije slučaj. Neposredni sudovi o jednakosti od kojih (kao što smo videli) zavise sva merenja i dalje su mogući u slučajevima gde merenje otkazuje, kao i neposredni sudovi o većem i manjem. Sumnja jedino nastaje tamo gde je razlika mala, a sve što merenje u tom pogledu čini jeste da umanji marginu za sumnju – što je postignuće koje je isključivo psihološke prirode i nije ni od kakvog filozofskog značaja. Stoga, kvantiteti koji nisu podložni numeričkom merenju mogu da se poređaju u skalu većih ili manjih veličina i to je jedino striktno kvantitativno postignuće numeričkog merenja. Mi možemo znati da je neka veličina veća ili manja, i da neka treća veličina postoji između njih, a takođe, pošto su razlike u veličini uvek veličine, uvek postoji (barem teorijski) odgovor na pitanje da li je razlika nekog para veličina veća ili manja od ili ista kao razlika nekog drugog para veličina iste vrste. Ovi iskazi, premda

---

[1] Ono ne sme biti brkano sa *relativnim* sabiranjem u algebri relacija. Ono je pre povezano sa relativnim množenjem.

matematičaru mogu izgledati aproksimativno, zapravo su isto tako precizni i određeni kao i iskazi aritmetike. Prema tome, kvantitativne relacije veličina, bez numeričkog merenja, određene su koliko uopšte mogu da budu – sa teorijskog stanovišta ništa nije dodato ukoliko bi im se pripisali brojevi. Ceo predmet merenja kvantiteta je u stvari više od praktičnog nego od teorijskog značaja. Ono što je od teorijskog značaja je uključeno u šire pitanje korelacije nizova kojim ćemo se baviti u nastavku. Glavni razlog iz kog sam ovaj predmet tretirao tako opširno počiva na njegovom tradicionalnom značaju, iako sam mogao da ga izložim znatno sažetije.

Glava XXII

NULA

172. Ova glava se ne bavi bilo kakvom formom numeričke nule, niti sa infinitezimalom, nego sa čistom nulom veličine. To je nula koju Kant ima u vidu kada pobija Mendelsonov dokaz o besmrtnosti duše[1]. Kant ističe da dok intenzivna veličina ostaje iste vrste, može postati nula; i da, premda je nula određena veličina, nijedan kvantitet čija je veličina nula, ne može postojati. Kao što ćemo videti, ova vrsta nule je fundamentalan kvantitativan pojam i to je jedan od aspekata u kojem se teorija kvantiteta pokazuje neobičnom. Kvantitativna nula ima izvesnu vezu i sa brojem 0 i sa nultom klasom u logici, ali mislim da nije definljiva ni preko jednog od njih. Ono što je manje opšteprihvaćeno jeste njena potpuna nezavisnost od infinitezimala, a ovaj pojam nećemo razmatrati sve do sledeće glave.

Značenje nule u bilo kojoj vrsti kvantiteta pitanje je koje je povezano sa velikom teškoćom i kojem se mora pokloniti najveća pažnja, ukoliko želimo da izbegnemo protivrečnosti. Izgleda da je nula definljiva preko neke opšte karakteristike, bez pozivanja na neku specijalnu vrstu kvantiteta kojem pripada. Pronalaženje takve definicije nije lak posao. *Izgleda* da je nula pojam čije će značenje

---

[1] *Kritik der reinen Vernunft*, prir. Hartenstein, str. 281ff.

radikalno da se menja, u zavisnosti od toga da li su veličine o kojima je reč diskretne ili kontinuirane. Da bismo dokazali da to nije slučaj, ispitajmo različite definicije koje su predlagane.

173. (1) Gospodin Majnong (*op.cit.*, str. 8) smatra nulu kontradiktorno suprotnom svakoj veličini njene vrste. Izraz „kontradiktorno suprotna" spada u dvosmislene izraze. U simboličkoj logici, suprotnost jednoj klasi je klasa koja sadrži sve individue koje ne pripadaju prvoj klasi, i stoga bi suprotnost jednoj individui bile sve druge individue. Ali, ovo značenje je očigledno neodgovarajuće: nula nije sve izuzev jedne veličine njene vrste, niti pak sve izuzev klase veličina njene vrste. Teško da se može reći da je bol nula zadovoljstva. Sa druge strane, za nulu zadovoljstva se kaže da je *nikakvo zadovoljstvo*, a to je očigledno ono što Majnong misli. Ali, premda ćemo videti da je ovo gledište tačno, značenje ovog izraza je vrlo teško shvatiti. To ne znači ništa drugo nego zadovoljstvo, kao kada nas naši prijatelji uveravaju da nije nikakvo zadovoljstvo da nam ukažu na naše greške. To, izgleda, znači ono što je niti zadovoljstvo niti pak nešto drugo. Ali, to bi bio samo jedan nezgrapan način da se kaže *ništa*, i referiranje na zadovoljstvo bi moglo biti potpuno izostavljeno. Ovo daje nulu koja je ista za sve vrste veličina i ako bi to bilo istinito značenje nule onda nula ne bi bila jedna među veličinama jedne vrste, niti pak termin u nizu koji je formiran od veličina iste vrste. Jer, premda je često istina da nema ničeg manjeg od svih veličina neke vrste, ipak je uvek lažno da je sâmo ništa manje od svih njih. Prema tome, ova nula ne referira specifično na bilo koju posebnu vrstu veličine i ne može da ispuni ono što gospodin Majnong od nje zahteva[1]. Međutim, kao što ćemo videti, ovaj izraz može da se interpretira tako da se izbegne ova teškoća. Ali, ispitajmo najpre neka druga predložena značenja ove reči.

174. (2) Nula se može definisati kao najmanja veličina svoje vrste. U slučaju kada je vrsta veličine diskretna i, uopšte, kada

---

[1] Vidi primedbu na Glavu XIX, *supra*.

postoji ono što profesor Betaci naziva *graničnom* veličinom te vrste[1], takva definicija je nedovoljna. Jer, u takvom slučaju, izgleda da je granična veličina u stvari najmanja veličina svoje vrste. I, u svakom slučaju, definicija pre pruža karakteristiku nego što predstavlja pravu definiciju koju bi trebalo tražiti u nekom čistijem logičkom pojmu, jer nula u nekom smislu naprosto mora da bude negiranje svih drugih veličina date vrste. Tvrđenje da je nula najmanja od veličina slično je onome što De Morgan ima na umu kada kaže: „Ahil je bio najjači od svih njegovih neprijatelja". Stoga bi bilo očigledno pogrešno reći da je nula najmanji od pozitivnih celih brojeva ili da je interval između *A* i *A* najmanji interval između neka dva slova alfabeta. Sa druge strane, tamo gde je veličina kontinuirana i gde nema granične veličine iako imamo naizgled postepeno i neograničeno približavanje nuli, ipak i u ovom slučaju može da se prigovori sledeće. Veličine ove vrste su u suštini ono što nema nikakav minimum. Stoga ne možemo bez određene protivrečnosti smatrati nulu njihovim minimumom. Međutim, možemo izbeći ovu protivečnost time što ćemo reći da uvek postoji veličina koja je manja od neke druge, ali koja nije nula osim ako ta druga veličina nije nula. Ovakvom ispravkom se izbegava svaka formalna protivrečnost, a neadekvatna je samo zato što daje više oznaku toga šta je nula nego pravo značenje nule. Štagod drugo da je veličina vrste o kojoj se radi, moglo bi biti umanjeno, a mi želimo da znamo šta je ono što nulu čini očigledno nepodobnom za svako dalje umanjivanje. To nam predložena definicija ne kaže i, stoga, iako pruža karakteristiku koja često ne pripada nijednoj drugoj veličini ove vrste, ipak se ne može smatrati filozofski zadovoljavajućom. Štaviše, tamo gde postoje negativne veličine, ova definicija sprečava da ih shvatimo kao manje od nule.

175. (3) U slučajevima u kojima su naše veličine razlike ili rastojanja, nula na prvi pogled ima jedno očigledno značenje, naime, identitet. Ali opet, ovde je nula definisana tako da izgleda da nije

[1] *Teoria delle Grandezze*, Pisa, 1890, str. 24.

više u nekoj relaciji prema jednoj vrsti rastojanja nego prema nekoj drugoj: izgledalo bi da je nulto rastojanje u vremenu isto kao i nulto rastojanje u prostoru. Međutim, ovo se može izbeći time što bi se identitet *simpliciter* zamenio identitetom sa nekim članom klase termina koji stoje u relaciji rastojanja o kojoj se radi. Ovom domišljatošću, nula bilo koje klase relacija koje su veličine, je savršeno određena i oslobođena od protivrečnosti; osim toga imamo i nulte kvantitete i nulte veličine, jer ako su *A* i *B* termini klase koja sadrži rastojanja, identitet sa *A* i identitet sa *B* su različiti nulti kvantiteti[1]. Ovaj slučaj je, stoga, sasvim jasan, ali ova definicija ipak mora biti odbačena jer je sasvim jasno da nula ima neko opšte logičko značenje samo ako bi to moglo da se jasno iskaže, a koje je isto za sve klase kvantiteta, i da nulto rastojanje nije zapravo isti pojam kao identitet.

176. (4) U bilo koju klasu veličina koja je kontinuirana u smislu da postoji termin između bilo koja dva termina i koja takođe nema graničnu veličinu možemo uvesti nulu na način na koji su realni brojevi dobijeni iz racionalnih. Bilo koja kolekcija veličina određuje klasu veličina manju od svih njih. Ova klasa veličina može se učiniti onoliko malom koliko se želi i zapravo se može učiniti nultom klasom, to jest učiniti da ne sadrži članove uopšte. (To je, na primer, ostvareno ako se naša kolekcija sastoji od svih veličina ove vrste). Tako određene klase formiraju niz koji je tesno povezan sa nizom prvobitnih veličina, i u ovom novom nizu nulta klasa je definitivno prvi termin. Tako, uzimajući klase kao kvantitete, nulta klasa je nulti kvantitet. Ne postoji klasa koja sadrži konačan broj članova tako da ne postoji, kao u aritmetici, diskretno približavanje nultoj klasi; naprotiv, približavanje je (u više od jednog smisla te reči) kontinuirano. Ovaj metod definisanja nule koji je identičan metodu kojim je uveden realan broj nula, značajan je i biće razmatran u Petom delu.

---

[1] Međutim, o tome vidi više u §55 gore.

Ali, za sada možemo primetiti da on isto tako čini nulu istom za sve vrste veličine i ne čini je jednom među veličinama čija je ona nula.

177. (5) Po ovom pitanju smo primorani da se suočimo sa problemom koji se tiče prirode negacije. „Nikakvo zadovoljstvo" je očigledno različit pojam od „nikakav bol" i to baš kada se ovi termini shvate strogo kao puko poricanje zadovoljstva i bola. Izgledalo bi da „nikakvo zadovoljstvo" stoji u istoj relaciji prema *zadovoljstvu* u kojoj stoje i različite veličine zadovoljstva, premda one takođe stoje u posebnoj relaciji sa negacijom. Ako se ovo prizna vidimo da, ako je jedna vrste veličina definisana onim čije su one veličine, onda je *nikakvo zadovoljstvo* jedna među različitim veličinama zadovoljstva. Ako onda tvrdimo naš aksiom prema kom su svi parovi veličina jedne vrste u istoj relaciji nejednakosti, bićemo primorani da prihvatimo da je nula manja nego sve druge veličine njene vrste. Očigledno je da se ovo mora prihvatiti s obzirom na to da nula očigledno *nije veća* nego sve druge veličine njene vrste. Ovo pokazuje da nula ima jednu vezu sa *manjim* koju nema sa *većim*. Ako prihvatimo ovu teoriju, onda više ne možemo prihvatiti gorenavedeno jasno i prosto objašnjenje nultog rastojanja, nego ćemo tvrditi da je nulto rastojanje strogo i naprosto *nikakvo rastojanje* i da je samo *u korelaciji* sa identitetom.

Stoga bi izgledalo da je teorija gospodina Majnonga, sa kojom smo počeli, u osnovi tačna; prema prethodno izloženom gledištu ona zahteva poboljšanje koje se sastoji samo u tome da je nulta veličina negiranje definišućeg pojma vrste veličina, a ne negiranje neke određene veličine ili svih njih. Moraćemo da tvrdimo da svaki pojam koji definiše neku vrstu veličina definiše takođe, posredstvom svoje negacije, i određenu veličinu te vrste, koja se naziva nulom te vrste, i da je ta veličina manja nego svi drugi članovi te vrste. Sada uviđamo korisnost apsolutne razlike koju smo napravili između definišućeg pojma neke vrste veličine i različitih veličina date vrste. Relacija za koju smo dopustili da postoji između određene veličine i onoga čija je ona veličina nije poistovećena sa klasnom relacijom već smo smatrali da je *sui generis*; tako nema protivrečnosti na koju nailazimo u većini teorija prilikom pretpostavljanja da ova relacija važi između *nikakvog zadovoljstva* i *zadovoljstva*, ili između *nikakvog rastojanja* i *rastojanja*.

178. Naposletku se mora primetiti da *nikakvo zadovoljstvo*, nulta veličina, nije dobijeno logičkim negiranjem zadovoljstva, i da nije isto kao logički pojam *nezadovoljstva*. Naprotiv, *nikakvo zadovoljstvo* je suštinski kvantitativan pojam koji stoji u jednoj neobičnoj i tesnoj vezi sa logičkim negiranjem, upravo kao što 0 stoji u tesnoj vezi sa nultom klasom. Ta veza se svodi na to da ne postoji *kvantitet* čija je veličina nula, tako da je klasa nultih kvantiteta nulta klasa[1]. Nula bilo koje vrste veličine ne može da stoji u relaciji prema egzistenciji ili prema partikularijama u kojoj mogu da stoje druge veličine. Ali, ovo je sintetički iskaz koji je prihvaćen samo zato što je samoočigledan. Slično drugim veličinama, nula veličina svake vrste je, strogo govoreći, nedefinljiva, ali se može specifikovati na osnovu posebnog odnosa prema logičkoj nuli.

---

[1] Ovo bi trebalo primeniti prilikom korigovanja onoga što je prethodno rečeno o nultom rastojanju.

Glava XXIII

BESKONAČNOST, INFINITEZIMALE I KONTINUITET

179. Skoro sve matematičke ideje prati jedna velika teškoća koja se tiče beskonačnosti. Filozofi su obično to smatrali antinomijom koja kao da pokazuje da iskazi matematike nisu metafizički istiniti. Prinuđen sam da se ne složim sa ovim opštim mišljenjem. Premda su sve prividne antinomije, osim onih koje su lako uklonjive i onih koje pripadaju osnovama logike, po mom mišljenju, svodive na teškoću koja se tiče beskonačnog broja, izgleda da je ova teškoća ipak rešiva jednom tačnom filozofijom o značenju izraza *bilo koji*, a da je pretežno proizvedena zbrkom koja se tiče dvosmislenosti značenja konačnih celih brojeva. Ovaj problem će u opštim crtama biti razmatran u Petom delu; svrha ove glave sastoji se samo u tome da pokaže da se od kvantiteta koji je smatran mestom gde se primarno javljaju beskonačnosti, infinitezimale i kontinuitet u ovom pogledu mora odstupiti i da se kvantitet mora zameniti poretkom; dok se isticanje teškoća koje nastaju u pogledu kvantiteta može dati u formi koja se ujedno tiče i poretka i aritmetike, ali koja ne uključuje pozivanje na specifičnosti kvantiteta.

180. Ova tri problema – beskonačnost, infinitezimale i kontinuitet – a u vezi sa kvantitetom, međusobno su usko povezani. Nijedan od njih ne može biti potpuno razmotren u ovom delu izlaganja pošto svi suštinski zavise od poretka, s tim što infinitezimale zavise takođe i od broja. Iako je tradicionalno smatrano znatno težim od pitanja nule, pitanje beskonačnog kvantiteta je, zapravo, daleko manje teško i moglo bi smesta da se ukloni da nije velike ljubavi koju filozofi obično izražavaju prema iskazu koji ću nazvati aksiomom konačnosti. Za neke vrste veličine (na primer, za odnose ili rastojanja u prostoru i vremenu) izgleda da je tačno da postoji veličina koja je veća od bilo koje date veličine. To znači, ako je data neka veličina, onda možemo pronaći drugu koja je veća od nje. Izvođenje beskonačnosti iz ovoga je, kada je ispravno obavljeno, puka fikcija koja olakšava sažimanje rezultata dobijenih metodom granica. Ako je definisana bilo koja klasa *u* veličinâ vrste koju razmatramo, možemo razlikovati tri slučaja: (1) može postojati klasa termina veća nego bilo koja iz naše klase *u*, i ova nova klasa termina može da ima najmanji član; (2) može postojati takva klasa, ali ona može da nema najmanji član; (3) može biti da nema veličina koje su veće od *bilo kog* termina naše klase *u*. Pretpostavljajući da je vrsta veličina koju razmatramo ona u kojoj ne postoji najveća veličina, slučaj (2) će uvek nastati kada klasa *u* sadrži konačan broj termina. Sa druge strane, ako je naš niz ono što se naziva nizom koji je *gust u sebi*, slučaj (2) neće nikada nastati kada je *u* beskonačna klasa koja nema najveći termin; i ako niz nije gust u sebi, nego uvek postoji termin između bilo koja dva termina, drugi niz koji ima ovu osobinu uvek može biti dobijen od prvog niza[1]. Stoga, svi beskonačni nizovi koji nemaju najveći termin imaće granice izuzev u slučaju (3). Da bi se izbeglo okolišenje, slučaj (3) je definisan kao onaj u kojem je granica beskonačna. Ali, ovo je puka domišljatost i matematičari se generalno slažu da je tako. Osim posebnih okolnosti, ne postoji razlog da se, samo zato što neka vrsta veličina nema nikakav maksimum, prihvati da postoji beskonačna veličina te vrste ili da postoji mnogo takvih veličina. Kada se veličine jedne vrste koje nemaju nikakav

[1] Ovo će biti dalje objašnjeno u Delu V, Glava XXXVI.

maksimum mogu numerički meriti, one se vrlo često pokoravaju Arhimedovom aksiomu na osnovu kojeg je odnos neke dve veličine te vrste konačan. Stoga bi ovde za sada moglo da izgleda da ne postoji nikakav problem u vezi sa beskonačnošću.

Ali, na ovom mestu filozof je sklon da se umeša i da izjavi da po svim istinitim filozofskim principima svaki dobro definisani niz termina mora da ima poslednji termin. Insistirajući na kreiranju ovog poslednjeg termina i nazivajući ga beskonačnošću, filozof lako izvodi nepodnošljive protivrečnosti na osnovu kojih zaključuje neadekvatnost matematike za dolaženje do apsolutne istine. Međutim, što se mene tiče, ne vidim razlog za ovaj filozofski aksiom. U cilju da pokažemo, ako je to moguće, da on nije nužan filozofski princip, pristupimo njegovoj analizi i pogledajmo šta se pod njim, zapravo, podrazumeva.

Problem beskonačnosti, kako se do sada ispoljavao, zapravo i nije kvantitativni problem već problem koji se tiče poretka. Ovaj problem nastaje samo zato što naše veličine formiraju niz koji nema poslednji termin: činjenica da je niz sastavljen od veličina sasvim je irelevantna. Ovde bih mogao da stanem i da ostavim ovaj problem za kasnije razmatranje, ali će biti celishodno da barem obelodanimo ako već ne i da ispitamo, filozofski aksiom konačnosti.

181. Biće prikladno da najpre pokažemo kako je problem koji se tiče beskonačnosti isti kao problem koji se tiče kontinuiteta i infinitezimala. Videćemo da je za tu svrhu zgodno da ignorišemo apsolutnu nulu, i da, kada govorimo o bilo kojoj vrsti veličina, imamo u vidu sve veličine te vrste, izuzev nule. Ovo je puka promena načina izražavanja bez koje bi nepodnošljiva ponavljanja bila neminovna. Zasigurno postoje neke vrste veličina za koje važe sledeća tri aksioma:

(1) Ako su A i B neke dve veličine date vrste, i ako je A veće od B, onda uvek postoji neka treća veličina C takva da je A veće od C, i C veće od B. (Ovo ću, za sada, zvati aksiomom kontinuiteta).

(2) Uvek postoji veličina manja od neke date veličine B.

(3) Uvek postoji veličina veća od bilo koje date veličine A.

Odavde sledi:

(1) Da nikakve dve veličine date vrste nisu uzastopne.

(2) Da ne postoji najmanja veličina.

(3) Da ne postoji najveća veličina.

Prethodni iskazi su sigurno istiniti za *neke* vrste veličina; ostaje da se ispita da li su oni istiniti za *sve* vrste veličine. Sledeća tri iskaza, koji direktno protivreče prethodnim trima, moraju uvek biti istinita ako treba da prihvatimo filozofski aksiom konačnosti:

(*a*) Postoje uzastopne veličine, to jest veličine takve da nijedna druga veličina iste vrste nije veća od manje i manja od veće od dve date veličine.

(*b*) Postoji veličina manja od bilo koje druge veličine iste vrste.

(*c*) Postoji veličina veća od bilo koje druge iste vrste[1].

Kako ova tri iskaza direktno protivreče prethodnim trima, izgleda da oba skupa iskaza ne mogu biti istinita. Moramo ispitati razloge u prilog oba skupa i potom jednu od alternativa odbaciti.

182. Počnimo sa iskazima (*a*), (*b*), (*c*) i ispitajmo prirodu razloga za njihovo prihvatanje.

(*a*) Ako je data određena veličina *A*, onda sve veličine veće od *A* formiraju niz čije su razlike od *A* veličine nove vrste. Ako je ovde veličina *B* uzastopna veličini *A*, njena razlika od *A* će biti najmanja veličina u njenoj vrsti, pod uslovom da jednaka prostiranja odgovaraju jednakim rastojanjima u ovom nizu. I obratno, ako je ovde najmanja razlika između dve veličine *A*, *B*, onda ove dve veličine moraju uvek biti uzastopne; jer ako to nije slučaj, neka veličina između njih

---

[1] Oni hegelijanci koji traže zgodan povod za iznalaženje antinomije mogu doći do definicije nule i beskonačnosti posredstvom gore navedenih iskaza. Kada važe i (2) i (*b*), oni mogu reći da se veličina koja zadovoljava (*b*) naziva nulom; kada važe (3) i (*c*), veličina koja zadovoljava (*c*) naziva se beskonačnost. Međutim, videli smo da nula mora biti drugačije definisana i da mora biti isključena pre nego što (2) postane istinito; dok beskonačnost uopšte nije veličina vrste o kojoj je reč nego samo primer matematičke skraćenice. (Ne beskonačnost uopšte, već beskonačna veličina, u slučajevima koje razmatramo).

bi imala manju razliku od *A* nego što je ima *B*. Stoga, ako je iskaz (*b*) univerzalno istinit, onda i iskaz (*a*) mora takođe biti istinit; i obratno, ako je iskaz (*a*) istinit, i ako je niz veličina takav da jednaka prostiranja odgovaraju jednakim rastojanjima, onda je iskaz (*b*) istinit za rastojanja između veličina o kojima se radi. Mogli bismo se zadovoljiti svođenjem (*a*) na (*b*) i preći na dokaz iskaza (*b*); ali, izgleda celishodno ponuditi direktan dokaz za koji pretpostavljamo da ga filozof finitista ima na umu.

Između *A* i *B* postoji izvestan broj veličina, osim ako *A* i *B* nisu uzastopni. Pošto su sve međuveličine uređene, u prelaženju od *A* do B prešli bismo sve veličine između njih. U jednom takvom nabrajanju mora biti *neka* veličina koja dolazi kao sledeća nakon bilo koje veličine *C*; ili, da postavimo stvar drugačije, pošto nabrajanje mora da počne, onda ono mora da počne negde, i termin sa kojim počinje mora biti veličina koja sledi nakon *A*. Ako ovo ne bi bio slučaj, onda tu ne bi bilo određenog niza; jer, ako su svi termini uređeni, neki od njih moraju biti uzastopni.

U prethodnom argumentu je značajna zavisnost od broja. Ceo argument uključuje princip kojim se pokazuje da je beskonačan broj samoprotivrečan, naime: *data kolekcija mnogih termina mora sadržati neki konačan broj termina*. Mi kažemo: sve veličine između *A* i *B* formiraju datu kolekciju. Ako nema takvih veličina, *A* i *B* su uzastopni i pitanje je rešeno. Ako ima takvih veličina, mora ih biti konačno, recimo *n*. Pošto one formiraju niz, postoji određen način da im se pripišu brojevi od 1 do *n*. Onda su *m*-ti i (*m*+1)-vi uzastopni.

Ako se aksiom napisan kurzivom negira, onda ceo argument pada, a ovo je, kao što ćemo videti, takođe slučaj u pogledu iskaza (*b*) i (*c*).

(*b*) Ovde je dokaz sasvim sličan dokazu iskaza (*a*). Ako ne postoje veličine manje od *A*, onda je *A* najmanja veličina svoje vrste i pitanje je rešeno. Ako ima veličina manjih od *A*, one formiraju određenu kolekciju i stoga (prema našem aksiomu) imaju konačan broj, recimo *n*. Pošto one formiraju niz, možemo im pripisati redne brojeve koji se povećavaju udaljavanjem tih veličina od A. Tako je n-ta veličina najmanja od veličina svoje vrste.

(c) Ovde je dokaz dobijen kao u slučaju iskaza (b), uzimanjem u obzir kolekcije veličina većih od A. Tako sve ponovo zavisi od našeg aksioma, bez kojeg se ne može navesti nijedan slučaj protiv kontinuiteta ili protiv odsustva najveće i najmanje veličine.

Videćemo da u pogledu samog aksioma nema posebnog pozivanja na kvantitet; i na prvi pogled bi moglo da izgleda da nema nikakvog pozivanja ni na poredak. Ali, reč *konačan* koja se u njemu javlja, zahteva definiciju; i kao što ćemo videti, ova definicija, u formi koja je pogodna u okviru trenutnog razmatranja, sadrži suštinsko pozivanje na poredak.

183. Od svih filozofa koji su se bunili protiv beskonačnog broja, sumnjam da postoji ijedan koji je poznavao razliku između konačnih i beskonačnih brojeva. Ta razlika se naprosto sastoji u sledećem. Konačni brojevi podležu zakonu matematičke indukcije, beskonačni brojevi ne. Drugim rečima, ako je dat neki broj n i ako n pripada svakoj klasi s kojoj pripada 0, a kojoj pripada takođe i broj koji je sledbenik bilo kog broja iz s, onda je n konačan broj; u suprotnom nije. To znači da se konačni i beskonačni brojevi *jedino* razlikuju po tome i po onome što odatle sledi[1].

Ovaj princip može drugačije da se izrazi na sledeći način: ako svaki iskaz koji važi s obzirom na 0 važi takođe i s obzirom na neposrednog sledbenika svakog broja za koji on važi, onda važi i s obzirom na broj n, onda kada je n konačan, a u suprotnom ne važi. Ovo je tačno smisao onoga što se popularno može izraziti tako što se kaže da svaki konačan broj može biti dosegnut od 0, sukcesivnim koracima ili sukcesivnim dodavanjima 1. Ovo je princip koji filozof mora da ustanovi kao apsolutno primenljiv na sve brojeve, premda će morati

[1] Međutim, treba napomenuti da jedna od tih posledica pruža logičku razliku između konačnih i beskonačnih brojeva, a koja može biti uzeta kao nezavisna definicija. Ovo je bilo već objašnjeno u Delu II, Glava XII, i biće još razmatrano i u Petom delu.

da prihvati da, što je preciznije ovaj princip ustanovljen, to postaje manje očigledan.

184. Celishodno je pokazati kako je matematička indukcija uključena u gorenavedene dokaze. Uzmimo dokaz iskaza (*a*) i pretpostavimo da postoji *n* veličina između *A* i *B*. Onda, najpre pretpostavljamo da se ove veličine mogu nabrajati, to jest pretpostavljamo poredak u kome postoje uzastopni termini i prvi termin, i termin koji neposredno prethodi bilo kom terminu, osim prvom. Ovo svojstvo pretpostavlja matematička indukcija i ono je u stvari bilo upravo ono svojstvo oko kojeg je spor. Stoga ne smemo pretpostaviti mogućnost nabrajanja koje bi bilo *petitio principii.* Ali, treba doći do srži argumenta: pretpostavljamo da u bilo kom nizu mora biti određen način pripisivanja rednih brojeva terminima. Ovo svojstvo pripada nizu koji sadrži jedan termin i svakom nizu koji sadrži $m+1$ termin ako pripada svakom nizu koji ima *m* termina. Stoga, na osnovu matematičke indukcije, ovo svojstvo pripada svim nizovima koji imaju konačan broj termina. Ali, ako bi se dopustilo da broj termina može da ne bude konačan, ceo argument pada.

U pogledu (*b*) i (*c*) argument je sličan. Za svaki niz koji ima konačan broj termina može se na osnovu matematičke indukcije pokazati da ima prvi i poslednji termin, ali ne postoji nikakav način da se ovo dokaže u pogledu drugih nizova ili da se dokaže da su svi nizovi konačni. Ukratko, matematička indukcija je, slično aksiomu o paralelama, korisna i podesna u sopstvenom domenu, ali pretpostaviti da je uvek istinita znači dozvoliti tiraniju puke predrasude. Prema tome, finitistički argumenti filozofa počivaju na principu o kojem on ne zna ništa, za koji ne postoji nikakav razlog da se tvrdi i svaki razlog da se porekne. Sve navodne antinomije se mogu smatrati rešenim na osnovu ovog zaključka.

185. Ostaje da razmotrimo koje vrste veličine zadovoljavaju iskazi (1), (2), (3). Ne postoji opšti princip na osnovu kojeg oni mogu biti dokazani ili pobijeni, ali postoje izvesni slučajevi u kojima su oni istiniti i neki drugi slučajevi u kojima su lažni. Filozofi generalno smatraju da su brojevi u suštini diskretni, dok su veličine u suštini kontinuirane. Videćemo da to nije slučaj. Realni brojevi su na najpotpuniji način kontinuirani dok mnoge vrste veličina uopšte nisu kontinuirane. Reč *kontinuitet* ima mnoga značenja, ali u matematici ima samo dva – jedno staro i jedno novo. Za sadašnju svrhu staro značenje će biti dovoljno. Prema tome, za sada ću da uvedem sledeću definiciju:

Kontinuitet se primenjuje na nizove (i samo na nizove) u svim slučajevima u kojima su nizovi takvi da postoji termin između bilo koja dva data termina[1]. U slučajevima gde nema niza ili kombinacije nizova ili tamo gde niz ne ispunjava prethodni uslov, radi se o diskontinuitetu.

Stoga, niz racionalnih brojeva je kontinuiran pošto je aritmetička sredina bilo koja dva racionalna broja uvek neki treći racionalan broj koji se nalazi između ona dva; slova alfabeta nisu kontinuirana.

Videli smo da rastojanja ili prostiranja bilo koja dva termina u nizu imaju veličinu. Pošto sigurno postoje diskretni nizovi (na primer, alfabet), sigurno postoje i diskretne veličine, naime, rastojanja ili prostiranja termina u diskretnom nizu. Rastojanje između slova *A* i *C* je veće od rastojanja između slova *A* i *B*, ali ne postoji veličina koja je veća od jedne od ovih ili manja od druge. U ovom slučaju, takođe, postoji i najveće moguće i najmanje moguće rastojanje, te tako iskazi (1), (2), (3), uzeti zajedno, ne važe. Međutim, ne sme se pretpostaviti da su ova tri iskaza nužno povezana. Na primer, u slučaju celih brojeva postoje uzastopna rastojanja i postoji najmanje moguće rastojanje, naime, ono između uzastopnih celih brojeva, ali ne postoji najveće moguće rastojanje. Tako je iskaz (3) istinit, dok su iskazi (1) i (2) lažni. U slučaju niza nota ili duginih boja, niz ima početak i kraj, tako da postoji najveće rastojanje ali ne postoji najmanje rastojanje i postoji

---

[1] Primedba koja se može uputiti ovoj definiciji (kao što ćemo videti u Petom delu) jeste da ne pruža uobičajena svojstva egzistencije granica konvergentnim nizovima, a koja se uobičajeno povezuju sa kontinuitetom. Nizove vrste o kojima je gore reč nazvaćemo kompaktnim, osim u razmatranju koje trenutno sprovodimo.

termin između bilo koja dva termina. Tako su iskazi (1) i (2) istiniti, dok je iskaz (3) lažan. Ako pak uzmemo niz sastavljen od nule i razlomaka koji imaju jedan za brojilac, onda postoji najveće rastojanje, ali ne i najmanje rastojanje, iako je niz diskretan. Tako je iskaz (2) istinit, dok su iskazi (1) i (3) lažni. Druge kombinacije bi mogle da se dobiju u slučaju drugih nizova.

Stoga iskazi (1), (2), (3) nisu nužno povezani i svaki od njih, ili bilo koja kombinacija, može biti lažna kada se primeni na bilo koju datu vrstu veličina. Prema tome, ne možemo se nadati da se njihova istinitost može dokazati na osnovu prirode veličine. Ako bi ikada trebalo da budu istiniti, onda bi to moralo da se nezavisno dokaže ili pak da se otkrije prostim uvidom u svakom pojedinačnom slučaju. Razmatranjem rastojanja između termina kontinuuma brojeva ili racionalnih brojeva pokazuje se da su ponekad istiniti. Oba ova niza su kontinuirana u gorenavedenom smislu i nemaju prvi i poslednji termin (kada je nula isključena). Stoga rastojanja i prostiranja ispunjavaju sva tri uslova. Isto bi se moglo zaključiti na osnovu razmatranja prostora i vremena, ali ne želim da anticipiram ono što tek treba reći o tome. Kvantiteti deljivosti ne ispunjavaju ove uslove kada su celine koje su deljive sastavljene od konačnog broja deljivih delova. Ali, tamo gde je broj delova beskonačan u celoj klasi različitih veličina, svi ovi uslovi su zadovoljeni, što se vidi i na osnovu osobina brojevnog kontinuuma.

Tako vidimo da problemi beskonačnosti i kontinuiteta nisu bitno povezani sa kvantitetom već da zavise od karakteristika koje zavise od broja i poretka u slučajevima u kojima date veličine uopšte proizvode ove probleme. Stoga ćemo razmatranje ovih problema preduzeti tek pošto izložimo čistu teoriju poretka[1], što ćemo učiniti u sledećem delu.

186. Sada možemo da rezimiramo rezultate koje smo dobili u Trećem delu. U Glavi XIX smo odlučili da definišemo veličinu kao sve

---

[1] Cf. Couturat, „Sur la définition du continu“, *Revue de Métaphysique et de Morale*, 1900.

ono što je ili veće ili manje od nečeg drugog. Utvrdili smo da veličina nije nužno povezana sa deljivošću, i da su veće i manje nedefinljivi. Videli smo da svaka veličina stoji u izvesnoj relaciji – analognoj ali ne identičnoj sa relacijom uključenosti u klasu – prema izvesnom kvalitetu ili relaciji, a ta činjenica se izražava time što se kaže da je veličina o kojoj je reč veličina *tog* kvaliteta ili *te* relacije. Definisali smo *kvantitet* kao partikulariju koja je sadržana u veličini, to jest, kao kompleks koji se sastoji od veličine sa izvesnim prostorno-vremenskim položajem ili sa parom termina između kojih važi ova relacija. Pomoću opšteg principa koji se tiče tranzitivnih simetričnih relacija, zaključili smo da je nemoguće zadovoljiti se kvantitetom, a da ne poreknemo dalju apstrakciju koja je uključena u veličine; da jednakost nije direktna relacija između kvantiteta, ali da se sastoji u tome što predstavlja partikularizacije iste veličine. Tako su jednaki kvantiteti instance veličine. Slično tome, veće i manje nisu direktne relacije između kvantiteta nego između veličina: kvantiteti su samo veći i manji zato što postoje instance većih i manjih veličina. Od dve veličine koje su istog kvaliteta ili relacije, jedna je veća a druga manja; i veće i manje su asimetrične tranzitivne relacije.

Među terminima koji imaju veličinu nisu samo mnogi kvaliteti, nego takođe i asimetrične relacije, koje konstituišu određene vrste nizova. One mogu biti nazvane *rastojanjima*. Kada postoje rastojanja u nizu, bilo koja dva termina niza su na rastojanju koje je isto kao, veće od ili manje od rastojanja između bilo koja dva druga termina u nizu. Drugu posebnu klasu veličina koje su razmatrane u Glavi XX konstituišu stepeni deljivosti različitih celina. Videli smo da je to jedini slučaj u kojem su kvantiteti deljivi, a da ne postoje instance deljivih veličina.

Numeričko merenje koje je razmatrano u Glavi XXI je zbog zaključka da su mnogi kvantiteti i sve veličine nedeljivi, zahtevalo donekle neuobičajen tretman. Utvrdili smo da problem leži u ustanovljavanju jedan-jedan relacije između brojeva i veličina vrste koje treba meriti. Prema izvesnoj metafizičkoj hipotezi (koja nije ni prihvaćena ni odbačena) ustanovili smo da je to uvek teorijski moguće u pogledu stvarne ili moguće egzistencije, premda često nije praktično izvodivo ili značajno. U pogledu dve klase veličina, naime, deljivosti i rastojanja, utvrđeno je da merenje polazi od vrlo prirodne konvenvcije koja određuje na šta se misli kada se kaže (što nikada ne može imati prost smisao koji ono ima kada govorimo o konačnim celinama i delovima) da je jedna takva veličina dvostruko veća ili *n* puta veća od druge. Razmatrana je veza rastojanja i prostiranja i ustanovljeno je da izuzev posebnog aksioma koji se toga tiče nema *a priori* razloga da se smatra da jednaka rastojanja odgovaraju jednakim prostiranjima.

U Glavi XXII smo razmatrali definiciju nule. Ustanovljeno je da problem nule nije povezan sa problemom infinitezimala, zato što je zapravo blisko povezan sa čisto logičkim problemom koji se tiče prirode negacije. Zaključili smo da, kao što ima razlike između logičke i aritmetičke negacije, tako postoji jedna treća fundamentalna vrsta negacije, naime, kvantitativna negacija; ali, ova negacija je negacija kvaliteta ili relacije koji su veličine, a ne negacija veličine tog kvaliteta ili relacije. Stoga možemo da smatramo nulu jednom od veličina koje su sadržane u vrsti veličine, i da razlikujemo nule različitih vrsta. Pokazali smo takođe da je kvantitativna negacija povezana sa logičkom negacijom time što nema kvantiteta čija je veličina nula.

U ovoj glavi je pokazano da problemi kontinuiteta, beskonačnosti i infinitezimala ne pripadaju specifično teoriji kvantiteta već teorijama broja i poretka. Iako postoje vrste veličine u kojima ne postoji najveća ili najmanja veličina, pokazano je da to od nas ne zahteva da prihvatimo beskonačne ili infinitezimalne veličine, i da nema protivrečnosti u pretpostavci da vrste veličine formiraju niz u kojem postoji termin između bilo koja dva termina i u kojem, sledstveno, nema termina koji je konsekutivan datom terminu. Pokazano je da navodna protivrečnost nastaje zbog neprikladne upotrebe matematičke indukcije – principa čije potpuno razmatranje pretpostavlja filozofsku teoriju poretka.

Četvrti deo

POREDAK

Glava XXIV

NASTANAK NIZOVA

187. Pojam poretka ili niza je pojam kojim smo se već bavili u vezi sa rastojanjem i sa poretkom veličina. Razmatranje kontinuiteta u poslednjoj glavi Trećeg dela pokazalo nam je da je to u strogom smislu jedan ordinalni pojam i pripremilo nas je za fundamentalni značaj poretka. Sada je krajnje vreme da ispitamo sam pojam poretka. Značaj poretka je sa isključivo matematičkog stanovišta neizmerno porastao zahvaljujući razvoju u mnogim modernim teorijama. Dedekind, Kantor i Peano su pokazali kako se aritmetika i analiza temelje na nizovima izvesne vrste, to jest, na onim svojstvima konačnih brojeva na osnovu kojih oni formiraju ono što ću nazvati *progresijom*. Iracionalni brojevi su definisani (kao što ćemo videti) u potpunosti na osnovu poretka, i uvedena je jedna nova klasa transfinitnih ordinalnih brojeva, čime je dobijena većina značajnih i interesantnih rezultata. U geometriji je iz fon Štautove kvadrilateralne konstrukcije i Pijerijovog rada na projektivnoj geometriji pokazano kako obezbediti poredak tačaka, linija i ravni nezavisan od metričkih razmatranja i od kvantiteta, dok deskriptivna geometrija pokazuje da veliki deo geometrije zahteva samo mogućnost uređenja u nizove. Pored toga, celokupna filozofija prostora i vremena zavisi od toga kako ćemo shvatiti poredak. Stoga razmatranje poretka, koje nedostaje u savremenoj filozofiji, postaje suštinsko za svako razumevanje zasnivanja matematike.

188. Pojam poretka je složeniji od svih pojmova koje smo do sada analizirali. Dva termina ne mogu da se urede, kao što tri termina ne mogu da imaju kružni poredak. Zbog ove složenosti logička analiza poretka stvara znatne poteškoće. Stoga ću ovom problemu pristupiti postepeno, razmatrajući u ovoj glavi okolnosti pod kojima nastaje poredak, ostavljajući za drugu glavu diskusiju o tome šta je zapravo poredak. Ova analiza će istaći nekoliko fundamentalnih pitanja u opštoj logici, koja će zahtevati detaljnu diskusiju skoro isključivo filozofske prirode. Posle toga ću preći na više matematičke teme kao što su tipovi nizova i definicija brojeva na osnovu poretka, kako bih pripremio put za razmatranje beskonačnosti i kontinuiteta u sledećem delu.

Postoje dva različita načina na koje može nastati poredak, mada ćemo na kraju uvideti da je drugi način svodiv na prvi. Prema prvom, ono što se može nazvati element poretka sastoji se od tri termina *a*, *b*, *c*, od kojih je jedan (recimo *b*) *između* druga dva. Ovo se dešava svuda gde postoji relacija *a* prema *b* i *b* prema *c*, koja nije relacija *b* prema *a*, *c* prema *b*, ili *c* prema *a*. Ovo je definicija ili, možda bolje rečeno, nužan i dovoljan uslov iskaza „*b* je između *a* i *c*“. Ali, postoje drugi slučajevi poretka u kojima, na prvi pogled, ovi uslovi nisu zadovoljeni i u kojima *između* očigledno nije primenljivo. To su slučajevi u kojima imamo četiri termina *a*, *b*, *c*, *d* kao element poretka za koji možemo reći da su *a* i *c* odvojeni od *b* i *d*. Ova relacija je komplikovanija, ali izgleda da je karakteriše sledeće: *a* i *c* su odvojeni od *b* i *d* kada postoji jedna asimetrična relacija koja važi između *a* i *b*, *b* i *c*, *c* i *d* ili između *a* i *d*, *d* i *c*, *c* i *b* ili između *c* i *d*, *d* i *a*, *a* i *b* dok, ako imamo prvi slučaj, ista relacija mora važiti ili između *d* i *a* ili još i između *a* i *c* i između *a* i *d*; uz slične pretpostavke za druga dva slučaja[1]. (Nijedna druga posebna pretpostavka se ne zahteva u

[1] Ovo daje dovoljan ali ne i nužan uslov za razdvajanje parova.

pogledu relacije između *a* i *c* ili između *b* i *d*; odsustvo ovakve pretpostavke je ono što onemogućava svođenje ovog slučaja na prethodni na jednostavan način). Postoje slučajevi – naročito kada su nizovi o kojima je reč zatvoreni – u kojima *izgleda* formalno nemoguće svesti drugi slučaj na prvi, premda je ova pojava, kao što ćemo videti, delimično varljiva. U ovoj glavi ćemo pokazati glavni način na koji nizovi nastaju iz kolekcija takvih elemenata poretka.

Iako dva termina sama ne mogu činiti poredak, ne moramo pretpostaviti da je poredak moguć, osim u slučajevima gde postoje relacije između dva termina. Videćemo da u svim nizovima postoje asimetrične relacije između dva termina. Ali, asimetrična relacija za koju postoji samo jedna instanca ne konstituiše poredak. Ono što je za to potrebno jesu barem dve instance za *između* i barem tri instance za razdvajanje parova. Stoga, iako je poredak relacija između tri ili četiri termina, on je moguć samo tamo gde postoje druge relacije koje važe između parova termina. Ove relacije mogu biti različite vrste, što omogućava različite načine generiasnja nizova. Sada ću nabrojati glavne načine koji su mi poznati.

189. (1) Najprostiji metod generisanja nizova je sledeći. Uzmimo jednu kolekciju termina, konačnu ili beskonačnu, takvu da svaki termin (sa mogućim izuzetkom samo jednog) stoji prema jednom i samo jednom drugom terminu te kolekcije u izvesnoj asimetričnoj relaciji (koja naravno mora biti netranzitivna), i da svaki termin (ponovo, sa jednim mogućim izuzetkom koji ne sme biti isti kao termin koji je prethodno uzet kao izuzetak) stoji, takođe, prema jednom i samo jednom drugom terminu te kolekcije u relaciji koja predstavlja konvers prethodne relacije[1]. Nadalje, pretpostavimo da ako je *a* u prvoj relaciji prema *b*, i *b* prema *c*, onda *c* nije u prvoj relaciji prema *a*. Onda svaki termin te kolekcije, izuzev dva posebna termina, stoji u jednoj relaciji prema drugom terminu, a u konverznoj relaciji

[1] Konvers relacije je relacija koja mora važiti između *y* i *x* kada data relacija važi između *x* i *y*.

prema trećem, dok sami ovi termini jedan prema drugom ne stoje ni u jednoj od relacija o kojima je reč. Sledstveno tome, prema definiciji *između*, naš prvi termin je između našeg drugog i trećeg termina. Termin prema kojem dati termin stoji u jednoj ili dve relacije o kojima je reč, naziva se *prvi posle* datog termina; termin prema kojem dati termin stoji u konverznoj relaciji naziva se *prvi pre* datog termina. Dva termina između kojih važi relacija o kojoj je reč nazivaju se *uzastopni*. Termini koji predstavljaju izuzetke (ako ih ima) nisu između bilo kog para termina; oni se nazivaju dva kraja niza ili se jedan naziva početni a drugi krajnji. Postojanje jednog od ovih termina ne implicira postojanje onog drugog – na primer, prirodni brojevi imaju početak ali ne kraj – i nijedan ne postoji nužno – na primer, pozitivni i negativni celi brojevi uzeti zajedno nemaju ni početak ni kraj[1].

Prethodni metod bi mogao da se učini jasnijim na osnovu formalnog izlaganja. Neka je R jedna od naših relacija i neka je njen konvers označen sa $\breve{R}$[2]. Onda, ako je e bilo koji termin našeg skupa, postoje dva termina d i f takva da $e\breve{R}d$, cRf, to jest takva da dRe, eRf. Pošto svaki termin stoji jedino u relaciji R prema jednom određenom terminu, ne možemo imati dRf, a jedna od početnih pretpostavki bila je da nemamo fRd. Stoga je e između d *i* f[3]. *Ako je* a termin koji isključivo stoji u relaciji R, onda je očigledno da a nije između bilo kog para termina. Pojam *između* možemo proširiti definišući da, ako je c između b i d i d između c i e, onda za c ili d takođe važi da su između b i e. Na ovaj način možemo naći bilo koji broj termina između kojih i termina b se nalazi termin c, osim ukoliko ili dosegnemo kraj ili se vratimo na termin od kog smo počeli. Ali, ako

---

[1] Ovaj metod je jedini metod generisanja nizova koji je dao Bolcano u *Paradoxien des Unendlichen*, §7.

[2] Ova notacija je preuzeta od profesora Šredera.

[3] Poricanje relacije *dRf* je neophodno samo u ovom posebnom metodu, ali je poricanje relacije *fRd* suštinsko za definiciju *između*.

ukupan broj termina nije manji od sedam, onda na ovaj način ne možemo pokazati da od *bilo koja* tri termina jedan mora biti između druga dva, pošto se kolekcija može sastojati od dva različita niza, od kojih bar jedan mora biti zatvoren ako je kolekcija konačna, da bi se izbeglo da imamo više od dva kraja.

Ova primedba pokazuje da, ako prethodni metod treba da dâ pojedinačni niz kome bilo koji termin naše kolekcije treba da pripada, onda nam treba dodatni uslov koji se može izraziti tako što će se reći da kolekcija mora da bude *povezana*. Naći ćemo način da izrazimo ovaj uslov bez pozivanja na broj, ali za sada se možemo zadovoljiti time što ćemo reći da je naša kolekcija povezana kada za bilo koja dva njena termina postoji izvestan konačan broj (ne nužno jedinstven) koraka od jednog termina do sledećeg, kojima možemo preći od jednog od naša dva termina do drugog. Kada je ovaj uslov ispunjen onda smo sigurni da od bilo koja tri termina naše kolekcije jedan mora da bude između druga dva.

Pretpostavljajući sada da je naša kolekcija povezana i da prema tome formira jedan niz, možemo da razlikujemo četiri slučaja: (*a*) naš niz može imati dva kraja, (*b*) niz može imati jedan kraj, (*c*) niz može da nema kraj i da bude otvoren, (*d*) niz može da nema kraj i da bude zatvoren. U vezi sa (*a*) treba primetiti da naš niz mora biti konačan. Jer, uzimajući dva kraja, pošto je kolekcija povezana, onda postoji neki konačan broj n koraka koji će nas dovesti od jednog kraja do drugog i stoga ima $n + 1$ broj termina niza. Svaki termin je, osim dva krajnja, između njih, i nijedan od njih nije između nekog drugog para termina. U slučaju (*b*), sa druge strane, naša kolekcija mora biti beskonačna i to bi važilo čak i ako ona ne bi bila povezana. Jer, pretpostavimo da kraj koji postoji stoji u relaciji $\bar{R}$, ali ne i u relaciji $\breve{R}$. Onda, svaki drugi termin kolekcije stoji u obe relacije, ali nikada ne može stajati u obe prema istom terminu pošto je R asimetrična relacija. Stoga termin prema kojem (recimo) e stoji u relaciji R nije onaj prema kojem bi stajao u relaciji $\breve{R}$, nego je ili neki novi termin ili jedan od prethodnika *e*. Sada to ne može biti krajnji termin *a* pošto *a* nije u relaciji $\breve{R}$ prema ni prema kojem terminu. To ne može biti ni bilo koji termin koji se može dosegnuti sukcesivnim koracima od *a* bez prelaza preko *e* jer, ako bi to bio slučaj, ovaj termin bi imao dva prethodnika, suprotno pretpostavci da je *R* jedan-jedan relacija. Stoga, ako je *k* bilo koji termin koji se može dosegnuti sukcesivnim koracima od *a*, *k* ima sledbenika koji nije *a* ili bilo koji termin između *a* i *k*, i stoga je kolekcija beskonačna nezavisno od toga da li je povezana ili ne. U slučaju (*c*) kolekcija takođe mora biti beskonačna. Ovde je, po pretpostavci, niz otvoren, što znači da polazeći od nekog termina *e*, nijedan broj koraka ni u jednom smeru nas ne vraća natrag do *e.* Ne može postojati konačna granica broja mogućih koraka pošto, ako bi je bilo, niz bi imao kraj. I ovde nije nužno pretpostaviti povezane nizove. Nasuprot tome, u slučaju (*d*) moramo da pretpostavimo povezanost. Kada se kaže da je niz zatvoren mislimo da postoji neki broj *n* koraka kojima ćemo polazeći od izvesnog termina *a* biti vraćeni natrag do *a*. U ovom slučaju, *n* je broj termina i nema razlike od kog termina počinjemo. U ovom slučaju, *između* nije određeno osim kada su tri termina uzastopna, a niz sadrži više od tri termina. Inače, potrebna nam je složenija relacija razdvajanja.

190. (2) Kao što smo videli, prethodni metod daje ili otvorene ili zatvorene nizove, ali samo takve koji imaju uzastopne termine. Drugi metod koji ćemo sada da razmatramo daće nizove u kojima ne postoje uzastopni termini, ali neće dati zatvorene nizove[1]. U ovom metodu imamo tranzitivnu asimetričnu relaciju *P* i kolekciju bilo koja dva termina koji su takvi da ili *xPy* ili *yPx*. Kada su ovi uslovi zadovoljeni naši termini nužno formiraju pojedinačni niz. Pošto je relacija asimetrična, možemo da razlikujemo *xPy* od *yPx* i ne mogu

---

[1] Sledeći metod je jedini metod koji je pružio Vivanti u *Formulaire de Mathématiques* (1895), VI, §2, br. 7, a takođe i Gilman, „On the properties of a one-dimensional manifold“, *Mind*, N.S. Vol. I. Videćemo da je ovaj metod opšti u smislu u kojem nijedan od drugih metoda nije.

oba da postoje[1]. Pošto je P tranzitivna relacija, xPy i yPz uključuju xPz. Sledi da je $\breve{P}$ takođe asimetrična i tranzitivna relacija[2]. Stoga, u odnosu na neki termin x naše kolekcije svi drugi termini spadaju u dve klase, one za koje važi xPy i one za koje važi zPx. Nazivajući ove dve klase $\breve{\pi}x$ i πx, vidimo da zbog tranzitivnosti P, ako y pripada klasi $\breve{\pi}x$, $\breve{\pi}y$ je sadržano u $\breve{\pi}x$ i ako z pripada klasi πx, πz je sadržano u πx. Uzimajući sada dva termina x, y za koje važi xPy, svi drugi termini spadaju u tri klase: (1) oni koji pripadaju klasi πx i zato i πy; (2) oni koji pripadaju klasi $\breve{\pi}y$ i zato i $\breve{\pi}x$; (3) oni koji pripadaju klasi $\breve{\pi}x$, ali ne i $\breve{\pi}y$. Ako je z iz prve klase, onda imamo zPx, zPy, a ako je v iz druge klase, xPv, yPv; ako je w iz treće klase, xPw, wPy. Slučajevi yPu i uPx su isključeni jer xPy, yPu implicira xPu što je protivrečno sa uPx. Tako imamo, u tri slučaja, (1) x je između z i y; (2) y je između x i v; (3) w je između x i y. Stoga, bilo koja tri termina naše kolekcije su takva da je jedan između druga dva, a cela kolekcija formira pojedinačni niz. Ako klasa (3) ne sadrži termine, za x i y se kaže da su uzastopni; ali, mogu se odrediti mnoge relacije P za koje uvek postoje termini u klasi (3). Ako je, na primer, P relacija *pre* a naša kolekcija su trenuci u izvesnom vremenskom intevalu ili u celom vremenu, onda postoji trenutak između bilo koja dva trenutka naše kolekcije. Slično važi i u slučaju veličina koje smo u poslednjoj glavi Trećeg dela nazvali kontinuiranim. U metodu koji trenutno razmatramo nema ničega čega je bilo u prethodnom što bi pokazivalo da

---

[1] Upotrebljavam termin *asimetričan* kao suprotan pre nego kao kontradiktoran od *simetričan*. Ako xPy i ako je ova relacija simetrična, onda uvek imamo yPx; ako je asimetrična, nikada nemamo yPx. Neke relacije – na primer, logička implikacija – niti su simetrične niti asimetrične. Umesto pretpostavke da je P asimetrična relacija, možemo da načinimo ekvivalentnu pretpostavku da je ona ono što profesor Pers naziva *aliorelativnom relacijom*, to jest relacijom u kojoj nijedan termin ne stoji prema samom sebi. (Ova pretpostavka, uopšte uzev, nije ekvivalentna asimetričnosti već samo kada se kombinuje sa tranzitivnošću).

[2] P se može čitati kao *prethodi,* a $\breve{P}$ kao *sledi*, pod uslovom da pritom nemamo vremenske ili prostorne asocijacije.

ovde *mora* biti uzastopnih termina, osim ukoliko ukupan broj termina u našoj kolekciji nije konačan. Sa druge strane, ovaj metod neće dozvoliti zatvorene nizove; jer, zbog tranzitivnosti relacije P, ako bi niz bio zatvoren, a x bio bilo koji od termina tog niza, onda bismo imali xPx što je nemoguće, zato što je P asimetrična relacija. Tako, u zatvorenom nizu, generisanje relacija nikada ne može biti tranzitivno[1]. Kao i u prethodnom metodu, niz može imati dva kraja, jedan ili nijedan. Samo u prvom slučaju niz može biti konačan, ali u ovom slučaju može takođe biti i beskonačan, dok u druga dva slučaja mora biti beskonačan.

191. (3) Niz može biti generisan posredstvom rastojanja, što smo već delimično objasnili u Trećem delu i što ćemo, kao što ćemo videti, potpunije objasniti u nastavku. U ovom slučaju, polazeći od izvesnog termina x važe relacije, koje su veličine, između x i određenog broja drugih termina y, z, ... U zavisnosti od toga da li su ove relacije veće ili manje, možemo urediti odgovarajuće termine. Ako ne postoje slične relacije između preostalih termina y, z, ..., onda nam ne treba ništa više. Ali, ako su ove relacije, koje su veličine, iste vrste, neophodni su izvesni aksiomi kako bi se osiguralo da poredak može biti nezavisan od pojedinačnog termina od koga smo pošli. Označavajući sa xz rastojanje x od z, ako je xz manje od xw, onda je i yz manje od yw. Posledica koja ne sledi kada je x bio jedini termin koji je imao rastojanje jeste ta što rastojanja moraju biti asimetrične relacije, a one koje imaju jedan smer moraju se smatrati manjim od nule. Jer, „xz je manje od xw“ mora da uključi i „wz je manje od ww“, to jest, wz je manje od 0. Ovaj slučaj je time praktično sveden na onaj drugi, jer će svaki par termina x, y biti takav da je xy manje od 0 ili da je xy veće od 0; u prvom slučaju možemo da stavimo yPx a u drugom xPy. Ali, potreban nam je jedan dodatni aksiom kako bi tako ustanovljen poredak bio nedvosmslen. Ako $xz = yw$ i $zw' = xy$, w *i* w'

[1] Za precizniju razradu vidi Glavu XXVIII.

moraju biti ista tačka. Pomoću ovog drugog aksioma svođenje na slučaj (2) je upotpunjeno.

192. (4) Slučajevi trijangularnih relacija mogu da generišu poredak. Neka R bude relacija koja važi između y i (x, z), između z i (y, u), između u i (z, w) itd. *Između* je i sâmo takva relacija i stoga bi moglo da izgleda kao najneposredniji i najprirodniji način generisanja poretka. U takvom slučaju, rekli bismo da je y između x i z kada relacija R važi između y i para x, z. Potrebne su nam pretpostavke u vezi sa R koje bi trebalo da pokažu da, ako je y između x i z i z između y i w, onda su i y i z između x i w. Dakle, ako važi $yR(x, z)$, $zR(y, w)$, onda mora da važi i $yR(x, w)$ i $zR(x, w)$. Ovo je vrsta troterminske tranzitivnosti. Isto tako, ako je y između x i w i z između y i w, onda z mora biti između x i w i y između x i z: dakle, ako $yR(x, w)$ i $zR(y, w)$, onda $zR(x, w)$ i $yR(x, z)$. Isto tako, $yR(x, z)$ mora biti ekvivalentno sa $yR(z, x)$[1]. Pod ovim pretpostavkama, nedvosmislen poredak će biti generisan među bilo kojim brojem termina koji su takvi da svaka trijada tih termina stoji u relaciji R. Da li je ovakvo stanje stvari nemoguće dalje analizirati predstavlja pitanje koje ostavljam za sledeću glavu.

193. (5) Do sada nismo pronašli način generisanja zatvorenog kontinuiranog niza. Međutim, postoje primeri takvih nizova, na primer, uglovi, eliptične prave linije, kompleksni brojevi sa datim modulom. Prema tome, neophodno je imati neku teoriju u kojoj su ovakvi nizovi mogući. U slučaju u kojem su naši termini asimetrične relacije, kao što su prave linije, ili stoje u biunivokoj korespondenciji sa takvim relacijama, sledeća teorija će to postići. U drugim slučajevima, šesti metod (dole) izgleda primeren svrsi koju imamo u vidu.

Neka je $x, y, z, \ldots$ skup asimetričnih relacija i neka je R asimetrična relacija koja važi između bilo koje dve relacije x, y ili y, x, osim

---

[1] Vidi Peano, *I Principii di Geometria*, Torino, 1889, Aksiome VIII, IX, X, XI.

kada je y konverzna relacija od x. Isto tako, neka je R takva relacija da, ako važi između x i y, onda važi i između y i konversa od x; i ako je x bilo koji termin kolekcije, neka su svi termini sa kojima je x u jednoj od relacija R ili $\breve{R}$ termini te kolekcije. Svi ovi uslovi su zadovoljeni u slučaju uglova, i kad god su zadovoljeni niz koji dobijamo je zatvoren. Jer, xRy implicira $yR\breve{x}$ i stoga $\breve{x}R\breve{y}$, a otuda i $\breve{y}Rx$; tako je posredstvom relacije R moguće kretanje od x natrag ka x. Isto tako, ne postoji ništa u definiciji što pokazuje da naš niz ne može biti kontinuiran. Pošto je zatvoren, ne možemo univerzalno primeniti pojam *između*, ali pojam *razdvajanja* uvek može biti primenjen. Razlog iz kojeg je nužno pretpostaviti da su naši termini ili asimetrične relacije ili da su korelirani sa njima, jeste taj što takvi nizovi često imaju antipode ili *suprotne* termine, kako se već mogu nazvati, i što izgleda da je pojam *suprotan* suštinski povezan sa pojmom konversa asimetrične relacije.

194. (6) Na isti način na koji smo u (4) pokazali kako konstruisati niz posredstvom relacija *između*, sada možemo konstruisati niz direktno posredstvom četvoroterminskih relacija razdvajanja. Za ovu svrhu su nam kao i ranije neophodni izvesni aksiomi. Vailati[1] je pokazao da je sledećih pet aksioma dovoljno, a Padoa da su nezavisni od poretka, to jest, da nijedan ne može da se izvede iz svog prethodnika[2]. Označavajući „a i b razdvajaju c od d" sa $ab\|cd$ moramo imati:

(α) $ab\|cd$ je ekvivalentno sa $cd\|ab$;

(β) $ab\|cd$ je ekvivalentno sa $ab\|dc$;

(γ) $ab\|cd$ isključuje $ac\|bd$;

(δ) za bilo koja četiri termina naše kolekcije, moramo imati $ab\|cd$ ili $ac\|bd$ ili $ad\|bc$;

(ε) ako $ab\|cd$ i $ac\|be$, onda $ac\|de$.

---

1 *Rivista di Matematica*, V, str. 76, 183.

2 *Ibid.*, str. 185.

Posredstvom ovih pet pretpostavki, naši termini *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, ... stiču nedvosmisleni poredak u kojem polazimo od relacije između dva para termina koja je nedefinljiva, izuzev u onoj meri u kojoj je prethodne pretpostavke određuju. Dalje razmatranje ovog slučaja, kao i opšte relacije razdvajanja, odlažem za kasnije.

Šest gorenavedenih metoda generisanja niza su glavni metodi koji su mi poznati, a svi drugi su, koliko mi je poznato, svodivi na jedan od ovih šest. Poslednji metod jedini obezbeđuje generisanje zatvorenog kontinuiranog niza čiji termini nisu ni asimetrične relacije niti sa njima korelirane relacije[1]. Ovaj poslednji metod bi se primenjivao u projektivnoj i eliptičkoj geometriji, gde izgleda da korelacija tačaka na liniji sa linijama kroz tačku logički sledi poretku tačaka na liniji. Ali, pre nego što ćemo moći da odlučimo da li su ovih šest metoda (posebno četvri i šesti) nesvodivi i nezavisni, moramo da razmotrimo (ono što do sada nije analizirano) značenje poretka i logičke konstituente (ako ih uopšte ima) tog značenja. To ćemo učiniti u sledećoj glavi.

---

[1] Vidi Glavu XXVIII.

Glava XXV
ZNAČENJE PORETKA

195. Videli smo pod kojim okolnostima postoji poredak između skupa nekih termina i na taj način smo se induktivno upoznali sa prirodom poretka. Ali još se nismo suočili sa pitanjem: šta je poredak? Ovo je teško pitanje i pitanje o kojem, koliko mi je poznato, uopšte ništa nije pisano. Svi autori za koje znam su se zadovoljavali time da izlože genezu poretka; i pošto većina od njih daju samo jedan od šest metoda koje smo nabrojali u Glavi XXIV, bilo im je lako da pomešaju genezu poretka sa njegovom prirodom. Ova zbrka je očigledna već zbog mnogobrojnosti tih metoda; jer, očigledno je da pod *poretkom* mislimo na nešto što je savršeno određeno a što je, budući jednako generisano u svih naših šest slučajeva, očigledno različito od svakog i svih načina na koje može biti generisano, osim ako jedan od tih načina ne bi bio fundamentalan, a svi drugi svodivi na njega. Svrha ove glave je da se iznese na videlo ovaj zajednički element i da se otvori logička diskusija u vezi sa njim. Ova diskusija je čisto filozofski interesantna i mogla bi da se potpuno izostavi u matematičkom tretiranju ovog predmeta.

Kako bismo se približili ovom predmetu postepeno, odvojimo diskusiju o *između* od razdvajanja parova. Kada ustanovimo prirodu svakog od njih ponaosob, onda ćemo ih kombinovati i ispitati šta im je zajedničko. Počeću sa *između* zato što je jednostavnije.

196. *Između* može biti (kao u Glavi XXIV) okarakterisano kao relacija jednog termina *y* prema druga dva termina *x* i *z*, koja važi kad god je *x* prema *y* i *y* prema *z* neka relacija koju *y* nema prema *x* niti *z* prema *y* niti *z* prema *x*[1]. Ovi uslovi su nesumnjivo *dovoljni* za *između,* ali se postavlja pitanje da li su *nužni*. Treba istaći nekoliko mogućih stanovišta o ovome. (1) Možemo tvrditi da gorenavedeni uslovi daju pravo *značenje* za između, da oni konstituišu analizu između, a ne samo skup uslova koji garantuju da ga ima. (2) Možemo tvrditi da *između* uopšte nije relacija termina *x*, *y*, *z*, nego relacija relacije *y*-a prema *x* prema relaciji *y*-a prema *z*, naime, relacija razlike u pogledu smera. (3) Možemo da tvrdimo da je *između* nedefinljiv pojam, slično *većem* i *manjem*, da nam gorenavedeni uslovi dozvoljavaju da zaključimo da je *y* između *x* i *z*, ali da mogu postojati i druge okolnosti pod kojima se to javlja i da se čak može javljati bez bilo koje relacije osim različitosti među parovima (*x*, *y*), (*y*, *z*), (*x*, *z*). Da bismo se opredelili za neku od ovih teorija, bilo bi dobro da ih sve izložimo redom.

197. (1) U ovoj teoriji definišemo da „*y* je između *x* i *z*“ znači: „postoji relacija *R* takva da *xRy*, *yRz*, ali ne *yRx*, *zRy*“; ostaje pitanje da li treba dodati i „ne *zRx*“. Počnimo od pretpostavke da taj dodatak nije načinjen. Sledeći iskazi biće generalno prihvaćeni kao samoočigledni: (α) ako je *y* između *x* i *z* i *z* između *y* i *w*, onda je *y* između *x* i *w*; (β) ako je *y* između *x* i *z* i *w* između *x* i *y*, onda je *y* između *w* i *z*. Da bismo skratili, izrazimo „*y* je između *x* i *z*“ simbolom *xyz*. Onda su naša dva iskaza: (α) *xyz* i *yzw* implicira *xyw*; (β) *xyz* i *xwy* implicira *wyz*. Moramo dodati da je relacija *između* simetrična utoliko što

[1] Uslov da *z* nije u relaciji o kojoj je reč prema *x* je relativno nebitan zato što se zahteva samo da, ako je *y* između *x* i *z*, *x* ne bude između *y* i *z* niti *z* između *x* i *y*. Ako smo voljni da priznamo da je u takvim slučajevima, kao što su, na primer uglovi trougla, svaki između druga dva, možemo potpuno da izostavimo uslov o kome je reč. Druga četiri uslova, naprotiv, izgledaju bitnije.

su krajevi povezani, to jest *xyz* implicira *zyx*. Ovaj uslov direktno proizlazi iz naše definicije. U pogledu aksioma (α) i (β) treba primetiti da je *između*, prema našem sadašnjem gledištu, uvek relativno s obzirom na neku relaciju R i da se pretpostavlja da aksiomi važe samo kada je reč o istoj relaciji R u obe premise. Pogledajmo da li su ovi aksiomi posledice naše definicije. Za ovu svrhu pišimo $\bar{R}$ za ne-R.

$$xyz \text{ znači } xRy, yRz, y\bar{R}x, z\bar{R}y.$$
$$yzw \text{ znači } yRz, zRw, z\bar{R}y, w\bar{R}z.$$

Tako *yzw* samo dodaje onom *xyz* dva dodatna uslova zRw i $w\bar{R}z$. Ako je R tranzitivno, onda ovi uslovi garantuju *xyw*, a u suprotnom ne. Videli smo da su neki nizovi generisani jedan-jedan relacijama R koje nisu tranzitivne. Međutim, ako u ovim slučajevima označimo sa R^2 relaciju između x i z koju impliciraju $x\bar{R}y$, yRz itd. za više stepene, onda možemo da zamenimo R sa tranzitivnom relacijom R', gde R' znači „neki pozitivan stepen od R“. Na ovaj način, ako *xyz* važi za relaciju koja je neki određeni stepen od R, onda *xyz* važi za R' ali samo pod uslovom da nijedan pozitivan stepen od R nije ekvivalentan $\breve{R}$. Jer, u ovom poslednjem slučaju bismo imali $yR'x$ uvek kada $xR'y$, a R ne bi moglo biti zamenjeno sa R' u objašnjenju *xyz*. Sada je ovaj uslov da konvers od R ne sme da bude pozitivan stepen od R ekvivalentan uslovu da naš niz ne treba da bude zatvoren. Jer, ako $\breve{R}=R^n$, onda $RR=R^{n+1}$; ali, pošto je R jedan-jedan relacija, $R\breve{R}$ implicira relaciju identiteta. Tako nas $n+1$ koraka vodi natrag od x do x, a naš niz je zatvoren niz sa $n+1$ termina. Već smo se složili da *između* nije strogo primenljivo na zatvorene nizove. Otuda ovaj uslov da $\breve{R}$ ne treba da bude stepen od R nameće našem aksiomu (α) ograničenja koja i očekujemo.

U pogledu (β) imamo:

$$xyz = xRy.yRz.y\bar{R}x.z\bar{R}y.$$
$$xwy = xRw.wRy.w\bar{R}x.y\bar{R}w.$$

Slučaj zamišljen ovim aksiomom moguć je samo ako R nije jedan-jedan relacija, pošto imamo xRy i xRw. Ovde se wyz dobija kao neposredna posledica definicije, bez potrebe za daljim uslovima.

Ostaje da ispitamo da li možemo da se oslobodimo uslova $z\bar{R}x$ pri definisanju *između*. Ako pretpostavimo da je R jedan-jedan relacija i da je zRx zadovoljeno, imaćemo

$$xyz = xRy.yRz.z\bar{R}y.y\bar{R}x,$$

i dalje po pretpostavci zRx, a pošto je R jedan-jedan relacija i pošto xRy, onda $x\bar{R}z$. Stoga, na osnovu definicije imamo yzx, a na sličan način ćemo dobiti i zxy. Ako bismo se sada držali našeg aksioma (α) imali bismo xzx, što je nemoguće; jer, sigurno je deo značenja *između* da tri termina u toj relaciji moraju da budu različita i da nije moguće da neki termin bude između x i x. Tako moramo ili da umetnemo naš uslov $z\bar{R}x$ ili da postavimo novi uslov pri definisanju, naime, da se x i z moraju razlikovati. (Trebalo bi primetiti da naša definicija implicira da se x razlikuje od y i y od z, jer ako ne bi bilo tako, xRy bi podrazumevalo yRx, a yRz bi podrazumevalo zRy). Izgledalo bi poželjnije da umetnemo uslov da se x i z moraju razlikovati jer je ovo u svakom slučaju nužno i nije implicirano od strane $z\bar{R}x$. Ovaj uslov stoga mora biti dodat našem aksiomu (α); xyz i yzw treba da impliciraju xyw, osim ako x i w nisu identični. U aksiomu (β) ovaj dodatak nije nužan, pošto ga impliciraju premise. Stoga, uslov $z\bar{R}x$ nije nužan ako smo skloni da prihvatimo da je xyz kompatibilno sa yzx – to prihvatanje omogućava slučajeve poput uglova trougla. Ili, umesto $z\bar{R}x$ možemo da umetnemo uslov za koji smo prethodno ustanovili da je nužan za univerzalnu valjanost našeg aksioma (α), naime, da nijedan stepen od R ne treba da bude ekvivalentan koversu od R jer, ako imamo i xyz i yzx, onda ćemo imati (barem u meri u kojoj se to tiče x, y, z) $R^2 = \breve{R}$ to jest ako xRy i yRz, onda zRx. Izgleda da je ovaj poslednji put najbolji. Stoga, u svim slučajevima gde je naša prva instanca *između* definisana jedan-jedan relacijom R zamenićemo relaciju R relacijom R' koja znači „neki pozitivan stepen od R“. Relacija R' je onda tranzitivna, a uslov da nijedan pozitivan stepen od *R* ne sme da bude ekvivalentan sa $\breve{R}$, ekvivalentan je uslovu da relacija *R'* mora biti asimetrična. Stoga je na kraju cela stvar pojednostavljena na sledeći način:

Reći da je *y* između *x* i *z* ekvivalentno je tome da postoji neka tranzitivna asimetrična relacija koja povezuje i *x* i *y*, i *y* i *z*.

Kao što gorenavedena argumentacija pokazuje, ovaj kratak i jednostavan iskaz zajedno sa poboljšanjima koja su se postepeno ispostavila kao neophodna ne sadrži ni više ni manje od onoga što sadrži naša prvobitna definicija. Međutim, preostaje pitanje: da li je ovo *značenje* izraza *između*?

198. Odmah možemo da navedemo protivprimer ukoliko dopustimo da se kaže sledeće: *R* je relacija *između x* i *y*. Kao što će čitalac da zapazi, ovo tvrđenje je uz teškoće isključeno iz definicije *između* čije bi uvođenje dovelo barem do verbalne cirkularnosti. Ovo tvrđenje može biti samo lingvistički značajno ili pak može da ukazuje na stvarni nedostatak gorenavedene definicije. Ispitajmo relaciju relacije *R* prema terminima *x* i *y*. Pre svega, ovde sigurno postoji takva relacija. Biti termin koji stoji u relaciji *R* prema nekom drugom terminu svakako znači biti u relaciji *R* koja se može izraziti kao „pripadanje domenu relacije R“. Ako *xRy*, *x* će pripadati domenu od *R*, a *y* domenu od $\breve{R}$. Ako izrazimo sa *E* ovu relaciju između *x* i *R* ili između *y* i $\breve{R}$, imaćemo *xER*, $yE\breve{R}$. Ako zatim izrazimo sa *I* relaciju *R* prema $\breve{R}$, imaćemo $\breve{R}IR$ i $RI\breve{R}$. Tako imamo *xER*, y*EIR*. Sada, *EI* nipošto nije konvers od *E* i stoga, makar samo iz tog razloga, gorenavedena definicija *između* nije upotrebljiva; takođe, ni *E* ni *EI* nije tranzitivno. Tako je naša definicija *između* potpuno neprimenljiva u tom slučaju. Sada bi se svakako moglo posumnjati da li u ovom slučaju *između* uopšte ima isto značenje kao u drugim slučajevima. Sigurno je da na ovaj način ne dobijamo niz: *x* i *y* nisu u istom *smislu* kao *R* između *R* i drugih termina. Pored toga, ako dopustimo relacije termina prema samom sebi, onda ćemo morati da dopustimo da je *između* takva relacija, a to smo prethodno proglasili nemogućim. Stoga možemo doći u iskušenje da posmatramo upotrebu *između* u ovom slučaju kao posledicu lingvističke slučajnosti da se ova relacija obično pominje između subjekta i objekta, kao u slučaju „*A* je otac od *B*“. Sa druge strane, možemo da insistiramo da je neka relacija u naročitoj relaciji prema paru termina koje povezuje, i da bi *između* trebalo da označava relaciju jednog termina prema druga dva termina. Na primedbu koja se tiče relacije termina prema njemu samom, može se odgovoriti da takve relacije u bilo kom sistemu predstavljaju ozbiljnu logičku poteškoću, da bi im ako je moguće porekao filozofski značaj i da bi čak i u slučaju gde je relacija o kojoj je reč identitet morala da postoje *dva* identična termina koji stoga ne bi bili sasvim identični. Pošto ovo izaziva jednu fundamentalnu teškoću koju ovde ne možemo da razmatramo, biće razborito da izostavimo odgovor[1]. Možemo još i da insistiramo da upotreba iste reči u dva konteksta uvek ukazuje na neku analogiju na čiji opseg bi oni koji osporavaju da je značenje isto u oba slučaja trebalo pažljivo da ukažu; i da je ovde analogija sigurno dublja od pukog redosleda reči u rečenici koji je u svakom slučaju znatno promenljiviji u ovom pogledu od tvrđenja da relacija važi između njenih termina. Međutim, na ovaj prigovor se može odgovoriti da je sam prigovarač ukazao na tačan opseg analogije: relacija relacije prema njenim terminima je relacija jednog termina prema druga dva, baš kao što *između* jeste, i to je ono što ova dva slučaja čini sličnim. Mislim da je ovaj poslednji odgovor valjan i možemo dopustiti da ova relacija relacije prema njenim terminima, iako uključuje najznačajniji logički problem, nije ista kao relacija *između* koja konstituiše poredak.

Ipak, gorenavedena definicija *između*, premda ćemo na kraju morati da je prihvatimo, izgleda na prvi pogled jedva adekvatna sa filozofske tačke gledišta. Upućivanje na *neku* asimetričnu relaciju je nejasno i izgleda da zahteva zamenu nekim izrazom u kojem se nijedna tako nedefinisana relacija ne javlja već samo termini i

---

[1] Cf. §95.

između. Ovo nas dovodi do druge od gore pomenutih opcija koje se tiču *između*.

199. (2) Može se reći da *između* uopšte nije relacija tri termina nego relacija dve relacije, naime, razlika u pogledu smera. Ako prihvatimo ovo gledište, prvo što treba primetiti jeste da se zahtevaju dve suprotne relacije, ne samo generalno uzev, već kao partikularizovane time što pripadaju jednom istom terminu. Ova distinkcija je već poznata iz slučaja veličina i kvantiteta. Apstraktno, *pre* i *posle* ne konstituišu *između*: *između* nastaje samo u slučaju kada je jedan isti termin i pre i posle: ovaj termin je onda između onoga što je pre i onoga što je posle. Stoga postoji teškoća u svođenju *između* na razliku smerova. Partikularizovana relacija je logički zagonetan entitet za koji smo u Prvom delu (§55) utvrdili da se mora osporiti; i nije sasvim lako razlikovati relaciju dve relacije, koja je partikularizovana time što pripada jednom istom terminu od relacije termina o kome je reč prema druga dva termina. U isto vreme, velika korist je ostvarena ovim svođenjem. Oslobađamo se nužnosti trijangularne relacije kojoj mnogi filozofi mogu prigovoriti, i pripisujemo zajednički element svim slučajevima relacije *između*, naime, razliku u smeru, to jest, razliku između asimetrične relacije i njenog konversa.

200. Pitanje da li uopšte može postojati nesvodiva trijangularna relacija predstavlja pitanje čije je rešavanje i teško i nevažno, ali čija je precizna formulacija od vrlo velikog značaja. Izgleda da filozofi uobičajeno pretpostavljaju – mada, koliko mi je poznato, ne eksplicitno – da relacija nikada ne može imati više od dva termina i da se takođe takve relacije svode, posredstvom sile ili lukavstva, na predikacije. S druge strane, matematičari gotovo bez razlike govore o relacijama mnogih termina. Međutim, mi ne možemo da rešimo pitanje prostim pozivanjem na matematičke primere, jer ostaje pitanje da li su takve relacije podložne analizi ili ne. Pretpostavimo, na primer, da je projektivna ravan definisana kao relacija tri tačke: filozof uvek može reći da bi projektivna ravan trebalo da bude definisana kao relacija tačke i linije ili kao relacija dve linije koje se seku – što je izmena koja ne pravi nikakvu matematičku razliku. Pogledajmo šta je tačno značenje ovog pitanja. Među terminima postoje dve radikalno različite vrste, a njihova razlika predstavlja istinu na kojoj se zasniva učenje o supstanciji i atributima. Postoje termini koji se nikada ne mogu javljati drugačije nego kao termini; takvi termini su tačke, trenuci, boje, zvukovi, čestice materije i uopšte termini one vrste od kojih se stvari koje postoje sastoje. Sa druge strane, postoje termini koji se mogu javljati drugačije nego kao termini; takvi su biće i uopšte uzev pridevi i relacije. Složili smo se da takve termine nazivamo pojmovima[1]. To su oni pojmovi koji se ne javljaju kao termini i koji razlikuju iskaze od pukih pojmova; u svakom iskazu postoji bar jedan pojam više nego što u tom iskazu ima termina. Tradicionalno gledište – koje se može nazvati subjekat-predikat teorijom – smatra da u svakom iskazu postoji jedan termin, subjekat, i jedan pojam koji nije termin, predikat. Ovo gledište iz više razloga mora biti odbačeno[2]. Najmanje odstupanje od tradicionalnog gledišta sastoji se u tvrđenju da tamo gde iskazi nisu svodivi na subjekat-predikat formu uvek postoje samo dva termina i jedan pojam koji nije termin. (Ta dva termina naravno mogu biti kompleksni i svaki može da sadrži pojmove koji nisu termini). Ovo predstavlja mišljenje prema kom postoje samo relacije između dva termina, dok se relacija može definisati kao bilo koji pojam koji se javlja u iskazu koji sadrži više od jednog termina. Ali, izgleda da ovo nije nikakav *a priori* razlog za ograničenje relacija na dva termina i da postoje primeri koji navode na suprotno gledište. Prvo, kada se pojam broja pripisuje nekoj kolekciji, ako kolekcija ima *n* termina, onda postoji *n* termina i samo jedan pojam (naime, *n*) koji nije termin. Drugo, relacije kao što su relacije stvari koje postoje prema mestu i vremenu u kojima postoje, svodive su samo posredstvom jednog veoma

---

[1] Vidi Deo I, Glava IV.

[2] Vidi *The Philosophy of Leibniz* od autora ovog dela, Cambridge, 1900; Glava II, §10.

nezgrapnog metoda na relacije između dva termina[1]. Međutim, ako bismo smatrali da je ovo svođenje suštinsko, onda bi izgledalo da je ono uvek formalno moguće ujedinjavanjem dela iskaza u jedan složen termin i potom tvrđenjem relacije između ovog dela i ostatka koji na sličan način može da se svede na jedan termin. Može biti slučajeva gde ovo nije moguće, ali mi oni nisu poznati. Međutim, koliko sam uspeo da otkrijem, pitanje da li jedno takvo svođenje uvek treba preduzeti, nije od od nekog velikog praktičnog i teorijskog značaja.

201. Dakle, ne postoji nikakav *a priori* razlog u prilog analize *između* na relaciju dve relacije, ako je već trijangularna relacija poželjnija. Drugi razlog u prilog analize *između* je značajniji. Ukoliko je *između* trijangularna relacija termina, onda je moramo smatrati ili nedefinljivom ili kao da podrazumeva pozivanje na *neku* tranzitivnu asimetričnu relaciju. Ali, ako uzmemo da se *između* u suštini sastoji u suprotnosti dve relacije koje pripadaju jednom terminu, izgleda da tu ne sme više biti bilo kakve nepotrebne neodređenosti. Međutim, protiv ovog gledišta možemo insistirati da nema nikakvog razloga iz kojeg bi relacije o kojima je reč trebalo da budu tranzitivne i da se – što je značajnije – samo značenje *između* prevashodno tiče termina jer su oni ti koji čine poredak, a ne njihove relacije. A ako bi samo relacije bile relevantne, onda ne bi bilo nužno kao što zapravo jeste, da ih partikularizujemo navođenjem termina između kojih stoje. Stoga, mišljenje da *između* nije trijangularna relacija mora biti u celosti odbačeno.

202. (3) Sada prelazimo na stanovište prema kojem je *između* nesvodiva i nedefinljiva relacija. U prilog ovog stanovišta moglo bi se reći da se u svim našim načinima generisanja otvorenih nizova mogu naći slučajevi u kojima se *između* javlja i da bismo mogli da testiramo predložene definicije. Izgleda da ovo pokazuje da su predložene definicije bile samo uslovi koji impliciraju relacije *između*, a

[1] Vidi Deo VII, Glava LIV.

ne prave definicije ove relacije. Pitanje da li takvi i takvi uslovi garantuju da će *y* biti između *x* i *z*, uvek je pitanje na koje možemo da odgovorimo bez pozivanja (barem svesno) na neku prethodnu definiciju. Neanalizabilnu prirodu *između* podupire činjenica da je relacija simetrična s obzirom na dva kraja, što nije bio slučaj sa relacijom parova iz koje je *između* izvedeno. Međutim, postoji vrlo ozbiljna teškoća na koju nailazi takvo gledište, a ona se sastoji u tome što su skupovi termina uređeni u mnoge različite poretke, tako da u jednom možemo imati *y* između *x* i *z*, dok u drugom imamo *x* između *y* i *z*[1]. Izgleda da ovo pokazuje da *između* suštinski pretpostavlja pozivanje na relacije iz kojih je izvedeno. Ako nije tako, onda ćemo barem morati da prihvatimo da su ove relacije relevantne za generisanje nizova, zato što nizovi bezuslovno zahtevaju najviše jednu relevantnu relaciju *između iz*među tri termina. Stoga izgleda da moramo dopustiti da *između* nije jedini izvor nizova, već da uvek mora biti dopunjeno navođenjem neke tranzitivne asimetrične relacije s obzirom na koju *između* nastaje. Najviše što se može reći jeste da i sama ta tranzitivna asimetrična relacija dva termina može biti logički sekundarna i izvedena iz neke relacije tri termina poput onih koje su razmatrane u Glavi XXIV u okviru četvrtog načina generisanja nizova. Kada takve relacije zadovolje aksiom koji je tamo bio pomenut, onda one same od sebe vode relacijama između parova termina. Jer, možemo reći da *b* prethodi *c* kada *acd* implicira *bcd*, i da *b* sledi *c* kad *abd* implicira *cbd*, gde su *a* i *d* fiksirani termini. Premda su takve relacije puko derivativne, *između* se u takvim slučajevima javlja zahvaljujući njima. Stoga smo na kraju primorani da izostavimo pozivanje na asimetričnu relaciju iz naše definicije. Prema tome, reći ćemo:

---

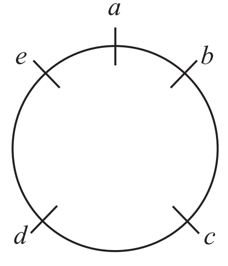
[1] Ovaj slučaj može biti ilustrovan racionalnim brojevima koji se mogu poređati po veličini ili u neki od poredaka (logički poredak) u kom su prebrojivi. Logički poredak je poredak 1, 2 ½, 3, ⅓, ⅔, 4, ...

Termin y je između dva termina x i z s obzirom na neku tranzitivnu asimetričnu relaciju R kada xRy i yRx. Ni u jednom drugom slučaju za y se ne može reći da je u pravom smislu između x i z, i ova definicija ne daje puki kriterijum već pravo *značenje* izraza *između*.

203. Moramo još da razmotrimo značenje razdvajanja parova. Ovo je komplikovanija relacija od *između* i bila je nedovoljno razmatrana dok eliptička geometrija nije istakla razdvajanje parova u prvi plan. Vailati[1] je pokazao da ova relacija, slično relaciji *između*, uvek pretpostavlja tranzitivnu asimetričnu relaciju dva termina; ali, ova relacija jednog para termina se sama odnosi na tri druga fiksirana termina skupa, kao što se u slučaju relacije *između* odnosila na dva fiksirana termina. Nadalje, dovoljno je očigledno da svuda gde postoji tranzitivna asimetrična relacija koja povezuje svaki par termina u kolekciji sa manje od četitri termina, tamo postoje parovi parova koji stoje u relaciji razdvajanja. Tako ćemo videti da je moguće izraziti razdvajanje isto tako dobro kao i *između* posredstvom tranzitivnih asimetričnih relacija i njihovih termina. Ali, ispitajmo najpre direktno značenje razdvajanja.

Možemo označiti činjenicu da su a i c razdvojeni sa b i d simbolom $abcd$. Ako su onda a, b, c, d, e bilo kojih pet termina skupa, zahtevamo da relacija razdvajanja ima sledeća svojstva (od kojih, kao što će biti primećeno, samo poslednje uključuje pet termina):

$abcd = badc$,
$abcd = adcb$,
$abcd$ isključuje $acbd$,
Mora biti $abcd$ ili $acdb$ ili $adbc$,
$abcd$ i $acde$ zajedno impliciraju $abde$[2].



Ova svojstva mogu se ilustrovati razmatranjem pet tačaka na jednom krugu kao na slici.

---

[1] *Rivista di Matematica*, V, str. 75–78. Vidi takođe Pieri, *I Principii della Geometria di Posizione*, Torino, 1898, §7.

[2] Ovih pet svojstava preuzeo sam od Vailatija, *loc. cit*. i *ib*. str. 183.

Bilo koja relacija dva para termina koja poseduje ova svojstva naziva se relacija razdvajanja između parova. Videćemo da je ova relacija simetrična, ali generalno ne i tranzitivna.

204. Gdegod imamo tranzitivnu asimetričnu relaciju *R* između bilo koja dva termina skupa od ne manje nego četiri termina, nužno se javlja relacija razdvajanja. Ako u bilo kom nizu četiri termina stoje u poretku *abcd*, onda su *a* i *c* razdvojeni sa *b* i *d* a, kao što smo videli, svaka tranzitivna asimetrična relacija daje niz pod uslovom da postoje bar dve njene uzastopne instance. Stoga je u ovom slučaju razdvajanje puko proširenje značenja *između*: ako je *R* asimetrična i tranzitivna relacija i ako *aRb*, *bRc*, *cRd*, onda su *a* i *c* razdvojeni sa *b* i *d*. Dakle, postojanje ovakve relacije je dovoljan uslov razdvajanja.

Ono je i nužan uslov. Jer, pretpostavimo da postoji relacija razdvajanja i neka su *a*, *b*, *c*, *d*, *e* pet termina skupa na kojem se ova relacija primenjuje. Onda, uzimajući *a*, *b*, *c* kao fiksirane, a *d* i *e* kao promenljive, može nastati dvanaest slučajeva. Na osnovu pet fundamentalnih svojstava možemo da uvedemo simbol *abcde* da označimo da precrtavanjem bilo kojeg od ovih pet slova preostala četiri stoje u relaciji razdvajanja na koju se upućuje rezultirajućim simbolom. Na osnovu petog svojstva, *abcd* i *acde* impliciraju *abcde*[1]. *Tako ovih dvanaest slučajeva nastaje permutacijom d* i *e*, dok se *a*, *b*, *c* drže fiksiranim. (Mora se primetiti da ne predstavlja razliku to da li se slovo javlja na kraju ili na početku, to jest *abcde* je isti slučaj kao i *eabcd*. Prema tome, možemo odlučiti da ne stavimo ni *d* ni *e* pre *a*). Od ovih dvanaest slučajeva, šest će imati *d* pre *e*, a šest će imati *e* pre *d*. U prvih šest slučajeva kažemo da, s obzirom na smer *abc*, *d* prethodi *e*; u drugih šest slučajeva, kažemo da *e* prethodi *d*. Da bismo se bavili graničnim slučajevima, još ćemo reći da *a* prethodi svakom

---

[1] Ovaj argument je pomalo dosadan, te ga stoga izostavljam. Može se naći kod Vailatija, *loc. cit.*

drugom terminu i da *b* prethodi *c*[1]. Onda ćemo videti da je relacija prethođenja asimetrična i tranzitivna i da je svaki par termina našeg skupa takav da jedan prethodi a da drugi sledi. Na ovaj način je naša relacija razdvajanja barem formalno svedena na kombinaciju „*a* prethodi *b*“, „*b* prethodi *c*“ i „*c* prethodi *d*“.

Prethodno svođenje je veoma zanimljivo iz mnogih razloga. Na prvom mestu, ono pokazuje da je distinkcija između otvorenog i zatvorenog niza donekle površna. Jer, iako naš niz inicijalno može biti zatvoren, on uvođenjem prethodne tranzitivne relacije postaje otvoreni niz koji ima *a* za svoj početak, ali koji nema mogući poslednji termin i ni u kojem smislu se ne vraća nazad u *a*. Zatim, ovo svođenje je od najvećeg značaja u geometriji pošto pokazuje kako poredak može da nastane na eliptičkoj pravoj posredstvom čisto projektivnih razmatranja i to na način koji je daleko više zadovoljavajući od onog koji se dobija iz fon Štautove konstrukcije[2]. Na kraju, ona je od velikog značaja pri unifikaciji dva izvora poretka, i*zmeđu* i razdvajanja, pošto pokazuje da su tranzitivne asimetrične relacije uvek prisutne tamo gde se obe ove relacije javljaju i da jedna implicira drugu. Pomoću relacije prethođenja možemo reći da je jedan termin između druga dva termina, iako smo počeli isključivo od razdvajanja parova.

205. Istovremeno, ne sme se dopustiti da prethodno svođenje (a izgleda i odgovarajuće svođenje u slučaju *između*) bude išta više do samo formalno. Znači, tri termina *a*, *b*, *c* u odnosu na koje je naša tranzitivna asimetrična relacija bila definisana, suštinski su za tu definiciju i ne mogu se izostaviti. Ovo svođenje ne daje nikakav razlog za pretpostavku da postoji neka tranzitivna asimetrična relacija nezavisna od *svih* drugih termina osim od onih koji stoje u toj

---

[1] Pieri, *op. cit.,* str. 32.

[2] Prednosti ovog metoda su očigledne iz gore citiranog Pijerijevog rada, gde su mnoge stvari za koje je izgledalo da ne mogu da se projektivno dokažu, strogo dedukovane iz pretpostavki projektivne geometrije. Vidi Deo VI, Glavu XLV.

relaciji, mada je proizvoljno koje druge termine ćemo izabrati. Ovu činjenicu ilustruje to da se termin *a*, koji nije naročito bitan, javlja kao početak niza. Tamo gde ima tranzitivnih asimetričnih relacija nezavisno od pozivanja na bilo šta spoljašnje, naš niz ne može da ima proizvoljan početak, iako može da uopšte nema početak. Tako četvoroterminska relacija razdvajanja logički prethodi rezultirajućoj dvoterminskoj relaciji i ne može se svesti na nju.

206. Ali, kada smo rekli da je svođenje formalno, nismo rekli da je ono irelevantno za genezu poretka. Naprotiv, baš zato što je ovakvo svođenje moguće, moguće je da četvoroterminska relacija dovodi do poretka. Rezultujuća asimetrična tranzitivna relacija je u stvari relacija pet termina, ali kada se tri od tih pet drže fiksirani, ona postaje asimetrična i tranzitivna u pogledu druga dva termina. Stoga, iako se *između* primenjuje na takve nizove i iako se suština poretka sastoji, ovde kao i drugde, u činjenici da jedan termin prema dva druga stoji u konverznim relacijama koje su asimetrične i tranzitivne, ipak takav poredak može nastati samo u kolekciji koja sadrži bar pet termina, zato što je potrebno pet termina za tu karakterističnu relaciju. Trebalo bi primetiti da su *svi* nizovi, kada se ovako objasne, otvoreni nizovi u smislu da postoji neka relacija između parova termina čiji nijedan stepen nije jednak njenom konversu ili identitetu.

207. Naposletku, rezimirajmo ovu dugu i komplikovanu diskusiju: šest metoda generisanja nizova koje smo nabrojali u Glavi XXIV su svi stvarno različiti, ali je drugi od tih metoda jedini fundamentalan, a preostalih pet se na njega mogu svesti. Štaviše, samo zahvaljujući svodivosti na taj metod oni daju poredak. Najminimalniji iskaz koji se tiče poretka, a koji uvek može da se načini kada uopšte ima poretka ima formu „*y* je između *x* i *z*“ i ovaj iskaz znači: „postoji neka asimetrična tranzitivna relacija koja važi između *x* i *y* i između *y* i *z*“. Ovaj veoma jednostavan zaključak mogao je da se nasluti već na početku, ali je tek posredstvom razmatranja svih navodnih izuzetaka ovaj zaključak čvrsto ustanovljen.

Glava XXVI

ASIMETRIČNE RELACIJE

208. Videli smo da svaki poredak zavisi od tranzitivnih asimetričnih relacija. Pošto su takve relacije one vrste koju je tradicionalna logika nevoljno prihvatala i pošto je odbijanje da se prihvate jedan od glavnih izvora protivrečnosti koje je kritička filozofija pronašla u matematici, biće poželjno da pre nego što nastavimo napravimo ekskurs u čistu logiku i da nađemo osnove za nužno prihvatanje takvih relacija. Kasnije (u Delu VI, Glava LI), nastojaću da odgovorim na opšte primedbe koje su filozofi upućivali relacijama; za sada se bavim samo asimetričnim relacijama.

Relacije se mogu podeliti na četiri klase u zavisnosti od toga da li poseduju ili ne jedan od dva atributa – tranzitivnost[1] i simetričnost. Relacije takve da *xRy* uvek implicira *yRx* nazvane su *simetričnim*; relacije takve da *xRy* i *yRz* zajedno uvek impliciraju *xRz* nazvane su *tranzitivnim.* Relacije koje nemaju prvo svojstvo nazvaću *ne-simetričnim*; relacije koje poseduju suprotnu osobinu, to jest za koje *xRy* uvek isključuje *yRx*, nazvaću *asimetričnim.* Relacije koje nemaju ovo drugo svojstvo nazvaću *ne-tranzitivnim*; one koje poseduju

[1] Izgleda da je De Morgan prvi put upotrebio ovaj termin u sadašnjem smilu; vidi *Comb. Phil. Trans*., IX, str. 104; X, str. 346. Ovaj termin je sada u opštoj upotrebi.

svojstvo da *xRy* i *yRz* uvek isključuje *xRz* nazvaću *intranzitivnim*. Svi ovi slučajevi mogu da se ilustruju rodbinskim vezama. Relacija *brat ili sestra* je simetrična, a i tranzitivna ako dozvolimo da muškarac može biti svoj sopstveni brat, a žena svoja sopstvena sestra. Relacija *brat* nije simetrična, ali je tranzitivna. *Polubrat ili polusestra* je simetrična, ali nije tranzitivna relacija. *Supružnik* je simetrična, ali intranzitivna relacija; *naslednik* je asimetrična, ali tranzitivna relacija. *Polubrat* nije simetrična, a ni tranzitivna relacija; ako bi treći brak bio zabranjen, ova relacija bi bila intranzitivna. *Zet* je asimetrična, ali nije tranzitivna relacija; ako bi drugi brak bio zabranjen, onda bi bila intranzitivna. *Šurak* nije simetrična, a ni tranzitivna relacija. Konačno, *otac* je i asimetrična i intranzitivna relacija. Za ne-tranzitivne ali ne intranzitivne relacije postoji, koliko mi je poznato, samo jedan *značajan* primer, naime, *različitost*; slično tome, ne-simetrične, ali ne asimetrične relacije, izgleda da takođe imaju samo jedan primer, naime, *implikaciju*. U drugim slučajevima koji se uobičajeno javljaju, relacije su ili tranzitivne ili intranzitivne, ili simetrične ili asimetrične.

209. Relacije koje su i simetrične i tranzitivne formalno su one vrste koje je i jednakost. Bilo koji termin polja takve relacije stoji u relaciji o kojoj je reč sa samim sobom, iako može da ne bude u relaciji prema nekom drugom terminu. Za označavanje relacije znakom jednakosti, ako je a termin koji pripada polju relacije, postoji neki termin b takav da $a = b$. Ako su a i b identični, onda $a = a$. Ali, ako nisu, onda, pošto je relacija simetrična, $b = a$; pošto je tranzitivna i pošto $a = b$ i $b = a$, sledi da je $a = a$. Svojstvo relacije koje osigurava da relacija važi između nekog termina i njega samog Peano je nazvao *refleksivnost* i pokazao je, nasuprot ranijem verovanju, da ovo svojstvo ne može da se izvede iz simetričnosti i tranzitivnosti. Jer, nijedno od ovih svojstava ne tvrdi da postoji neko b takvo da $a = b$ nego samo ono što sledi u slučaju da postoji takvo b; a ako ne postoji takvo b, onda dokaz da $a = a$ propada[1]. Ovo svojstvo refleksivnosti pak stvara izvesnu teškoću. Postoji samo jedna relacija za koju je ono istinito bez ograničenja, a to je identitet. U svim drugim slučajevima ono važi samo za termine izvesne klase. Na primer, kvantitativna jednakost je refleksivna samo kada je primenjena na kvantitete, a za druge termine je apsurdno tvrditi da su kvantitativno jednaki samima sebi. Logička jednakost je pak refleksivna samo za klase ili za iskaze ili za relacije. Istovremenost je refleksivna samo za događaje, itd. Dakle, za svaku datu simetričnu tranzitivnu relaciju koja nije identitet možemo da tvrdimo refleksivnost samo unutar izvesne klase, a za tu klasu, osim principa apstrakcije (koji je pomenut u Delu III, Glava XIX i koji će uskoro biti opširno razmatran) nije potrebna nikakva definicija osim one koja proširuje tranzitivnu simetričnu relaciju o kojoj je reč. Kada je ova klasa tako dobijena, refleksivnost unutar te klase, kao što smo videli, sledi iz tranzitivnosti i simetričnosti.

210. Uvođenjem onoga što sam nazvao princip apstrakcije[2] postaje moguće da se refleksivnost donekle bolje objasni. Peano je definisao[3] jedan proces koji naziva definisanje posredstvom apstrahovanja za koje je pokazao da se često koristi u matematici. Ovaj proces se sastoji u sledećem: kada postoji neka relacija koja je tranzitivna, simetrična i (unutar svog polja) refleksivna, onda, ako ova relacija važi između u i v, definišemo novi entitet $\phi(u)$ koji će biti identičan sa $\phi(v)$. Tako je naša relacija svedena na istovetnost relacije prema novom terminu $\phi(u)$ ili $\phi(v)$. E sad, kao što pokazuje Peano, legitimnost ovog procesa zahteva jedan aksiom, naime, aksiom

---

[1] Vidi, na primer, *Revue de Mathématiques*, T. VII, str. 22; *Notations de Logique Mathématique*, Torino, 1894, str. 45, F. 1901, str. 193.

[2] Aksiom koji je u suštini identičan sa ovim principom, ali koji nije izražen sa neophodnom preciznošću, i koji nije dokazan, može se naći kod De Morgana, *Camb. Phil. Trans.*, Vol. X, str. 345.

[3] *Notations de Logique Matthématique*, str. 45.

kojim se tvrdi da ako postoji neka instanca relacije o kojoj je reč, onda postoji entitet poput $\phi(u)$ ili $\phi(v)$. Ovaj aksiom je moj princip apstrakcije koji, kada se precizno izrazi, glasi: „svaka tranzitivna simetrična relacija koja ima barem jednu instancu analizabilna je na združeno posedovanje nove relacije prema nekom novom terminu, pri čemu je nova relacija takva da nijedan termin ne može stajati u ovoj relaciji prema više od jednog termina, ali njen konvers nema ovo svojstvo". Ovaj princip je u običnom jeziku jednak tvrđenju da tranzitivna simetrična relacija nastaje iz zajedničkog svojstva, uz dopunu da ovo svojstvo stoji prema terminima koji ga imaju u relaciji u kojoj ništa drugo ne stoji prema ovim terminima. Ovo daje preciznu formulaciju principu, koji su filozofi često primenjivali, da simetrične tranzitivne relacije uvek proizlaze iz identiteta sadržaja. Međutim, identitet sadržaja je krajnje nejasan izraz, kojem gorenavedeni iskaz u ovom slučaju daje precizno značenje, ali taj iskaz ni na koji način ne odgovara svrsi ovog izraza koja se navodno sastoji u svođenju relacija na prideve termina koji stoje u tim, relacijama.

Sada je moguće dati jasnije objašnjenje svojstva refleksivnosti. Neka *R* bude naša simetrična relacija i neka *S* bude asimetrična relacija u kojoj dva termina koji stoje u relaciji *R* moraju da stoje prema nekom trećem terminu. Onda je iskaz *xRy* ekvivalentan iskazu „postoji neki termin *a* takav da *xSa* i *ySa*". Otuda sledi da, ako *x* pripada onom što smo nazvali domen od *S*, to jest ako postoji neki termin *a* takav da *xSa*, onda *xRx* jer je *xRx* puko *xSa* i *xSa*. Iz ovoga naravno ne sledi da postoji neki drugi termin *y* takav da *xRy* i stoga su Peanove primedbe na uobičajen dokaz refleksivnosti valjane. Ali, posredstvom analize simetričnih tranzitivnih relacija dobijamo dokaz svojstva refleksivnosti zajedno sa egzaktnim ograničenjem kome ono podleže.

211. Sada možemo videti razlog za isključivanje sedmog metoda iz našeg objašnjenja metoda generisanja nizova koji su neki čitaoci mogli da očekuju. Ovo je metod u kome je položaj samo relativan

– metod koji je u §154 Glave XIX odbačen u pogledu kvantiteta**.** Kako je čitava filozofija prostora i vremena povezana sa pitanjem o legitimnosti ovog metoda koje je, u stvari, pitanje o apsolutnom i relativnom položaju, bilo bi poželjno da ga ovde objasnimo i da pokažemo kako princip apstrakcije vodi apsolutnoj teoriji položaja.

Ako razmotrimo niz kao što je niz događaja i ako odbijemo da prihvatimo apsolutno vreme, onda ćemo morati da prihvatimo tri fundamentalne relacije među događajima, naime, istovremenost, prethođenje i sledovanje. Takva teorija može formalno da se izrazi na sledeći način: uzmimo jednu klasu termina takvu da bilo koja dva termina x i y stoje ili u asimetričnoj tranzitivnoj relaciji P ili u konverznoj relaciji $\breve{P}$ ili u simetričnoj tranzitivnoj relaciji R. Neka takođe xRy i yPz implicira xPz i neka xPy i yRz implicira xPz. Onda svi termini mogu da se urede u niz u kome takođe može biti mnogih termina koji imaju isto mesto u nizu. Ovo mesto, shodno relacionoj teoriji položaja, nije ništa drugo do tranzitivna simetrična relacija R prema broju drugih termina. Ali, iz principa apstrakcije sledi da postoji neka relacija S takva da ako xRy, onda postoji neki entitet t za koji važi xSt i ySt. Onda ćemo uvideti da različiti entiteti t koji odgovaraju različitim grupama naših prvobitnih termina takođe formiraju niz, ali niz u kome bilo koja dva različita termina stoje u asimetričnoj relaciji (formalno, u proizvodu $\breve{S}RS$). Ovi termini t će onda biti apsolutni položaji naših x i y, a naš navodni sedmi metod generisanja nizova je sveden na fundamentalni drugi metod. Stoga tu neće biti nizova koji imaju samo relativni položaj, već su u svakom nizu sami položaji ono što konstituiše niz[1].

212. Sada smo spremni da se suočimo sa filozofskom nesklonošću prema relacijama. Celokupnom gore datom objašnjenju poretka i sadašnjem argumentu koji se tiče apstrahovanja nužno će zameriti oni filozofi – za koje se plašim da čine većinu – koji smatraju da

[1] Formalno tretiranje relativnog položaja dao je Šreder, *Sur une extension de l'idée d'ordre*, Congrés, Vol. III, str. 235.

nijedna relacija ne može biti apsolutno i metafizički valjana. Moja namera ovde nije da se upuštam u opšte pitanje već samo da izložim primedbe na bilo koju analizu asimetričnih relacija.

Uobičajeno je mišljenje – često nesvesno podrazumevano i upotrebljavano u argumentaciji čak i od strane onih koji ga ne zastupaju eksplicitno – da se svi iskazi u krajnjoj liniji sastoje od subjekta i predikata. Kada se ovo mišljenje suoči sa relacionim iskazima možemo razlikovati dva pristupa od kojih se jedan može nazvati monadistički, a drugi monistički. Neka je, recimo, dat iskaz *aRb*, gde je *R* neka relacija, monadističko gledište će ovo razložiti na dva iskaza koje možemo nazvati ar_1 i br_2 koji pripisuju *a*-u odnosno *b*-u prideve za koje se pretpostavlja da su zajedno ekvivalentni sa *R*. Suprotno tome, monističko gledište ovu relaciju vidi kao osobinu celine koja je sastavljena od *a* i *b* i kao takvu je smatra ekvivalentnom iskazu koji možemo označiti sa *ab*(*r*). Lajbnic je predstavnik prvog gledišta i (u celini uzev) Loce, a Spinoza i gospodin Bredli zastupaju drugo. Ispitajmo jedno za drugim ova dva gledišta u primeni na asimetrične relacije i, kako bismo bili sasvim određeni, neka to budu relacije *veće od* i *manje od*.

213. Monadističko gledište je izraženo na zadivljujuće lucidan način kod Lajbnica u sledećem pasusu[1]:

„Odnos ili proporcija između dve linije *L* i *M* može da se shvati na tri različita načina; kao odnos veće linije *L* prema manjoj liniji *M*; kao odnos manje linije *M* prema većoj liniji *L* i naposletku kao nešto apstrahovano od obe, to jest kao odnos između *L* i *M*, ne uzimajući u obzir to koja je prvi a koja drugi član tog odnosa, niti konsekvens, niti pak to koja je subjekat, a koja objekat. U prvom načinu razmatranja, *L* kao veća a u drugom *M* kao manja predstavlja subjekat akcidencije koju filozofi nazivaju *relacijom*. Ali, koja od njih će biti subjekat u trećem načinu razmatranja? Ne može se reći da su obe, to jest *L* i *M*, zajedno subjekat takve akcidencije; jer, ako bi bilo tako, imali bismo

[1] *Phil. Werke*, prir. Gerhard, Vol. VII, str. 401.

slučaj akcidencije sa dva subjekta, sa jednom nogom u jednom, a sa drugom u drugom, što je suprotno pojmu akcidencije. Prema tome, moramo reći da je relacija u trećem načinu razmatranja uistinu *izvan* subjekta; ali, budući niti supstancija niti akcidencija, ona mora biti čisto idealna stvar čije je razmatranje uprkos tome korisno“.

214. Treći od gorenavedenih načina razmatranja relacije *veće* i *manje* je, grubo rečeno, onaj koji zastupaju monisti koji smatraju da je celina sastavljena od *L* i *M* jedan subjekat, tako da nas treći način razmatranja odnosa ne primorava, kako je Lajbnic pretpostavljao, da relaciju *veće* i *manje* tretiramo kao dvonožnu. Ovde nas interesuju samo prva dva načina. U prvom načinu razmatranja imamo „*L* je (veće od *M*)“, pri čemu reči u zagradi smatramo pridevom od *L*. Ali, kada ispitujemo ovaj pridev, odmah je očigledno da je on složen: sastoji se u najmanju ruku od delova *veće* i *M*, pri čemu su oba ova dela suštinska. Reći da je linija *L* veća uopšte ne izražava značenje koje imamo na umu i vrlo je verovatno da je linija M takođe veća. Navodni pridev od *L* podrazumeva neko ukazivanje na *M*, ali ova teorija ostavlja neshvatljivim šta se misli pod ukazivanjem. Pridev koji podrazumeva ukazivanje na *M* jednostavno je pridev koji je relativan prema *M*, a to je naprosto nezgrapan način opisivanja relacije. Ili, da postavimo stvar drugačije, ako *L* ima pridev koji odgovara činjenici da je *L* veće od *M*, ovaj pridev je logički sekundaran i samo je izveden iz direktne relacije *L* prema *M*. U analizi *L* se ne javlja ništa osim *M* što bi razlikovalo *L* od *M*, a ipak prema teoriji relacije o kojoj je reč, *L* bi trebalo intrinsično da se razlikuje od *M*. Stoga bismo u svim slučajevima asimetričnih relacija bili primorani da prihvatimo specifičnu razliku između termina u relaciji, iako nikakva analiza jednog ili drugog pojedinačno neće otkriti neko relevantno svojstvo koje jedan ima a drugi nema. Ovo predstavlja protivrečnost monadističke teorije relacija, i ta protivrečnost osuđuje na propast teoriju iz koje je nastala[1].

[1] Vidi članak „The relations of Number and Quantity“, *Mind*, N.S. br. 23.

Ispitajmo sada primenu monadističke teorije na kvantitatrivne relacije. Iskaz „*A* je veće od *B*“ mora biti analizabilan na dva iskaza od kojih jedan prideva pridev *A*-u, a drugi prideva pridev *B*-u. Zastupnici ovog gledišta će verovatno smatrati da su *A* i *B* kvantiteti a ne veličine, i reći će da su pridevi o kojima je reč veličine od *A* i *B*. Ali, oni će onda morati da prihvate relaciju između veličina koja će biti jednako asimetrična kao i relacija koju su te veličine trebalo da objasne. Stoga će veličine zahtevati nove prideve itd. *ad infinitum*, a ovaj beskonačni proces će morati da se okonča pre nego što *značenje* bude moglo da se pripiše našem izvornom iskazu. Ova vrsta beskonačnog procesa nesumnjivo je podložna primedbama, pošto je njegov jedini cilj da objasni značenje izvesnog iskaza, a ipak nijedan od njegovih koraka ga ne približava tom značenju[1]. Dakle, veličine *A* i *B* ne možemo da tretiramo kao prideve koji su nam potrebni. Ali, dalje, ako uzmemo bilo koje prideve uopšte, izuzev onih od kojih svaki ukazuje na drugi termin, nećemo čak ni formalno moći da damo bilo koje objašnjenje date relacije a da ne pretpostavimo baš takvu relaciju između prideva. Jer, puka činjenica da su pridevi različiti daće samo simetričnu relaciju. Stoga, ako naša dva termina imaju različite boje, uviđamo da *A* stoji prema *B* u relaciji razlikovanja po boji koju nikakvo pažljivo tretiranje ne može učiniti asimetričnom. Ili, ako se vratimo veličinama, mogli bismo samo reći da se *A* i *B* razlikuju u veličini, što nam ne daje nikakvu indikaciju u pogledu

---

Ovaj tekst je napisan dok sam još prihvatao monadističku teoriju relacija: protivrečnost o kojoj je reč smatrana je neizbežnom. Sledeći pasus iz Kanta ukazuje na istu poentu: „Die rechte Hand ist der linken ähnlich und gleich, und wenn man blos auf eine derselben allein sieht, auf die Proportion der Lage der Theile unter einander und auf die Grösse des Ganzen, so muss eine volständige Beschreibung der einen in allen Stücken auch von der andern gelten“ (*Von den ersten Grunde des Unterschiedes der Gegenden im Raume*, Hartovo izdanje, Vol. II, str. 389).

[1] U slučajevima u kojima se zahteva ovakav beskonačni proces, nužno imamo posla sa iskazom koji predstavlja beskonačno jedinstvo u smislu Glave XVII iz Drugog dela.

toga koji je veći. Stoga, pridevi *A* i *B* moraju biti, kao u Lajbnicovoj analizi, pridevi od kojih svaki ukazuje na drugi termin. Pridev od *A* mora biti „veći od *B*“, a pridev od *B* mora biti *B* „manji od *A*“. Tako se *A* i *B* razlikuju pošto imaju različite prideve – *B* nije veće od *B*, *A* nije manje od *A* – ali ovi pridevi su ekstrinsični u smislu da pridev od A ukazuje na *B*, a pridev od *B* ukazuje na *A*. Stoga nameravana analiza relacije ne uspeva, te smo primorani da prihvatimo ono što je ova teorija nameravala da izbegne, takozvanu „spoljašnju“ relaciju, to jest relaciju koja ne implicira složenost nijednog od termina u relaciji.

Isti rezultat može se dokazati o asimetričnim relacijama uopšte pošto one zavise samo od toga što su i identitet i različitost simetrični. Neka *a* i *b* stoje u asimetričnoj relaciji *R* tako da *aRb* i $b\breve{R}a$. Neka pretpostavljeni pridevi (od kojih svaki, kao što smo videli, mora da ukazuje na neki drugi termin) budu označeni sa *β* odnosno sa *α*. Stoga naši termini postaju *aβ* i *bα*; *α* pretpostavlja ukazivanje na *a*, a *β* na *b*; i *α* i *β* se razlikuju pošto je relacija asimetrična. Ali, *a* i *b* nemaju intrinsične razlike koje odgovaraju i prethode relaciji *R*; ili, ako ih i imaju, onda i ono s obzirom na šta se razlikuju takođe mora da bude u relaciji koja je analogna relaciji *R*, tako da ništa nije postignuto. Ili *α* ili *β* izražava razliku između *a* i *b*, ali takvu da, pošto ili *α* ili *β* pretpostavlja ukazivanje na termin različit od onog čiji je pridev, ne samo što *α* ili *β* ne prethodi relaciji *R*, već u stvari predstavlja samu relaciju *R*. I pošto i *α* i *β* pretpostavljaju *R*, razlika između *α* i *β* se ne može upotrebiti za ostvarivanje intrinsične razlike između *a* i *b.* Stoga ponovo imamo razliku bez onoga na čemu ta razlika počiva. Ovo pokazuje da neke asimetrične relacije moraju biti nesvodive i da bar jedna takva nesvodiva asimetrična relacija mora biti komponenta svake asimetrične relacije koja može biti navedena.

Lako je kritikovati monadističku teoriju sa opšteg stanovišta izlaganjem protivrečnosti koje izviru iz relacija termina prema pridevima na koje je naša prva relacija bila razložena. Ove protivrečnosti koje nisu u posebnoj vezi sa asimetričnošću pripadaju opštoj filozofiji i isticali su ih zastupnici monističke teorije. Tako gospodin Bredli kaže za monadističku teoriju[1]: „Ukratko, mi smo vođeni principom fisije koji nas ne vodi nikakvom kraju. Sledstveno, svaki kvalitet u relaciji sadrži razliku unutar svoje sopstvene prirode, a ova razlika se ne može neposredno tvrditi o kvalitetu. Stoga kvalitet mora da razmeni svoje jedinstvo za unutrašnju relaciju. Ali na taj način oslobođeni različiti aspekti, zbog toga što svaki od njih predstavlja nešto što je u relaciji, ujedno mora da predstavlja i nešto što je izvan nje. Ova razlika je fatalna po unutrašnje jedinstvo svakog i zahteva novu relaciju i tako dalje bez kraja". Ostaje da se vidi da li monistička teorija prilikom izbegavanja ove teškoće ne postaje podložna drugim jednako ozbiljnim teškoćama.

215. Monistička teorija tvrdi da svaki relacioni iskaz *aRb* mora biti rastavljen na iskaz koji se tiče celine koju sačinjavaju *a* i *b* – iskaz koji možemo označiti sa (*ab*)*r*. Ovo gledište se, slično onom drugom, može ispitati s obzirom na asimetrične relacije ili sa stanovišta opšte filozofije. Oni koji zastupaju ovo gledište kažu da celina sadrži razliku unutar nje same, da ona sintetizuje razlike, i da obavlja druge slične radnje. Što se mene tiče, nisam u stanju da pridam bilo kakvo precizno značenje ovim izrazima. Ali, učinimo sve što možemo.

Kaže nam se da iskaz „*a* je veće od *b*" u stvari ne kaže ništa niti o *a* niti o *b*, već o njima dvoma zajedno. Označavajući celinu koju oni čine sa (*ab*), iskaz kaže, pretpostavljamo, „ (*ab*) sadrži razliku u pogledu veličine". Sada, ovom iskazu – zanemarujući trenutno sve opšte argumente – može da se uputi jedna posebna primedba u slučaju asimetričnosti; (*ab*) je simetrično s obzirom na *a* i *b*, te će tako svojstvo celine biti potpuno isto u slučaju gde je *a* veće od *b*, kao i u slučaju gde je *b* veće od *a*. Lajbnic, koji ne prihvata monističku teoriju i koji prema tome nije imao nikakav razlog da je čini uverljivom, jasno je shvatio ovu činjenicu što se vidi u gornjem citatu. Jer, u njegovom trećem načinu razmatranja odnosa ne uzimamo u obzir koji je prvi a koji drugi član tog odnosa i zaista je dovoljno očigledno da

[1] *Appearance and Reality*, prvo izdanje, str. 31.

u celini (*ab*) kao takvoj ne postoji ni prvi ni drugi član te celine. Da bismo razlikovali celinu (*ab*) od celine (*ba*), a što moramo da uradimo ako treba da objasnimo asimetričnost, bićemo primorani da se vratimo natrag od celine prema delovima i relaciji među njima. Jer, (*ab*) i (*ba*) se sastoje od potpuno istih delova i ne razlikuju se ni u kojem pogledu uopšte osim u pogledu relacije između *a* i *b*. Iskazi „*a* je veće od *b*“ i „*b* je veće od *a*“ su iskazi koji sadrže potpuno iste konstituente i koji prema tome čine potpuno istu celinu; njihova razlika se sastoji samo u činjenici da je u prvom slučaju *veće* relacija od *a* ka *b*, a u drugom relacija od *b* ka *a*. Ova razlika u pogledu smera, to jest, razlika između asimetrične relacije i njenog konversa, predstavlja razliku koju monistička teorija relacija ni na koji način ne može da objasni.

Argumenti opštije prirode bi mogli skoro neodređeno da se nižu, ali sledeći argument se čini posebno relevantnim. Sama relacija celine i dela je asimetrična relacija, a celina – kako su monisti posebno skloni da nam je predstavljaju – različita je od svih svojih delova, uzetih ponaosob i skupa. Stoga, kada kažemo „*a* je deo od *b*“ mi u stvari pod tim mislimo, ako bi monistička teorija bila tačna, da tvrdimo nešto o celini sastavljenoj od *a* i *b*, što ne bi trebalo da se pobrka sa *b*. Ako iskaz koji se tiče ove nove celine nije iskaz o celini i delu, tu neće biti istinitih sudova o celini i delu i stoga će biti lažno reći da je relacija između delova u stvari pridev celine. Ako je novi iskaz iskaz o celini i delu, on će zahtevati novi iskaz za njegovo značenje, i tako dalje. Ako, kao očajnički pokušaj, monista tvrdi da celina sastavljena od *a* i *b* nije različita od *b*, on je primoran da prihvati da je celina zbir svojih delova (u smislu simboličke logike), a pored toga što predstavlja napuštanje njegove celokupne pozicije, takođe čini neizbežnim da celina postane simetrična s obzirom na svoje delove, što je gledište za koje smo već utvrdili da je fatalno. Stoga uviđamo da je monista primoran da prihvati gledište da jedina istinska celina, Apsolut, uopšte nema delove, i da nikakvi iskazi o njoj ili bilo čemu drugom nisu sasvim istiniti, što predstavlja gledište koje neizbežno, već samim tvrđenjem, protivreči sebi samom. Nesumnjivo je da je mišljenje koje tvrdi da su svi iskazi na kraju samoprotivrečni dovoljno osuđeno time da, ako se prihvati, ono samo takođe mora biti samoprotivrečno.

216. Videli smo da su asimetrične relacije neshvatljive prema obema uobičajenim teorijama relacije[1]. Stoga, pošto su takve relacije uključene u broj, kvantitet, poredak, prostor, vreme i kretanje, teško da se možemo nadati jednoj zadovoljavajućoj filozofiji matematike ukoliko usvojimo gledište da nijedna relacija ne može biti „čisto spoljašnja“. Međutim, čim prihvatimo drugačiju teoriju, uviđa se da su logičke zagonetke, koje su do sada ometale filozofe, veštačke. Među terminima koje uobičajeno smatramo relacionim, oni koji su simetrični i tranzitivni – poput jednakosti i istovremenosti – *mogu* da se svedu na ono što je nejasno nazivano identitetom sadržaja koji, sa svoje strane, mora biti razložen na istovetnost relacije sa nekim drugim terminom. Jer, takozvana svojstva termina su zapravo samo drugi termini prema kojima oni stoje u nekoj relaciji, a zajedničko svojstvo dva termina je termin prema kojem oba stoje u istoj relaciji.

Ova duga digresija u domen logike bila je neophodna zbog fundamentalnog značaja poretka i potpune nemogućnosti objašnjenja poretka bez napuštanja većine uvreženih i široko rasprostranjenih filozofskih dogmi. Kada je poredak u pitanju, sve zavisi od asimetričnosti i razlike smera, ali ova dva pojma su nerazumljiva tradicionalnoj logici. U sledećoj glavi ćemo morati da ispitamo vezu razlike smera sa onim što se u matematici javlja kao razlika znaka. Iako će neka čista logika i dalje biti potrebna, u ovom ispitivanju ćemo opet pristupiti matematičkim temama i njima ćemo se baviti u toku svih sledećih glava ovog dela.

---

[1] Razlozi u prilog ove terorije biće ispitani sa opštijeg stanovišta u Glavi LI Šestog dela.

Glava XXVII

RAZLIKA U POGLEDU SMERA I RAZLIKA U POGLEDU ZNAKA

217. Videli smo sada da poredak zavisi od asimetričnih relacija i da one uvek imaju dva smera kao pre i posle, veće i manje, istočno i zapadno, itd. Razlika smera je blisko povezana (premda ne identična) sa matematičkom razlikom znaka. To je pojam od fundamentalnog značaja u matematici i, koliko mogu da vidim, nije objašnjiv pomoću nekih drugih pojmova. Prvi filzof koji je shvatio njegov značaj bio je, izgleda, Kant. U spisu *Versuch dem Begriff der negativen Grösse in der Weltweisheit einzuführen* (1763) vidi se da je svestan razlike između logičke suprotnosti i suprotnosti pozitivnog i negativnog. U raspravi *Von dem ersten Grunde des Unterschiedes der Gegenden im Raume* (1768) prepoznajemo potpuno razumevanje značaja asimetričnosti za prostorne relacije i dokaz, zasnovan na ovoj činjenici, da prostor ne može biti u celosti relacioni[1]. Ali, nije jasno da li je shvatio vezu simetričnosti sa razlikom u pogledu znaka. Sigurno je da 1763. godine nije bio svestan ove veze pošto je smatrao bol negativnom količinom zadovoljstva i pretpostavljao da se veliko zadovoljstvo i mali bol mogu sabrati tako da daju manje

[1] Posebno vidi Hartovo izdanje,Vol. II, str. 386, 391.

zadovoljstvo[1] – što predstavlja gledište koje je i logički i psihološki pogrešno. Kao što je dobro poznato, u *Prolegomena* (§13) on je uzeo asimetričnost prostornih relacija za osnovu shvatanja prostora kao puke forme opažaja, shvatajući, kao što pokazuje diskusija iz 1768, da se prostor ne može sastojati, kao što je to pretpostavljao Lajbnic, od pukih relacija između objekata, i zato što usled prihvatanja logičkih primedbi relacijama koje smo razmatrali u prethodnoj glavi nije mogao da oslobodi protivrečnosti pojam apsolutnog prostora čije tačke su povezane asimetričnim relacijama. Premda ne smatram ovu kasniju i tipičnije kantovsku teoriju napretkom u odnosu na onu iz 1768, Kantu ipak pripada zasluga što je prvi ukazao na logički značaj asimetričnih relacija.

218. Pod razlikom u pogledu smera podrazumevam, barem u okviru trenutne diskusije, razliku između asimetrične relacije i njenog konversa. Fundamentalna logička činjenica je da, ako je data bilo koja relacija R i bilo koja dva termina, a, b, onda postoje dva iskaza koji se mogu formirati od ovih elemenata, jedan koji povezuje a sa b (koji nazivam aRb) i drugi (bRa) koji povezuje b sa a. Ova dva iskaza su uvek različiti iako ponekad (kao u slučaju različitosti) jedan implicira drugi. U drugim slučajevima, kao što je logička implikacija, jedan iskaz ne implicira ni drugi iskaz ni njegovu negaciju, dok u trećem skupu slučajeva jedan iskaz implicira negaciju drugog. O razlici u pogledu smera ću govoriti samo kada se radi o slučajevima treće vrste. U ovim slučajevima aRb isključuje bRa. Ali ovde postaje relevantna jedna druga logička činjenica. U svim slučajevima gde aRb ne implicira bRa postoji druga relacija koja je u vezi sa R, a koja mora da važi između b i a. To znači da postoji relacija $\breve{R}$ takva da aRb implicira bRa; i dalje, $b\breve{R}a$ implicira aRb. Relacija R prema $\breve{R}$ predstavlja razliku u pogledu smera. Ova relacija je jedan-jedan, simetrična i intranzitivna. Njeno postojanje je izvor nizova, razlike u pogledu znaka i zapravo većeg dela matematike.

[1] Hartovo izdanje, Vol II, str. 83.

219. Pitanje od vrlo velikog značaja za logiku, a naročito za teoriju zaključivanja, može da se postavi u vezi sa razlikom u pogledu smera. Da li su *aRb* i $b\breve{R}a$ stvarno različiti iskazi ili se oni razlikuju samo lingvistički? Može se tvrditi da postoji samo jedna relacija *R* i da se sve nužne distinkcije mogu dobiti iz distinkcije između *aRb* i *bRa*. Može se reći da smo zbog onoga što nalažu govor i pisanje primorani da prvo pomenemo ili *a* ili *b* i da to pravi ovu tobožnju razliku između „*a* je veće od *b*“ i „*b* je manje od *a*“, ali u stvarnosti su ova dva iskaza identična. Ali, ako prihvatimo ovo gledište, videćemo da je onda teško objasniti nesumnjivu razliku između *veće* i *manje*. Svaka od ove dve reči sigurno ima značenje čak i kada nisu navedeni termini koji su njima povezani. Ove reči sigurno imaju različita značenja i sigurno je da označavaju relacije. Stoga, ako bismo smatrali da su „*a* je veće od *b*“ i „*b* je manje od *a*“ jedan isti iskaz, onda bismo morali da tvrdimo da su i *veće* i *manje* uključeni u svaki od ova dva iskaza, što izgleda očigledno pogrešno; ili još, moraćemo da tvrdimo da ono što se realno javlja nije nijedna od ove dve relacije već neka treća apstraktna relacija koju je pominjao Lajbnic u gore citiranom pasusu. U ovom slučaju razlika između *veće* i *manje* suštinski bi uključivala ukazivanje na termine *a* i *b*. Ali, ovo gledište se ne može zastupati bez cirkularnosti, jer niti veće niti manje nije inherentno prioritetno i možemo samo reći da je, kada je veće prioritetno onda se radi o relaciji *veće*, a kada je manje prioritetno onda se radi o relaciji *manje*. Stoga izgleda da bismo morali da prihvatimo da su *R* i $\breve{R}$ različite relacije. Ovaj zaključak ne možemo izbeći razlaganjem na prideve kakvo je pokušano u poslednjoj glavi. Tamo smo razložili *aRb* na $a\beta$ i $b\alpha$. Ali, svakom *b* će da odgovaraju dva prideva, β i $\breve{\beta}$, a svakom *a* će takođe da odgovaraju dva prideva, α i $\breve{\alpha}$. Stoga, ako je *R veće*, α će biti „veće od *A*“ a $\breve{\alpha}$ „manje od *A*“ i obratno. Ali, razlika između α i $\breve{\alpha}$ pretpostavlja razliku između veće i manje i između *R* i $\breve{R}$ te stoga ne može to da objašnjava. Stoga *R* i $\breve{R}$ moraju biti različite i „*aRb* implicira $b\breve{R}a$“ mora biti pravo izvođenje.

Sada prelazim na vezu između razlike u pogledu smera i razlike u pogledu znaka. Videćemo da je druga razlika izvodiva iz prve budući razlika koja postoji samo između termina koji su ili asimetrične relacije ili su povezani asimetričnim relacijama. Ali, u izvesnim slučajevima ćemo naići na neke komplikacije u pogledu detalja koje će zahtevati diskusiju.

Razlika u pogledu znaka tradicionalno pripada samo brojevima i veličinama i usko je povezana sa sabiranjem. Može se dopustiti da se notacija ne može korisno primeniti u slučaju gde nema sabiranja, a i da je u slučajevima u kojima je razlika u pogledu znaka moguća sabiranje, uopšte uzev, takođe u nekom smislu moguće. Ali, videćemo da razlika u pogledu znaka nije veoma blisko povezana sa sabiranjem i oduzimanjem. Da bismo ovo učinili jasnim, prvo moramo jasno da shvatimo da se brojevi i veličine koji nemaju znak radikalno razlikuju od onih koji su pozitivni. Zbrka u ovom pogledu je sasvim fatalna po svaku ispravnu teoriju znaka.

220. Ako započnemo sa konačnim brojevima, onda pozitivni i negativni brojevi nastaju na sledeći način[1]. Označavajući sa R relaciju između dva cela broja, zahvaljujući kojoj je drugi neposredno posle prvog, iskaz mRn je ekvivalentan iskazu koji se uobičajeno izražava sa $m + 1 = n$. Ali, ova teorija će se primeniti na progresije uopšte i ne zavisi od logičke teorije kardinalnih brojeva koja je izložena u Drugom delu. U iskazu mRn smatra se da su celi brojevi m i n u potpunosti lišeni znaka kao kada proizlaze iz logičke definicije. Ako važi mRn i nRp, onda pišemo mR^2p i tako dalje za veće stepene. Svaki stepen od R je jedna asimetrična relacija i za njen konvers je lako pokazati da je istog stepena od $\breve{R}$ kao i stepena od R. Tako je mR^aq ekvivalentno sa $q\breve{R}^am$. Ovo su ona dva iskaza koja se obično pišu kao $m + a = q$ i $q - a = m$. Tako su relacije R^a i $\breve{R}^a$ pravi pozitivni i negativni celi brojevi i i jedan i drugi su potpuno različiti od a iako

---

[1] Ovu teoriju ovde izlažem ukratko, jer ću se njome baviti na potpuniji i opštiji način u glavi o progresijama, §233.

su sa njim povezani. Stoga je u ovom slučaju veza sa razlikom u pogledu smera očigledna i direktna.

221. U pogledu veličina moramo razlikovati nekoliko slučajeva. Imamo (1) veličine koje nisu ni relacije ni prostiranja, (2) prostiranja, (3) veličine koje su relacije.

(1) Same veličine ove klase nisu ni pozitivne ni negativne. Ali, dve takve veličine, kao što je objašnjeno u Trećem delu, određuju ili rastojanje ili prostiranje, i ona su uvek pozitivna ili negativna. Osim toga, ona su uvek podložna sabiranju. Ali, pošto naše prvobitne veličine nisu ni relacije ni prostiranja, onda su ove nove tako dobijene veličine različite vrste od prvobitnog skupa. Stoga razlika dva zadovoljstva ili kolekcija zadovoljstava koja su između dva zadovoljstva nije zadovoljstvo, već je u jednom slučaju relacija, a u drugom klasa.

(2) Veličine deljivosti uopšte uzev nemaju znak, ali kada su veličine prostiranja one stiču znak korelacijom. Prostiranje se razlikuje od drugih kolekcija time što se sastoji od svih termina niza koji se nalaze između dva data termina. Kombinacijom prostiranja sa jednim smerom asimetrične relacije koja mora da postoji između krajnjih termina tog prostiranja, samo prostiranje stiče smer i postaje asimetrično. Dakle, možemo razlikovati (1) kolekciju termina između *a* i *b* bez obzira na poredak, (2) termine od *a* do *b*, (3) termine od *b* do *a*. Ovde su (2) i (3) složeni zato što su sastavljeni od (1) i jednog smera konstitutivne relacije. Od ova dva jedan mora biti nazvan pozitivnim, a drugi negativnim. Tamo gde se naš niz sastoji od veličina, upotreba i veza sa sabiranjem odlučuje da, ako je *a* manje od *b*, onda je (2) pozitivno, a (3) negativno. Tamo gde, kao u geometriji, naš niz nije sastavljen od veličina postaje sasvim proizvoljno koji termini će biti pozitivni, a koji negativni. U oba slučaja imaćemo isti odnos prema sabiranju. Bilo koji par kolekcija se može sabrati tako da formira novu kolekciju, ali ne može bilo koji par prostiranja da se sabere tako da formira novo prostiranje. Da bi ovo bilo moguće kraj jednog prostiranja bi morao da bude konsekutivan početku drugog.

Na ovaj način prostiranja *ab* i *bc* mogu biti sabrana tako da formiraju prostiranje *c.* Ako *ab* i *bc* imaju isti smer, *ac* je veće od oba, a ako imaju različite smerove, *ac* je manje od jednog od njih. U drugom slučaju sabiranje *ab* i *bc* se smatra oduzimanjem od *ab* i *cb*, budući da je *bc* negativno a *cb* pozitivno. Ako su naša prostiranja numerički merljiva, sabiranje ili oduzimanje njihovih mera daće meru rezultata sabiranja ili oduzimanja prostiranja u slučajevima u kojima su ona takva da dopuštaju sabiranje ili oduzimanje. Ali, očigledno je da celokupna suprotnost pozitivnog i negativnog zavisi od fundamentalne činjenice da je naš niz generisan asimetričnom relacijom.

(3) Veličine koje su relacije mogu biti simetrične ili asimetrične relacije. U prvom slučaju, ako je *a* termin polja jedne od njih, drugi termini različitih polja mogu se uz izvesne uslove[1] poređati u niz, u zavisnosti od toga da li su njihove relacije prema *a* veće ili manje. Uređenje može biti različito kada izaberemo neki termin drugačiji od *a*; za sada ćemo pretpostaviti da je *a* izabrano jednom zauvek. Kada su termini poređani u niz, može se dogoditi da neka ili sva mesta u nizu zauzima više nego jedan termin, ali u svakom slučaju skup termina između *a* i nekog drugog termina *m* je određen i daje prostiranje sa dva smera. Onda možemo kombinovati veličinu relacije *a* prema *m* sa jednim ili drugim od ovih smerova i tako dobiti asimetričnu relaciju *a* prema *m* koja će slično prvobitnoj relaciji imati veličinu. Tako se ovaj slučaj simetričnih relacija može svesti na slučaj asimetričnih relacija. Asimetrične relacije vode znacima i sabiranju i oduzimanju na potpuno isti način kao prostiranja sa smerom, pri čemu je jedina razlika u tome da su sada sabiranje i oduzimanje one vrste koje smo u Trećem delu nazvali relacionim. Tako je u slučaju veličina koje imaju znak razlika između dva smera asimetrične relacije izvor razlike u pogledu znaka.

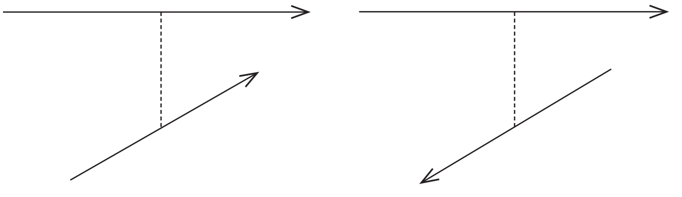
Slučaj koji smo razmatrali u vezi sa prostiranjima je od fundamentalnog značaja u geometriji. Tu imamo veličinu bez znaka,

---

[1] Cf. §245.

asimetričnu relaciju bez veličine i neku blisku vezu između ta dva. Kombinacija ta dva daje veličinu koja ima znak. Sve geometrijske veličine koje imaju znak nastaju na ovaj način. Ali, postoji jedna neobična komplikacija u slučaju zapremine. Zapremine su pre svega kvantiteti bez znaka, ali u analitičkoj geometriji se uvek javljaju ili kao pozitivne ili negativne. Tu se asimetrične relacije (kojih ima dve) javljaju kao termini između kojih postoji simetrična relacija koja ipak ima suprotnost slične vrste konversu asimetrične relacije. Ova relacija kao izuzetak ovde mora ukratko da se razmotri.

222. Prava u deskriptivnoj geometriji je serijalna relacija pomoću koje tačke prave formiraju niz[1]. Svaki od smerova prave linije deskriptivne geometrije može se nazvati zrakom, pri čemu je smer označen strelicom. Svaka dva nekoplanarna zraka stoje u jednoj ili drugoj od dve relacije koje možemo nazvati relcijom desnorukosti (*right-handedness*) i relacijom levorukosti (*left-handedness*)[2].



Ova relacija je simetrična, ali nije tranzitivna, i predstavlja suštinu uobičajene razlike desno i levo. Vertikala nagore stoji prema liniji koja je usmerena od severa prema istoku u relaciji čiji se smer određuje pravilom desne ruke (*right-handed*), a prema liniji koja je usmerena od juga prema istoku stoji u relaciji čiji se smer određuje pravilom leve ruke (*left-handed*). Ali, iako je ova relacija simetrična, ona se menja u suprotnu relaciju promenom bilo kog od termina te

[1] Vidi Šesti deo.

[2] Ova dva slučaja su predstavljena na slici. Razlika je ista kao ona između dve vrste koordinarinih osa.

relacije u njegov konvers. To znači da ako označimo relaciju desnorukosti sa R, a levorukosti sa L (što nije $\breve{R}$), i ako su A i B dva zraka koja stoje u relaciji uzajamne desnorukosti, onda imamo

$$ARB,\ \breve{A}L B,\ AL\breve{B},\ \breve{A}R\breve{B},\ BRA,\ \breve{B}LA,\ BL\breve{A},\ \breve{B}R\breve{A}.$$

To znači da svaki par nekoplanarnih pravih daje osam takvih relacija, od kojih su četiri relacije desnorukosti, a četiri relacije levorukosti. Iako razlika između L i R nije, onako kako stoji, razlika u pogledu smera, ona ipak predstavlja razliku pozitivnog i negativnog i to je razlog zašto zapremina tetraedra, određena determinantama, uvek ima znak. Ali, ne postoji nikakva teškoća ako sledimo običnog čoveka u svođenju desnog i levog na asimetrične relacije. Običan čovek uzima jedan od zrakova (recimo A) kao fiksiran – kada je trezven uzima da je A vertikala nagore a onda desno i levo vidi kao svojstva pojedinačnog zraka B ili, što se svodi na isto, kao relacije neke dve tačke koje određuju B. Na ovaj način desno i levo postaju asimetrične relacije koje čak imaju i ograničen stepen tranzitivnosti one vrste koju smo objasnili u petom načinu generisanja nizova (u Glavi XXIV). Treba primetiti da ono što je fiksirano mora biti zrak a ne puka prava linija. Na primer, dve ravni koje nisu uzajamno upravne nisu jedna desno a druga levo s obzirom na njihove linije koje se seku, već samo s obzirom na jedan od zrakova koji pripada ovoj liniji[1]. Ali, kada se ovo ima u vidu i kada ne razmatramo poluravni već cele ravni pomoću zraka o kojem je reč, desno i levo postaju asimetrične i jedna drugoj konverzne relacije. Stoga ovi znaci koji su povezani sa desno i levo, slično svim drugim znacima, zavise od asimetričnosti relacija. Prema tome, ovaj zaključak se sada može priznati kao opštevažeći.

223. Razlika u pogledu smera je naravno opštija od razlike u pogledu znaka, pošto postoji i u slučajevima kojima matematika (barem za sada) ne može da se bavi. Izgleda da je razlika u pogledu

---

[1] Ovo zahteva da prelaz od jedne ravni ka drugoj može da se načini preko jednog od oštrih uglova koji je dobijen njihovim presekom.

znaka jedva primenljiva na relacije koje nisu tranzitivne ili koje nisu blisko povezane sa nekom tranzitivnom relacijom. Na primer, bilo bi apsurdno smatrati relaciju jednog događaja prema vremenu u kom se zbiva ili kvantiteta prema njegovoj veličini nečim što instancira razliku u pogledu znaka. Ove relacije profesor Šreder naziva *erschöpft*[1], to jest ako važe između *a* i *b* i ako nikada ne mogu da važe između *b* i nekog trećeg termina. Matematički rečeno, njihov kvadrat je nula. Ove relacije stoga ne proizvode razlike u pogledu znaka.

Kao što nas je prethodno objašnjenje navelo da poverujemo, sve veličine sa znakom su ili relacije ili složeni pojmovi u koje su relacije uključene. Ali, šta možemo reći o običnim primerima suprotnosti: dobro i zlo, zadovoljstvo i bol, lepota i ružnoća, želja i odbojnost? Poslednji par je veoma složen i ako bih pokušao da ga analiziram trebalo bi da izložim neka univerzalno osuđena mišljenja. A što se drugih tiče, čini mi se da imaju suprotnost koja se veoma razlikuje od suprotnosti dve uzajamno konverzne asimetrične relacije, a koja je pre analogna suprotnosti crvenog i plavog ili dveju različitih veličina iste vrste. Od ovih suprotnosti koje su konstituisane onim što se može nazvati sintetičkom inkompatibilnošću[2] gore pomenute suprotnosti se razlikuju samo po tome što postoje samo dva inkompatibilna termina umesto celog niza. Inkompatibilnost se sastoji u tome što dva termina koja su tako inkompatibilna ne mogu da koegzistiraju na istom prostorno-vremenskom mestu ili ne mogu da budu predikati jedne iste stvari ili, opštije, ne mogu da oba budu delovi iskaza izvesne forme koji bi se razlikovali samo po tome što jedan sadrži jednu od inkompatibilnosti a drugi drugu. Ova vrsta inkompatibilnosti (koja obično pripada, s obzirom na neku klasu iskaza, teminima

---

[1] *Algebra der Logik*, Vol. III, str. 328. Profesor Pers naziva takve relacije *ne-ponavljajućim* (navedeno u Schröder, *ib.*).

[2] Vidi *The Philosophy of Leibniz* od autora ovog dela (Cambridge, 1900), str. 19 i 20.

datog niza) je veoma značajan pojam u opštoj logici, ali nikako ne sme biti poistovećen sa razlikom između uzajamno konverznih relacija. Ta razlika je u stvari poseban slučaj takve inkompatibilnosti, ali je poseban slučaj samo u smislu da proizvodi razliku u pogledu znaka. Celokupna razlika u pogledu znaka – da zaključimo naš argument – primarno je izvedena iz tranzitivnih asimetričnih relacija od kojih može da se proširi korelacijom sa terminima koji su na različite načine povezani sa takvim relacijama[1]; ali, ova proširenja su uvek sekundarna u odnosu na prvobitnu suprotnost koja je izvedena iz razlike u pogledu smera.

[1] Tako, na primer, u matematičkoj ekonomiji zadovoljstvo i bol se mogu uzeti kao pozitivni i negativni bez logičke greške posredstvom teorije (čiju psihološku tačnost ne moramo ispitivati), prema kojoj čovek može biti plaćen da podnosi bol i može platiti da dobije zadovoljstvo. Suprotnost zadovoljstva i bola je tako u korelaciji s novcem koji je dat ili primljen, a što predstavlja suprotnost pozitivnog i negativnog u smislu elementarne aritmetike.

Glava XXVIII

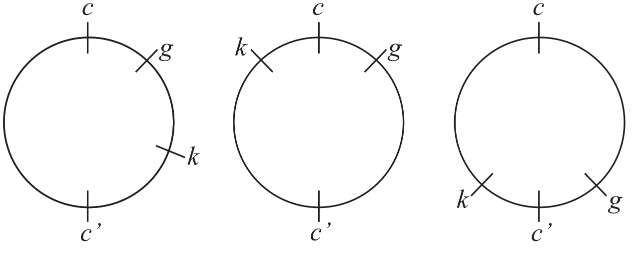
RAZLIKA IZMEĐU OTVORENIH I ZATVORENIH NIZOVA

224. Približavamo se kraju čisto logičke rasprave koja se tiče poretka i možemo neometano da posvetimo pažnju više matematičkim aspektima ove teme. Pošto rešenje najstarijih i respektabilnih protivrečnosti u pojmu beskonačnosti uglavnom zavisi od tačne filozofije poretka, bilo je neophodno da opširno razmotrimo filozofska pitanja – ne toliko zbog toga što *su* relevantna, koliko zbog toga što većina filozofa o njima tako misli. Ali, od toga ćemo imati koristi u ostatku ovog rada.

Pitanje koje treba da razmotrimo u ovoj glavi je sledeće: možemo li nakon svega da razlikujemo otvoren od zatvorenog niza i, ako možemo, u čemu se onda ta razlika sastoji? Videli smo da su matematički posmatrano *svi* nizovi otvoreni u smislu da su svi generisani posredstvom asimetrične tranzitivne relacije. Ali, filozofski gledano, moramo razlikovati različite načine na koje ova relacija može da nastane, a posebno ne smemo da brkamo slučaj u kojem ova relacija ne pretpostavlja pozivanje na druge termine sa slučajem u kojem su takvi termini suštinski. Praktično, jasno je da postoji neka razlika između otvorenog i zatvorenog niza – između, na primer, prave linije i kruga ili pedigrea i društva uzajamnog obožavanja. Ali, tu razliku nije lako precizno izraziti.

225. U slučaju u kojem je broj termina u nizu konačan, a niz generisan na prvi od načina koje smo objasnili u Glavi XXIV, metod dobijanja tranzitivne relacije iz intranzitivne relacije od koje polazimo radikalno se razlikuje u zavisnosti od toga da li je niz otvoren ili zatvoren. Ako je R generišuća relacija, a n broj termina u našem nizu, onda mogu nastati dva slučaja. Označavajući relaciju nekog termina prema samo jednom sledećem sa R^2 i tako dalje za više stepene, relacija R^n može imati samo jednu od dve vrednosti, nulu i identitet. (Pretpostavlja se da je R jedan-jedan relacija). Jer, polazeći od prvog termina, ako takav postoji, R^{n-1} nas vodi poslednjem terminu, a R^n ne daje nov termin i ne postoji instanca relacije R^n. Sa druge strane, može se desiti da nas, polazeći od bilo kog termina, R^n vodi natrag ponovo ka tom terminu. Ove dve alternative su jedine moguće. U prvom slučaju, niz nazivamo otvorenim, a u drugom zatvorenim. U prvom slučaju, niz ima određen početak i kraj, a u drugom slučaju, slično uglovima poligona, niz nema nikakve posebne termine. U prvom slučaju naša tranzitivna asimetrična relacija je disjunktivna relacija „stepen od R nije veći od stepena (n-1)“. Zamenjujući R relacijom koju možemo nazvati R’, naš niz postaje drugi od onih šest tipova. Ali, u drugom slučaju nikakvo ovakvo prosto svođenje na drugi tip nije moguće. Jer, sada se relacija bilo koja dva termina a i m našeg niza može smatrati stepenom od $\breve{R}$ kao i stepenom od R, a pitanje koji od bilo koja tri termina se nalazi između druga dva postaje sasvim proizvoljno. Mogli bismo sada da uvedemo prvu relaciju razdvajanja četiri termina, a onda i rezultirajuću petoterminsku relaciju koja je objašnjena u Glavi XXV. Onda bismo morali da smatramo tri od ovih termina u petoterminskoj relaciji fiksiranim i da uvidimo da je rezultirajuća relacija druga dva termina tranzitivna i asimetrična. Ali, ovde je prvi termin našeg niza potpuno proizvoljan, što prethodno nije bilo slučaj, a generišuća relacija je zapravo relacija pet termina a ne relacija dva termina. Međutim, u slučaju koji razmatramo postoji jednostavniji metod. Možemo ga ilustrovati na sledeći način: u otvorenom nizu, bilo koja dva termina a i m određuju dva smera u kojima se niz može opisati, jedan u kojem je a pre m i drugi u kojem je *m* pre *a*. Onda možemo reći da je za bilo koja druga dva termina *c* i *g*, smer poretka od *c* do *g* isti kao smer poretka od *a* do *m* ili drugačiji, u zavisnosti od slučaja. Na ovaj način, ako smatramo *a* i *m* fiksiranim a *c* i *g* promenljivim, dobijamo tranzitivnu asimetričnu relaciju između *c* i g, dobijenu od tranzitivne simetrične relacije para *c*, *g* prema paru *a*, *m* (ili *m*, *a*, u zavisnosti od slučaja). Ali, ova tranzitivna simetrična relacija može se pomoću principa apstrakcije izanalizirati na posedovanje zajedničkog svojstva koje je u ovom slučaju to da *a*, *m* i *c*, *g* stoje u generišućoj relaciji sa istim smerom. Stoga četvoroterminska relacija u ovom slučaju nije suštinska. Ali, u zatvorenom nizu *a* i *m* ne definišu smer niza čak i kad se tvrdi da *a* prethodi *m*: možemo poći od *a* i stići do *m* u oba smera. Ali, ako uzmemo treći termin *d* i odlučimo da pođemo od *a* i dosegnemo *m* preko *d*, onda je smer niza određen. Prostiranje *adm* uključuje jedan deo niza, ali ne i drugi. Stoga možemo ići od Engleske prema Novom Zelandu ili tako što idemo na istok ili tako što idemo na zapad ali, ako idemo preko Indije, onda moramo da idemo na istok. Ako sada uzmemo neki drugi termin, recimo *k*, on će imati neki određen položaj u nizu koji počinje sa *a* i dostiže *m* preko *d*. U ovom nizu *k* će biti ili između *a* i *d*, ili između *d* i *m*, ili posle *m*. Stoga u ovom slučaju troterminska relacija *a*, *d*, *m* izgleda dovoljna za generisanje potpuno određenog niza. Vailatijeva petoterminska relacija će se onda sastojati u tome što je u pogledu poretka *adm* termin *k* ili pre (ili posle) nekog drugog termina *l* ove kolekcije. Ali, nije neophodno da se pozivamo na ovu relaciju u datom slučaju pošto je troterminska relacija dovoljna. Ova troterminska relacija se može formalno definisati na sledeći način. Između bilo koja dva termina naše kolekcije postoji relacija koja predstavlja stepen od *R* koji je za jedan manji od stepena *n*. Neka relacija između *a* i *d* bude R^x a relacija između *a* i *m* R^y. Ako je *x* manje od *y*, onda pripisujemo jedan smer *adm*, a ako je *x* veće od *y*, onda mu pripisujemo drugi. Između *a* i *d* će takođe postojati i relacija $\breve{R}^{n-x}$ a između *a* i *m* relacija $\breve{R}^{n-y}$. Ako je *x* manje od *y*, onda je *n-x* veće od *n-y*, a stoga asimetričnost ova dva slučaja odgovara asimetričnosti *R* i $\breve{R}$. Termini ovog niza su prosto uređeni korelacijom sa njihovim brojevima *x* i *y* tako što oni sa manjim brojevima prethode onima sa većim brojevima. Stoga ovde nema potrebe za petoterminskom relacijom pošto je sve postignuto troterminskom relacijom, koja je i sama svedena na asimetričnu tranzitivnu relaciju dva broja. Ali, zatvoreni niz se i dalje razlikuje od otvorenog niza tako što je njegov prvi termin proizvoljan.

226. Vrlo slična razmatranja se primenjuju i u slučaju u kojem je naš niz generisan relacijama tri termina. Da bismo zadržali analogiju sa jedan-jedan relacijom iz poslednjeg slučaja, načinićemo sledeće pretpostavke. Neka je *B* ovde relacija jednog termina prema druga dva i neka se ovaj jedan termin nazove srednjim a druga dva krajnjim. Neka je srednji termin jedinstveno određen kada su dati krajnji termini i neka je jedan od krajnjih termina jedinstveno određen srednjim i drugim krajnjim terminom. Nadalje, neka se svaki termin koji se javlja kao srednji javlja i kao krajnji, a neka se svaki termin koji se javlja kao krajnji (sa najviše dva izuzetka) javlja i kao srednji. Na kraju, ako postoji relacija u kojoj je *c* srednji termin a *b* i *d* krajnji termini, neka uvek postoji (izuzev kada ja *b* ili *d* jedan od dva moguća izuzetka) relacija u kojoj je *b* srednji termin a *c* jedan od krajnjih termina, i druga relacija u kojoj je *d* srednji termin a *c* jedan od krajnjih termina. Onda će se *b* i *c* javljati zajedno samo u dve relacije. To konstituiše relaciju između *b* i *c* i samo jedan drugi termin osim *b* će stajati u ovoj novoj relaciji prema *c*. Ako postoje dva termina koji predstavljaju izuzetke ili, budući da je naša kolekcija beskonačna, samo jedan izuzetak, onda pomoću ove relacije možemo da konstruišemo otvoreni niz. Ako je naša dvoterminska relacija asimetrična ovo je dovoljno očigledno; ali, isti rezultat može da se dokaže i ako je naša dvoterminska relacija simetrična. Jer, tada će na bilo kom od dva kraja, recimo *a*, postojati asimetrična relacija od *a* prema samo jednom terminu koji je srednji između *a* i nekog drugog termina. Umnožena *n*-tim stepenom naše dvoterminske relacije, gde je *n*+1 neki ceo broj manji od broja termina u našoj kolekciji, ova relacija će dati relaciju koja stoji između *a* i broja (ne većeg od *n*+1) termina naše kolekcije od kojih je jedan i samo jedan takav da nijedan broj manji od n ne daje relaciju od a prema ovom terminu. Tako dobijamo korelaciju naših termina sa prirodnim brojevima koja generiše otvoreni niz kojem je a jedan od krajeva. Ako sa druge strane naša kolekcija nema termine koji predstavljaju izuzetke već je konačna, onda ćemo dobiti zatvoreni niz. Neka naša dvoterminska relacija bude B i pretpostavimo najpre da je simetrična. (Ona će biti simetrična ako je naša početna troterminska relacija bila simetrična u odnosu na krajnje termine). Tada će svaki termin c naše kolekcije stajati u relaciji P prema druga dva termina koji će jedan prema drugom stajati u relaciji P^2. Od svih relacija oblika P^m koje važe između dva data termina, postojaće jedna u kojoj je m najmanji stepen: ovo se može nazvati glavnom relacijom naša dva termina. Neka broj termina ove kolekcije bude n. Tada će svaki termin naše kolekcije stajati prema svakom drugom terminu u glavnoj relaciji P^x gde je x neki ceo broj ne veći od $n/2$. Neka su data bilo koja dva termina c i g ove kolekcije pod uslovom da nije $cP^{n/2}g$ (slučaj koji neće nastati ako je n neparno) a da je cP^xg gde je x manje od $n/2$. Ova pretpostavka definiše smer ovog niza što se može pokazati na sledeći način. Ako je cP^yk gde je y takođe manje od $n/2$, onda mogu nastati tri slučaja pretpostavljajući da je y veće od x. Može biti $gP^{y-x}k$ ili, ako je $x+y$ manje od $n/2$, može biti $gP^{x+y}k$ ili, ako je $x+y$ veće od $n/2$, može biti $gP^{n/2-x-y}k$. (Uvek biramo glavnu relaciju). Ova tri slučaja se mogu ilustrovati sledećom slikom.



U ova tri slučaja reći ćemo da u pogledu smera cg (1) k dolazi posle c i g, (2) i (3) k dolazi pre c i g. Ako je y manje od x i ako $kP^{x-y}g$, reći ćemo da je k između c i g u smeru cg. Ako je n neparno, ovo pokriva sve moguće slučajeve. Ali, ako je n parno, onda moramo razmotriti termin c' koji je takav da $cP^{n/2}c'$. Ovaj termin je, u izvesnom smislu, antipod od c; možemo ga definisati kao prvi termin u nizu ako prihvatamo gorenavedeni metod definisanja. Ako je n neparno, prvi termin će onda biti termin klase (3) za koji je $cP^{(n-1)/2}k$. Na taj način ovaj niz stiče određeni poredak i to takav u kome je, kao u slučaju svih zatovrenih nizova, prvi termin proizvoljan.

227. Preostaje samo slučaj u kojem polazimo od četvoroterminskih relacija i od generišuće relacije koja, strogo govoreći, ima pet termina. Ovo je slučaj u projektivnoj geometriji. Ovde je niz nužno zatvoren; to znači da prilikom odabira naša tri fiksirana termina za petoterminsku relaciju nikada ne postoji bilo kakvo ograničenje našeg izbora i bilo koji od ova tri termina se može odrediti kao prvi.

228. Dakle, rezimirajmo: svaki niz koji je generisan posredstvom tranzitivne asimetrične relacije između neka dva termina niza predstavlja otvoren niz ili kada nema početak ili kada početak nije proizvoljan; a zatvoren je kada ima proizvoljan početak. Sada, ako je R konstitutivna relacija, početak niza je termin za koji važi relacija R, ali ne i relacija $\breve{R}$. R je uvek prava dvoterminska relacija čiji početak, ako postoji, mora biti potpuno određen. Početak može biti proizvoljan samo kada R uključuje neki drugi termin (koji možemo smatrati fiksiranim) pored ona dva termina u pogledu kojih je tranzitivna i asimetrična (koji se moraju smatrati promenljivim). Stoga, u svakom slučaju zatvorenog niza, iako tu može da postoji asimetrična jedan-jedan relacija ako je niz diskretan, *tranzitivna* asimetrična relacija mora biti relacija koja uključuje jedan ili više fiksiranih termina, pored dva promenljiva termina s obzirom na koje ona generiše niz. Tako, mada matematički posmatrano svaki zatvoren niz može da postane otvoren a svaki otvoren da postane zatvoren, u pogledu prirode generišuće relacije ipak postoji stvarna razlika između njih – razlika koja je više filozofski nego matematički značajna.

Glava XXIX

PROGRESIJE I ORDINALNI BROJEVI

229. Sada je vreme da razmotrimo najjednostavniji tip beskonačnog niza, naime, onaj kome pripadaju sami prirodni brojevi. Odložiću za sledeći deo navodne teškoće koje nastaju iz beskonačnosti ovih nizova, a ovde ću se posvetiti samo izlaganju elementarne teorije o takvim nizovima u obliku koji ne pretpostavlja brojeve[1].

Nizovi koje ćemo razmatrati su oni koji mogu da se koreliraju, termin po termin, sa prirodnim brojevima, bez potrebe za ikakvom promenom u poretku termina. Ali, pošto su prirodni brojevi poseban slučaj ovakvih nizova i pošto celokupna geometrija i analiza mogu da se razviju na osnovu bilo kojeg ovakvog niza bez pozivanja na brojeve, bolje je dati definiciju progresija koja se ne poziva na brojeve.

Progresija je diskretan niz koji ima uzastopne termine i koji ima početak ali ne i kraj i koji je takođe *povezan.* Značenje povezanosti objašnjeno je u Glavi XXIV pomoću brojeva, ali to objašnjeneje ne može ovde da se da. Popularno govoreći, kada niz nije povezan, on se raspada na dva ili više delova od kojih je svaki niz za sebe. Tako

[1] Ova glava strogo prati Peanovu aritmetiku. Vidi *Formulaire de Mathématiques*, Vol. II, §2. Matematički tretman ove teme sam izložio u *RdM*, Vol. VII i Vol. VIII. Sama tema prevashodno potiče od Dedekinda i Georga Kantora.

brojevi i trenuci zajedno formiraju niz koji nije povezan kao i dve paralelne prave linije. Kad god je niz prvobitno dat pomoću tranzitivne asimetrične relacije, možemo izraziti povezanost uslovom da bilo koja dva termina našeg niza treba da budu obuhvaćena generišućom relacijom. Ali, progresije su nizovi takve vrste koji mogu biti generisani na prvi od naših šest načina, naime, posredstvom asimetrične jedan-jedan relacije. Da bismo sa ovoga prešli na tranzitivnu relaciju prethodno smo koristili brojeve, definišući tranzitivnu relaciju kao bilo koji stepen od jedan-jedan relacije. Ova definicija sada neće biti od koristi pošto moramo da isključimo brojeve. Jedan od trijumfa moderne matematike predstavlja prilagođavanje starih principa potrebama ovog slučaja.

Definicija za kojom tragamo može da se dobije pomoću matematičke indukcije. Ovaj princip, koji je smatran pukim trikom za dobijanje rezultata za koje nijedan drugi dokaz nije bio na vidiku, postepeno je dobijao na značaju tokom detaljnijeg ispitivanja osnova matematike. Matematička indukcija se danas smatra principom od kojeg zavise komutativni zakon i jedan oblik distributivnog zakona[1] u pogledu rednih, to jest ordinalnih brojeva. Ovaj princip koji najviše proširuje konačno predstavlja karakteristično obeležje progresija. Ovo se može izraziti na sledeći način:

Neka je data bilo koja klasa termina *s* kojoj pripada prvi termin bilo koje progresije i kojoj pripada termin progresije koji neposredno sledi za bilo kojim terminom progresije kojoj pripada *s*, onda svaki termin ove progresije pripada *s*.

Isti princip možemo da izrazimo i u drugačijem obliku. Neka je $\phi(x)$ jedna iskazna funkcija koja predstavlja određeni iskaz čim je dato x. Onda je $\phi(x)$ funkcija od x i, uopšte uzev, biće istinita ili lažna u zavisnosti od vrednosti x. Ako je x član jedne progresije, neka *seq* x označava termin koji neposredno sledi x. Neka je $\phi(x)$ istinito kada

---

[1] Naime, $(\alpha+\beta)\gamma = \alpha\beta + \alpha\gamma$. Drugi oblik, $\alpha(+\gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$, važi takođe i za beskonačne redne brojeve i stoga je nezavisan od matematičke indukcije.

je x prvi termin izvesne progresije i neka je $\phi(seq\ x)$ istinito uvek kada je $\phi(x)$ istinito, pri čemu je x bilo koji termin te progresije. Onda, po principu matematičke indukcije, sledi da je $\phi(x)$ uvek istinito ako je x bilo koji termin progresije o kojoj je reč.

Potpuna definicija progresije je sledeća. Neka je R neka asimetrična jedan-jedan relacija a u klasa takva da svaki termin od u stoji u relaciji R prema nekom terminu koji takođe pripada klasi u. Neka postoji barem jedan termin klase u koji ne stoji u relaciji $\breve{R}$ prema bilo kom terminu klase u. Neka je s bilo koja klasa kojoj pripada barem jedan od termin klase u koji ne stoji u relaciju $\breve{R}$ prema bilo kom terminu klase u, i kojoj takođe pripada svaki termin klase u koji stoji u relaciji $\breve{R}$ prema nekom terminu koji pripada i klasi u i klasi s, i neka je u takva klasa koja je cela sadržana u bilo kojoj klasi s koja zadovoljava prethodne uslove. Onda je klasa u, kada se posmatra kao uređena relacijom R, progresija[1].

230. Pomoću ovakvih progresija se može dokazati sve što je relevantno za konačnu aritmetiku. Na prvom mestu pokazujemo da može da postoji samo jedan termin klase u koji ne stoji u relaciji $\breve{R}$ prema nekom terminu klase u. Potom definišemo termin prema kojem x stoji u relaciju R kao sledbenik od x (pri čemu je x član klase u) što možemo da napišemo kao *seq* x. Lako dolazimo do definicija i osobina sabiranja, oduzimanja, množenja, deljenja, pozitivnih i negativnih termina i racionalnih razlomaka, a lako je pokazati da između bilo koja dva racionalna razlomka uvek postoji treći. Odavde je lako napredovati do iracionalnih i realnih brojeva[2].

Osim principa matematičke indukcije, ono što je naročito interesantno u vezi sa ovim procesom jeste da on pokazuje da se samo

---

[1] Trebalo bi primetiti da diskretan otvoren niz generisan posredstvom tranzitivne relacije uvek može biti sveden, kao što smo videli u prethodnoj glavi, na relaciju koja je generisana posredstvom asimetrične jedan-jedan relacije, pod jedinim uslovom da je niz ili konačan ili progresija.

[2] Vidi moj članak o logici relacija, RdM, VII.

serijalne i ordinalne osobine konačnih brojeva koriste u običnoj matematici, dok je ono što se može nazvati logičkim svojstvima sasvim irelevantno. Pod logičkim svojstvima brojeva podrazumevam njihovu definiciju pomoću čisto logičkih ideja. Ovaj proces koji smo objasnili u Drugom delu ovde možemo ukratko da rekapituliramo. Pre svega pokazujemo da se jedan-jedan korelacija može ostvariti između bilo koje dve nulte klase ili između bilo koje dve klase *u* i *v* koje su takve da, ako je *x* neko *u*, a *x*' se razlikuje od *x*, onda *x*' ne može biti neko *u*, a sličan uslov važi i za *v*. Mogućnost ovakve jedan-jedan korelacije nazivamo sličnošću ove dve klase *u* i *v*. Pošto je sličnost simetrična i tranzitivna relacija, onda mora biti analizabilna (posredstvom principa apstrakcije) na posedovanje jednog zajedničkog svojstva. To svojstvo definišemo kao *broj* i jedne i druge klase. Kada dve klase *u* i *v* imaju gore definisano svojstvo, kažemo da je njihov broj *jedan* itd. za veće brojeve, pri čemu opšta definicija konačnih brojeva zahteva matematičku indukciju ili ne-sličnost celine i dela, ali je uvek data u čisto logičkim terminima.

Tako definisani brojevi su oni koji se upotrebljavaju u svakodnevnom životu i oni su bitni za bilo koje tvrđenje o brojevima. Činjenica da brojevi imaju ova logička svojstva je ono što ih čini značajnim. Ali, ova svojstva nisu ona koja primenjuje obična matematika, a brojevi bi mogli biti lišeni tih svojstava bez veće štete po istinitost aritmetike i analize. Ono što je za matematiku bitno jeste jedino činjenica da konačni brojevi formiraju progresiju. Ovo je razlog zašto su matematičari – na primer, Helmholc, Dedekind i Kroneker – tvrdili da ordinalni brojevi prethode kardinalnim brojevima, zato što su jedino ordinalna svojstva brojeva ono što je relevantno. Ali, izgleda da zaključak da ordinalni brojevi prethode kardinalnim proizlazi iz jedne zbrke. Ordinali i kardinali jednako formiraju progresiju i imaju tačno ista ordinalna svojstva. Cela aritmetika može da se dokaže za bilo koje od njih bez ikakvog pozivanja na one druge pri čemu iskazi ostaju isti u pogledu simbola, ali različiti po značenju. Da bi se dokazalo da ordinalni brojevi prethode kardinalnim, bilo bi neophodno pokazati da kardinalni brojevi mogu da se definišu samo preko ordinalnih. Ali, ovo je lažno zato što je logička definicija kardinalnih brojeva potpuno nezavisna od ordinalnih brojeva[1]. Izgleda da ovde u stvari nema šta da se bira u pogledu logičkog prioriteta između ordinalnih i kardinalnih brojeva, izuzev da je postojanje ordinalnih brojeva izvedeno iz niza kardinalnih brojeva. Kao što ćemo videti u sledećem paragrafu, ordinalni brojevi mogu da se definišu bez bilo kakvog pozivanja na kardinalne brojeve ali, kada su definisani, onda se vidi da impliciraju kardinalne brojeve. Slično tome, kardinali mogu da se definišu bez bilo kakvog pozivanja na ordinale, ali oni suštinski formiraju progresiju, a sve progresije, kao što ćemo sada pokazati, nužno impliciraju ordinale.

231. Ispravna analiza ordinala do sada nije mogla da se sprovede zbog preovlađujuće predrasude protiv relacija. Ljudi su o nizu govorili kao da se sastoji od izvesnih termina *uzetih* u izvesnom poretku, a u ovoj ideji postoji jedan zajednički psihološki element. Nezavisno od psiholoških razmatranja, svi skupovi termina mogu da se urede na sve načine na koje se uopšte mogu urediti, što znači da postoje serijalne relacije čija su polja dati skup termina i koje uređuju ove termine u bilo koji mogući poredak. U nekim slučajevima jedna ili više serijalnih relacija se naročito ističe ili u pogledu njene jednostavnosti ili u pogledu njenog značaja. Tako, red veličina među brojevima ili pre i posle među trenucima izgleda kao izrazito *prirodni* poredak, a svaki drugi izgleda kao veštački, uveden našim proizvoljnim izborom. Ali, to je naprosto čista greška. Čak ni sama svemoć ne može da dâ terminima poredak u kome već nisu, a sve što je tu psihološko je *razmatranje* takvog i takvog poretka. Tako, kada se kaže da možemo po želji da uredimo skup termina u bilo koji poredak, ono što se time stvarno misli jeste da možemo da razmatramo bilo koju od serijalnih relacija čije je polje dati skup termina i da će te serijalne

[1] Profesor Peano, koji je neobično imun na greške, prepoznao je ovu činjenicu. Vidi *Formulaire*, 1898, 210, napomena (str. 39).

relacije među sobom dati sve kombinacije pre i posle koje su kompatibilne sa tranzitivnošću i povezanošću. Odatle proizlazi da poredak u strogom smislu nije svojstvo datog skupa termina već serijalne relacije čije je polje taj dati skup. Kada je data relacija, dato je i njeno polje, ali kada je dato polje ni na koji način nije data relacija. Pojam skupa termina u datom poretku je pojam skupa termina kao polja date serijalne relacije, ali razmatranje ovih termina je suvišno, a razmatranje same relacije je dovoljno.

Stoga ordinalni broj možemo da smatramo zajedničkim svojstvom skupa serijalnih relacija koje generišu nizove sa sličnim poretkom. Takve relacije imaju svojstvo koje nazivam sličnošću, to jest ako su P i Q dve takve relacije, njihova polja mogu da se koreliraju termin po termin tako da dva termina od kojih će prvi da stoji prema drugom u relaciji P uvek biti koreliran sa dva termina od kojih prvi stoji prema drugom u relaciji Q i obratno. Kao i u slučaju kardinalnih brojeva[1] tako i ovde možemo na osnovu principa apstrakcije da definišemo ordinalni broj date konačne serijalne relacije kao klasu sličnih relacija. Lako je pokazati da su sve generišuće relacije progresija slične; klasa takvih relacija biće ordinalni broj konačnih celih brojeva poređanih po veličini. Kada je klasa konačna, svi nizovi koji mogu da se formiraju od njenih termina su slični u pogledu poretka, a razlikuju se u pogledu poretka od nizova koji imaju različit kardinalni broj termina. Dakle, postoji jedan-jedan korelacija konačnih ordinala i kardinala za koju, kao što ćemo videti u Petom delu, ne postoji analogija u pogledu beskonačnih brojeva. Prema tome, možemo da definišemo ordinalni broj n kao klasu serijalnih relacija čiji *domeni* imaju n termina, gde je n konačan kardinal. Nužno je, ukoliko 1 ne treba da bude isključen, govoriti o domenima umesto o poljima zato što nijedna relacija koja implicira različitost ne može da ima jedan termin u svom polju, mada može da nema nijedan. Ovo je u praktičnom pogledu nezgodno zbog toga što $n+1$ mora biti dobijeno

[1] Cf. §111.

dodavanjem *jednog* termina polju; ali, to se tiče konvencije u pogledu notacije i potpuno je lišeno filozofskog značaja.

232. Prethodna definicija ordinalnih brojeva je direktna i jednostavna, ali ne daje pojam „*n*-ti" koji se uobičajeno smatra onim što ordinalni broj jeste. Ovaj pojam je daleko složeniji: termin nije intrinsično *n*-ti i ne postaje *n*-ti pukom specifikacijom *n*-1 drugih termina. Termin je *n*-ti u odnosu na izvesnu serijalnu relaciju kada u odnosu na tu relaciju termin o kojem je reč ima *n*-1 prethodnika. To je definicija *n*-tog koja pokazuje da je to relativan pojam i to ne samo s obzirom na prethodnike, već i s obzirom na neku specifičnu serijalnu relaciju. Različiti konačni ordinalni brojevi mogu da se definišu indukcijom bez pominjanja kardinala. Konačna serijalna relacija je relacija koja nije slična (u prethodnom smislu) nijednoj relaciji koja je implicira a koja joj nije ekvivalentna, a konačan ordinalni broj je onaj koji se sastoji od konačnih serijalnih relacija. Ako je *n* konačni ordinal, *n*+1 je ordinal takav da, ako se poslednji termin[1] niza tipa *n*+1 ukloni, ostatak je, u istom poretku, tipa *n*. Tehnički rečeno, serijalna relacija tipa *n*+1 je relacija koja postaje tipa *n* kada se ograniči na svoj domen umesto na svoje polje. Ovo indukcijom daje definiciju svakog pojedinačnog konačnog ordinala u kojoj se kardinali uopšte ne pominju. Stoga ne možemo reći da ordinali pretpostavljaju kardinale iako su složeniji zato što pretpostavljaju i serijalne i jedan-jedan relacije, dok kardinali pretpostavljaju samo jedan-jedan relacije.

Može se formulisati nekoliko ekvivalentnih definicija ordinalnog broja konačnih ordinala poređanih po veličini. Jedna od najprostijih jeste da ovaj broj pripada bilo kojoj serijalnoj relaciji koja je takva da svaka klasa koja je sadržana u njenom polju i nije nulta klasa ima prvi termin, dok svaki termin tog niza ima neposrednog

[1] Poslednji termin niza (ako postoji) jeste termin koji pripada konverznom domenu, ali ne i domenu generišuće relacije, to jest, to je termin koji dolazi posle ali ne pre drugih termina.

sledbenika, a svaki termin osim prvog ima neposrednog prethodnika. Kardinalni brojevi ni ovde nisu ni na koji način pretpostavljeni.

U toku cele prethodne diskusije pretpostavljali smo da su naše serijalne relacije tranzitivne, a ne jedan-jedan. Jedan-jedan relacije su lako izvodive iz tranzitivnih relacija, dok je obratno izvođenje donekle komplikovano. Pored toga, jedan-jedan relacije su adekvatne samo za definisanje konačnih nizova i stoga njihova upotreba ne može da se proširi na izučavanje beskonačnih nizova, osim ukoliko se ne tretiraju kao izvodive iz tranzitivnih relacija.

233. Ovde bi trebalo reći nekoliko reči o pozitvnim i negativnim ordinalima. Ako je n prvih termina neke progresije uklonjeno (gde je n bilo koji konačan broj), ostatak i dalje formira progresiju. U pogledu nove progresije, negativni ordinali mogu da se pripišu terminima koji su apstrahovani, ali je za tu svrhu pogodno tretirati početak najmanje progresije kao nulti termin. Da bismo imali niz koji daje *bilo koji* pozitivan ili negativan ordinal, potebno nam je ono što se naziva dvostrukom progresijom. To je niz takav da, ako odaberemo bilo koji termin x tog niza, dve progresije polaze od x, jedna koju generiše serijalna relacija R i druga koju generiše relacija $\breve{R}$. Onda ćemo x-u pripisati ordinal 0, a drugim terminima ćemo pripisati pozitivne ili negativne ordinale u zavisnosti od toga da li pripadaju jednoj ili drugoj od dve progresije koje polaze od x. Pozitivni i negativni ordinali sami formiraju jednu takvu dvostruku progresiju. Oni u suštini izražavaju relaciju prema proizvoljno odabranom početku dve progresije, a $+n$ i $-n$ izražavaju uzajamno konverzne relacije. Stoga oni imaju sva svojstva koja smo u Glavi XXVII označili kao ona koja karakterišu termine koji imaju znak.

Glava XXX

DEDEKINDOVA TEORIJA BROJA

234. Teoriju progresija i ordinalnih brojeva kojom smo se bavili u prethodnoj glavi dugujemo pre svega Dedekindu i Kantoru. Nema potrebe da ovde razmatramo Kantorove doprinose koji se specifično tiču beskonačnosti, a odložićemo za kasnije i Dedekindovu teoriju iracionalnih brojeva. Ono što ovde želim da objasnim jeste Dedekindova teorija celih brojeva koja je sadržana u radu *Was sind und was sollen die Zahlen?*[1]. Pri razmatranju ovog spisa neću se strogo držati Dedekindove frazeologije. Izgleda da on u vreme kada je pisao ovaj rad nije bio upoznat sa simboličkom logikom; i premda je smislio mnogo toga što je bilo relevantno za njegove svrhe, prirodno je usvojio fraze koje nisu bile uobičajene i koje nisu uvek podesne koliko i njihovi standardizovani ekvivalenti.

Osnovne ideje spisa o kojem je reč su sledeće[2]: (1) preslikavanje (*Abbildung*) sistema (21); (2) pojam *lanca* (37); (3) lanac jednog elementa (44); (4) uopšteni oblik matematičke indukcije (59); (5)

---

[1] Drugo izdanje, Brunswick, 1893 (prvo izdanje 1887). Glavni sadržaj ove knjige izražen pomoću algebre relacija može se naći u mom članku u RdM, VII, 2, 3.

[2] Brojevi u zagradama ne upućuju na stranice, već na manje pasuse na koje je delo podeljeno.

definicija singularnog beskonačnog sistema (71). Iz ovih pet pojmova Dedekind izvodi brojeve i običnu aritmetiku. Ispitajmo najpre ove pojmove, a potom i izvođenje.

235. (1) *Preslikavanje* klase *u* je bilo koji zakon prema kojem svakom terminu klase *u*, recimo *x*, odgovara jedan i samo jedan termin $\phi(x)$. Pre svega, ništa se ne pretpostavlja u pogledu toga da li $\phi(x)$ pripada klasi *u* ili da li $\phi(x)$ može biti isto kao $\phi(y)$, kada su *x* i *y* različiti termini klase *u*. Stoga ova definicija znači sledeće:

Preslikavanje klase *u* je mnogo-jedan relacija čiji domen sadrži klasu *u* i kojom je svaki od termina koji mogu ali ne moraju da pripadaju klasi *u* koreliran sa svakim terminom klase *u*[1]. *Preslikavanje je slično kada, ako se x* razlikuje od *y* pri čemu oba pripadaju klasi *u*, onda se $\phi(x)$ razlikuje od $\phi(y)$, to jest kada je relacija o kojoj je reč jedan-jedan relacija. On pokazuje da je sličnost između klasa refleksivna, simetrična i tranzitivna i primećuje (34) da klase mogu biti klasifikovane na osnovu sličnosti datoj klasi – nagoveštaj ideje koja je u Kantorovom delu fundamentalna.

236. (2) Ako postoji relacija, bilo jedan-jedan, bilo mnogo-jedan, koja korelira sa klasom *u* samo termine koji pripadaju toj klasi, onda se za ovu relaciju kaže da konstituiše preslikavanje klase *u* u sebe samu (36) i s obzirom na ovu relaciju klasa *u* se naziva lancem (37). Drugim rečima, svaka klasa *u* je, s obzirom na relaciju mnogo-jedan, jedan lanac ako je klasa *u* sadržana u domenu te relacije, a korelacija klase *u* uvek samo *u*. Kolekcija korelata klase naziva se slikom (*Bild*) te klase. Stoga lanac predstavlja klasu čija je slika deo ili celina njega samog. Neće biti suvišno da za matematički neupućene čitaoce primetimo da lanac s obzirom na relaciju jedan-jedan i pod uslovom da ima bilo koji termin koji ne pripada slici lanca ne može da bude

---

[1] Mnogo-jedan relacija je relacija u kojoj je, kao i u relaciji kvantiteta prema veličini, termin zdesna *prema* kojem je relacija jedinstveno određena dat termin na levoj strani. Ostaje neodlučeno da li i obrnuto važi. Stoga je jedan-jedan relacija poseban slučaj mnogo-jedan relacije.

konačan zato što takav lanac mora da sadrži isti broj termina kao i pravi deo njega samog [1].

237. (3) Ako je *a* bilo koji termin ili kolekcija termina, onda s obzirom na datu relaciju mnogo-jedan može da postoji mnogo lanaca u kojima je *a* sadržan. Zajednički deo svih ovih lanaca koji je označen sa a_0 je ono što Dedekind naziva *lancem od a* (44). Na primer, ako je *a* broj *n* ili bilo koji skup brojeva od kojih je *n* najmanji, lanac od *a* će s obzirom na relaciju „manje od 1" činiti svi brojevi koji nisu manji od *n*.

238. (4) Dedekind zatim prelazi (59) na teoremu koja predstavlja uopšteni oblik matematičke indukcije. Neka je *a* bilo koji termin ili skup termina sadržanih u klasi *s*, i neka je slika zajedničkog dela od *s* i lanca od *a* takođe sadržana u *s*; onda sledi da je lanac od *a* sadržan u *s*. Ova pomalo komplikovana teorema može postati jasnija ako se izrazi drugačijim jezikom. Nazovimo relaciju kojom je lanac generisan (ili bolje, konvers ove relacije) sledovanje tako da korelacija ili slika termina bude njegov sledbenik. Neka je *a* termin koji ima sledbenika ili kolekcija takvih termina. Lanac će, uopšte uzev (s obzirom na sledovanje) biti svaki skup temina takvih da sledbenik svakog od njih takođe pripada tom skupu. Lanac od *a* će biti zajednički deo svih lanaca koji sadrže *a*. Tada nam teorema kaže da je *a* sadržano u *s* i, ako je neki termin lanca od *a* neko *s*, onda je to i sledbenik od *a* ; zaključak je da je svaki termin u lancu od *a* neko *s*. Očigledno je da je ova teorema veoma slična matematičkoj indukciji od koje se prvo razlikuje po tome što *a* ne mora da bude pojedinačan termin, i drugo, po tome što konstitutivna relacija ne mora da bude jedan-jedan već može da bude i mnogo-jedan. Izvanredno je to što su Dedekindove prethodne pretpostavke dovoljne za dokazivanje ove teoreme.

239. (5) Sada prelazim na definiciju pojedinačno beskonačnog sistema ili klase (71). On se definiše kao klasa koja može da se

---

[1] *Pravi deo* (*echter Theil*) je izraz analogan „pravom razlomku" i označava deo a ne celinu.

preslika u sebe samu pomoću relacije jedan-jedan i koja je osim toga i lanac – s obzirom na tu jedan-jedan relaciju – od pojedinačnog termina te klase koji nije sadržan u slici te klase. Ako ovu klasu nazovemo klasom *N*, a relaciju jedan-jedan relacijom *R*, onda kao što Dedekind primećuje možemo da razlikujemo četiri elementa ove definicije. (1) Slika od *N* je sadržna u *N*, što znači da je svaki termin prema kojem neko *N* stoji u relaciji *R* i sâm neko *N*. (2) *N* je lanac jednog od svojih termina. (3) Taj jedan termin je takav da nijedno *N* ne stoji u relaciji *R* prema njemu, to jest on nije slika bilo kog drugog termina od *N*. (4) Relacija *R* je jedan-jedan, drugim rečima, preslikavanje je slično. Dedekind definiše apstraktan sistem koji je naprosto određen posedovanjem ovih svojstava kao ordinalne brojeve (73). Očigledno je da je njegov pojedinačno beskonačan sistem isti kao ono što smo nazvali *progresijom*, i on nastavlja da izvodi različita svojstva progresija, a naročito matematičke indukcije (80) koje slede iz njenog gorenavedenog opšteg oblika. Za broj *m* se kaže da je manji od nekog drugog broja *n* kada je lanac od *n* sadržan u slici lanca od *m* (89); i pokazano je (88, 90) da od dva različita broja jedan mora da bude manji. Sve ostalo odavde jednostavno sledi.

240. Jedina stvar koja izgleda značajna za našu sadašnju svrhu jeste definicija kardinala. Pokazano je (132) da su svi pojedinačno beskonačni sistemi slični jedan drugom i ordinalima, kao i da je, obrnuto (133), bilo koji sistem koji je sličan pojedinačno beskonačnom sistemu takođe pojedinačno beskonačan. Kada je jedan sistem konačan, on je sličan nekom sistemu Z_n gde Z_n označava sve brojeve od 1 do *n* uključujući i 1 i *n* i obratno (160). Postoji samo jedan broj *n* koji ima ovo svojstvo s obzirom na bilo koji dati konačni sistem, i kada se posmatra s obzirom na ovo svojstvo naziva se *kardinalni broj* i kaže se da je broj elemenata od kojih se sistem o kome je reč sastoji (161). Ovde naposletku stižemo do kardinalnih brojeva. Njihova zavisnost od ordinala, ako smem da rizikujem da interpretiram Dedekinda, sastoji se u sledećem: zahvaljujući poretku ordinala, svaki ordinal *n* definiše klasu ordinala Z_n koja se sastoji od svih brojeva koji nisu sledbenici od *n*. Oni se mogu definisati kao svi oni koji nisu sadržani u slici lanca od *n*. Ova klasa ordinala može biti slična nekoj drugoj klasi za koju se onda kaže da ima kardinalni broj *n*. Samo zbog poretka ordinala svaki od njih definiše klasu i stoga je ovaj poredak pretpostavljen u definisanju kardinala.

241. Po mom mišljenju nije neophodno govoriti o vrednostima gorenavedenog izvođenja jer su one opštepoznate. Ali, neki aspekti traže dalje razmatranje. Prvo, Dedekind dokazuje metematičku indukciju dok je Peano smatra aksiomom. To Dedekindu daje očiglednu prednost koju treba ispitati. Drugo, nema razloga da, samo zato što brojevi koje Dedekind dobija *imaju* poredak, smatramo da oni je*su* ordinalni brojevi; i treće, njegova definicija kardinala je nepotrebno komplikovana, a zavisnost kardinala od poretka je samo prividna. Ove aspekte ću redom da razmotrim.

Što se tiče dokaza matematičke indukcije, treba primetiti da se tamo podrazumeva praktično ekvivalentna pretpostavka da brojevi formiraju lanac od jednog od njih. Bilo matematička indukcija, bilo ta pretpostavka, mogu da se izvedu jedna iz druge, a izbor u pogledu toga šta će biti aksiom a šta teorema uglavnom je stvar ukusa. Uzeto u celosti, iako je razmatranje lanaca ingeniozno, ono je donekle teško i ima nedostatak da teoreme koje se tiču konačne klase brojeva ne većih od *n* po pravilu moraju da se izvedu iz odgovarajućih teorema koje se tiču beskonačne klase brojeva većih od *n*. Iz ovih razloga a ne zbog neke logičke superiornosti, izgleda jednostavnije početi od matematičke indukcije, a trebalo bi primetiti da se u Peanovom metodu matematička indukcija zahteva samo kada teoreme moraju da se dokažu za *bilo koji* broj. Elementarna aritmetika našeg detinjstva koja razmatra samo pojedinačne brojeve potpuno je nezavisna od matematičke indukcije, mada bi dokaz da je to slučaj za *svaki* pojedinačan broj zahtevao matematičku indukciju. Sa druge strane, u Dedekindovom metodu, iskazi koji se odnose na posebne brojeve, slično opštim iskazima, zahtevaju razmatranje lanaca. Stoga u Peanovom metodu postoji izrazita prednost koja se sastoji u jednostavnosti kao i u jasnijem razdvajanju pojedinačnih i opštih iskaza aritmetike. Ali, sa čisto logičke tačke gledišta, ova dva metoda izgledaju podjednako zdravo i treba primetiti da sa logičkom teorijom kardinala i Peanovi i Dedekindovi aksiomi postaju dokazivi[1].

242. Druga stvar koju treba razmotriti se tiče izvesnih nedostataka u pogledu jasnoće u onome što kaže Dedekind. Njegove reči su (73): „Ako pri razmatranju pojedinačno beskonačnog sistema N uređenog preslikavanjem ϕ potpuno zanemarimo osobenu prirodu njegovih elemenata, zadržavajući samo mogućnost njihovog razlikovanja i uzimajući u obzir samo relacije u koje su oni stavljeni uređujućim preslikavanjem ϕ, onda se ti elementi nazivaju *prirodni brojevi* ili *ordinalni brojevi* ili jednostavno *brojevi*". Nemoguće je da ovo objašnjenje može biti sasvim ispravno. Jer, ono implicira da su termini svih progresija koji nisu ordinali, kompleksni i da se ordinali koji predstavljaju elemente u svim takvim terminima mogu dobiti apstrahovanjem. Ali, ovo naprosto nije slučaj. Progresija može biti formirana od tačaka ili trenutaka, ili od transfinitnih ordinala, ili od kardinala, u kojima, kao što ćemo uskoro videti, ordinali nisu elementi. Pored toga, nemoguće je da ordinali mogu biti, kao što Dedekind predlaže, ništa drugo do termini relacija koje konstituišu progresiju. Ako uopšte treba da budu nešto, onda treba da budu nešto intrinsično; treba ih razlikovati od drugih entiteta kao što se tačke razlikuju od trenutaka ili boje od zvukova. Ono na šta je Dedekind hteo da ukaže verovatno je bila definicija pomoću principa apstrakcije koju smo pokušali da pružimo u prethodnoj glavi. Ali, tako dobijena definicija uvek ukazuje na neku klasu entiteta koji imaju svoju pravu prirodu i logički ne zavise od načina na koji su definisani. Tako definisani entiteti bi morali da budu vidljivi makar duhovnim

[1] Cf. Glava XIII.

okom; ono što princip tvrdi jeste da pod izvesnim uslovima takvi entiteti postoje, kada bismo samo znali gde da ih tražimo. Ali, da li će oni biti ordinali ili kardinali kada smo ih pronašli, ili čak nešto sasvim različito, to nije nešto što bi trebalo odlučiti na brzu ruku. U svakom slučaju, Dedekind i ne pokazuje šta je to što je zajedničko svim progresijama, niti nam daje bilo koji razlog da pretpostavimo da bi to morali da budu ordinalni brojevi, izuzev što sve progresije podležu istim zakonima kojima podležu i ordinali, a što bi podjednako dokazivalo da je *bilo koja* data progresija ono što je zajedničko svim progresijama.

243. Ovo nas dovodi do treće stvari koju treba razmotriti, a to je definicija kardinala pomoću ordinala. Dedekind u predgovoru (str. ix) primećuje da mnogi neće prepoznati svoje stare prijatelje, prirodne brojeve, u senovitim oblicima u kojima ih on predstavlja. Izgleda mi da su te osobe u tom pogledu u pravu – drugim rečima, i ja sam jedan od njih. Ono što nam Dedekind predstavlja nisu brojevi već bilo koja progresija: ono što on kaže je tačno za sve progresije, a njegovi dokazi – čak ni tamo gde dolazi do kardinala – nikada ne pretpostavljaju neko svojstvo koje razlikuje brojeve od drugih progresija. Nije predočio nijedan dokaz koji bi pokazivao da brojevi imaju prvenstvo nad drugim progresijama. Zapravo, kaže nam se da su brojevi ono što je zajedničko svim progresijama; ali, nije naveden nijedan razlog u prilog tome da progresije imaju bilo šta zajedničko osim svojstava koja su im pripisana u definiciji, a koja sama ne konstituišu novu progresiju. Činjenica je da sve zavisi od jedan-jedan relacija koje je Dedekind upotrebljavao svuda ne primećujući pritom da su one same dovoljne za definiciju kardinala. Relacija sličnosti između klasa koju on svesno upotrebljava u kombinaciji sa principom apstrakcije koji on implicitno pretpostavlja dovoljna je za definiciju kardinala; za definiciju ordinala ovo nije dovoljno; kao što smo videli u prethodnoj glavi, potrebna nam je relacija sličnosti i između dobro uređenih serijalnih relacija. Definicija pojedinačnih konačnih ordinala je ostvarena eksplicitno pomoću odgovarajućih kardinala: ako je *x* konačan kardinalni broj, ordinalni broj *n* je klasa serijalnih relacija koje imaju *n* termina u svom domenu (ili u svom polju, ako preferiramo tu definiciju). Da bismo definisali pojam „*n*-ti" pored ordinalnog broja *n* potreban nam je pojam stepena relacije, to jest relativni proizvod relacije umnožene samom sobom konačan broj puta. Stoga, ako je *R* bilo koja jedan-jedan serijalna relacija koja generiše konačan niz ili progresiju, prvi termin polja *R* (koje ćemo zvati *r*) jeste termin koji pripada tom domenu, ali ne i konverznom domenu, to jest to je termin koji stoji u relaciju *R* ali ne i u relaciji $\breve{R}$. Ako *r* ima *n* ili više termina gde je *n* konačan broj, *n*-ti termin od *r* je termin prema kojem prvi termin stoji u relaciji R^{n-1} ili je to termin koji stoji u relaciji $\breve{R}^{n-1}$ ali ne u relaciji $\breve{R}^{n}$. Zbog pojma stepena relacije, uvođenje kardinala je ovde neizbežno, a kako su stepeni definisani matematičkom indukcijom, pojam *n*-ti, shodno gorenavedenoj definiciji, ne može da se proširi izvan konačnih brojeva. Međutim, ovaj pojam možemo da proširimo pomoću sledeće definicije: ako je *P* tranzitivan aliorelativni generišući dobro uređen niz *p*, *n*-ti termin od *p* je termin *x* takav da, ako je *P*' relacija *P* ograničena na *x* i na njegove prethodnike, onda *P*' ima ordinalni broj *n*. Ovde zavisnost od kardinala proizlazi iz činjenice da ordinal *n* može, uopšte uzev, biti definisan tek pomoću kardinala *n*.

Značajno je primetiti da nijedan skup termina nije inherentno u nekom poretku više nego u nekom drugom i da nijedan termin nije *n*-ti termin nekog skupa, izuzev u odnosu prema pojedinačnoj generišućoj relaciji čije je polje skup ili deo skupa. Na primer, pošto u bilo kojoj progresiji bilo koji konačan broj uzastopnih termina uključujući i prvi može biti uklonjen a da ostatak i dalje formira progresiju, ordinalni broj nekog termina u progresiji može biti snižen na neki manji broj, po izboru. Tako je ordinalni broj termina relativan prema nizu kojem pripada. Ovo može da se svede na relaciju prema prvom terminu niza, što može da se objasni time da *prvi* termin uvek može da se definiše nenumerički, čime se izbegava cirkularnost. U Dedekindovom pojedinačno beskonačnom sistemu, prvi termin je jedini termin koji nije sadržan u slici sistema, i to je, uopšte uzev, jedini termin u svakom nizu koji stoji u konstitutivnoj relaciji sa jednim smerom, ali ne i sa drugim[1]. Stoga relacija izražena *n*-tim nije samo relacija prema *n* nego i relacija prema prvom terminu niza, a sam *prvi* termin zavisi od termina uključenih u niz i od relacije kojom su oni uređeni, tako da onaj koji je bio prvi može da prestane da bude prvi, a onaj koji nije bio prvi može da postane prvi. Stoga prvi termin niza mora da se odredi, kao što je učinjeno u Dedekindovom gledištu o progresiji, kao lanac njenog prvog termina. Stoga *n*-ti izražava četvorougaonu relaciju između termina koji je *n*-ti, termina koji je prvi, generišuće serijalne relacije i kardinalnog broja *n*. Stoga je jasno da su ordinali, bilo kao klase sličnih serijalnih relacija, bilo kao pojmovi kao što je *n*-ti, složeniji od kardinala; da je logička teorija kardinala potpuno nezavisna od opšte teorije progresija koja mora nezavisno da se nadogradi kako bi se pokazalo da kardinali formiraju progresiju; i da Dedekindovi ordinali u suštini nisu ni ordinali ni kardinali već članovi bilo koje progresije uopšte. Ja sam se zadržao na ovom mestu jer je ono značajno i zato što se moje mišljenje razlikuje od mišljenja većine najvećih autoriteta. Ako bi Dedekindovo gledište bilo tačno, onda bi bilo logički pogrešno početi, kao što se to čini u ovom radu, od teorije kardinalnih brojeva pre nego od poretka. Što se mene tiče, ne smatram da je apsolutno pogrešno početi od poretka pošto izgleda da su svojstva progresija, a isto tako i većina

[1] Doduše, kada niz ima dva kraja, onda moramo da napravimo proizvoljan izbor koji ćemo zvati prvim a koji poslednjim. Očigledno je da nenumerička priroda *poslednjeg* ilustruje onu prirodu njegovog korelata, naime *prvog*.

svojstava nizova uopšte u velikoj meri nezavisna od broja. Ali, svojstva broja moraju biti dokaziva bez pozivanja na opšta svojstva progresija pošto kardinalni brojevi mogu nezavisno da se definišu i moraju da se shvate kao da formiraju progresiju pre nego što bi teoreme koje se tiču progresija mogle da budu primenjene na njih. Stoga se pitanje da li početi od poretka ili od brojeva svodi na pitanje podesnosti i jednostavnosti; sa te tačke gledišta, izgleda da kardinalni brojevi prirodno prethode vrlo teškim razmatranjima koja se odnose na nizove kojima smo se bavili u ovom delu našeg rada.

Glava XXXI

RASTOJANJE

244. Često se pretpostavljalo da je pojam rastojanja suštinski za nizove[1], ali taj pojam nikada nije precizno definisan. Insistiranje na rastojanju karakteriše, upošte uzev, one koji veruju u relativan položaj. Tako na primer Lajbnic u raspravi sa Klarkom primećuje:

„U pogledu primedbe da su prostor i vreme kvantiteti ili, radije, stvari koje imaju kvantitet, a da položaj i poredak nisu takvi, odgovaram da se i u pogledu poretka može govoriti o kvantitetu; u njemu postoji ono što prethodi i ono što sledi; postoji rastojanje ili interval. Relativne stvari imaju kvantitet, kao što ga imaju i apsolutne. Na primer, odnosi ili proporcije u matematici imaju kvantitet i merljivi su logaritmima, a odnosi i proporcije su ipak relacije. Prema tome, iako se prostor i vreme sastoje od relacija, oni ipak imaju kvantitet[2].

Ako se u ovom pasusu primedba: „Postoji ono što prethodi i ono što sledi; postoji rastojanje ili interval“ uzme kao izvođenje, onda je ona *non sequitur*; puki poredak sam po sebi *ne* dokazuje da postoji rastojanje ili interval. Kao što smo videli, na osnovu rastojanja se dokazuje da postoje prostiranja, da ona mogu biti u posebnom obliku sabiranja koji je blisko analogan onom što sam nazvao relacionim

---

[1] Na primer kod Majnonga, *op. cit.*, §17.

[2] *Phil. Werke*, Gerhardovo izdanje, Vol. VII, str. 404.

sabiranjem, da imaju znak i da (barem teorijski) predstavljaju prostiranja koja zadovoljavaju Arhimedov aksiom i aksiom linearnosti, zbog čega su uvek podložna numeričkom merenju. Kao što Majnong s pravom ističe, ova ideja se u potpunosti razlikuje od ideje prostiranja. Da li bilo koji pojedinačni niz sadrži ili ne sadrži rastojanja biće, u većini kompaktnih nizova (to jest takvih koji imaju termin između bilo koja dva), pitanje na koje ne može da se odgovori argumentom. U diskretnom nizu *mora* biti rastojanja, a u drugim nizovima ih *može* biti – osim ukoliko nisu nizovi dobijeni iz progresija kao što su racionalni ili realni brojevi dobijeni iz celih brojeva, u kom slučaju onda takođe *mora* biti rastojanja. Ali, videćemo da su prostiranja matematički dovoljna, a da su rastojanja komplikovana i nevažna.

245. Pre svega, definicija rastojanja nije laka stvar. Ono što je do sada urađeno u pogledu ove svrhe uglavnom dugujemo neeuklidskoj geometriji[1]. I Majnong je takođe uradio nešto u pogledu uspostavljanja ove definicije[2]. Ali, u oba ova slučaja više se radi o numeričkom merenju rastojanja nego o stvarnoj definiciji rastojanja. Uprkos tome, rastojanje nipošto nije nedefinljivo. Pokušajmo da ovaj pojam što je moguće više uopštimo. Na prvom mestu, nije nužno da rastojanje bude asimetrično; ali, druga svojstva rastojanja nam uvek omogućuju da ga učinimo asimetričnim te stoga možemo smatrati da je ono takvo. Drugo, nije nužno da rastojanje bude kvantitet ili veličina mada se obično smatra da je takvo, ali uvidećemo da je to irelevantno za druga svojstva rastojanja, a naročito za numeričko merenje rastojanja. Treće, kada rastojanje smatramo asimetričnim, onda mora da postoji samo jedan termin prema kojem dati termin stoji na datom rastojanju, a konverzna relacija prema datom rastojanju mora da bude rastojanje iste vrste. (Treba primetiti da najpre moramo odrediti *vrstu* rastojanja, a onda preći na opštu defiiniciju rastojanja). Stoga

---

[1] Vidi, na primer, Vajthedovu *Universal Algebra*, Cambridge, 1898, knjiga VI, glava I.

[2] *Op. cit.*, odeljak IV.

je svako rastojanje jedan-jedan relacija, a s obzirom na takve relacije zgodno je smatrati konvers relacije njenim minus prvim (-1) stepenom. Nadalje, relativan proizvod dva rastojanja jedne vrste mora biti rastojanje iste te vrste. Kada su dva rastojanja uzajamno konverzna, njihov proizvod će biti identitet koji stoga predstavlja jedno od rastojanja (zapravo njihovu nulu), i koji jedini mora biti rastojanje koje nije asimetrično. Osim toga, proizvod dva rastojanja jedne vrste mora biti komutativan[1]. Ako rastojanja jedne vrste predstavljaju veličine, onda ona moraju da formiraju neku vrstu veličine – to će reći, bilo koja dva rastojanja moraju biti jednaka ili nejednaka. Ako nisu veličine, ona ipak moraju da formiraju niz generisan na drugi od naših šest načina, to jest svaki par različitih rastojanja mora da stoji u izvesnoj asimetričnoj relaciji koja je ista za sve parove izuzev u pogledu smera. I, na kraju, ako je Q ova relacija, a R_1QR_2 (gde su R_1 i R_2 rastojanja date vrste), onda, ako je R_3 bilo koje drugo rastojanje te vrste, onda mora da važi $R_1R_3QR_2R_3$. Koliko ja mogu da utvrdim, sva ova svojstva su nezavisna i treba da dodamo svojstvo polja, naime, ovo: bilo koja dva termina od kojih svaki pripada polju nekog rastojanja ove vrste (ne nužno iste za oba) stoje u relaciji koja je rastojanje te vrste. Pošto smo sada definisali vrstu rastojanja, rastojanje je bilo koja relacija koja pripada nekoj vrsti rastojanja, i time je posao definisanja upotpunjen.

Kao što ćemo videti, pojam rastojanja je krajnje složen. Svojstva rastojanja su analogna svojstvima prostiranja sa znakom, ali su daleko manje podesna za uzajamno izvođenje. Svojstva prostiranja koja odgovaraju mnogim gorenavedenim svojstvima rastojanja mogu da se dokažu. Ova razlika umnogome počiva na činjenici da prostiranja mogu da se sabiraju na elementarno logički (ne aritmetički) način, dok rastojanja zahtevaju ono što sam nazvao *relacionim* sabiranjem koje je skoro isto kao relativno množenje.

---

[1] Ovo je jedno nezavisno svojstvo; razmotriti, na primer, razliku između „deda po majci“ i „baba po ocu“.

246. Numeričko merenje rastojanja je već delimično objašnjeno u Trećem delu. Kao što smo videli, da bi se numeričko merenje u potpunosti primenilo, potrebna su još dva postulata koji, međutim, ne pripadaju definiciji rastojanja već samo nekim vrstama rastojanja. Ti postulati su: Arhimedov postulat: kada su data dva rastojanja jedne vrste, onda postoji konačan ceo broj n takav da je n-ti stepen prvog rastojanja veći od drugog rastojanja i Diboa-Remonov postulat linearnosti: bilo koje rastojanje ima n-ti koren, gde je n bilo koji ceo broj (ili bilo koji prost broj, odakle ovaj rezultat sledi za svaki ceo broj). Kada su ova dva postulata zadovoljena, onda možemo naći značenje za R^x gde je R rastojanje drugačije vrste od identiteta, a x bilo koji realni broj[1]. Štaviše, svako rastojanje ove vrste je oblika R^x za neku vrednost od x, a x je, naravno, numerička mera rastojanja.

U slučaju niza koji je generisan na prvi od naših šest načina, različiti stepeni generišuće relacije R daju rastojanja termina. Kao što čitalac sam može da vidi, ovi različiti stepeni potvrđuju sve navedene karakteristike rastojanja. U slučaju nizova koji su generisani progresijama, kao što su racionalni ili realni brojevi generisani iz celih brojeva, rastojanja uvek postoje; tako, u slučaju samih racionalnih brojeva koji su jedan-jedan relacije, njihove razlike koje su i same racionalni brojevi mere ili ukazuju na relacije među njima, a te relacije su po svojoj prirodi rastojanja. U Petom delu ćemo videti da ta rastojanja imaju izvestan značaj u vezi sa granicama. Jer, numeričko merenje je u izvesnom obliku suštinsko za izvesne teoreme o granicama, a numeričko merenje rastojanja je praktičnije sprovodivo od numeričkog merenja prostiranja.

247. Međutim, teško je potvrdno odgovoriti na pitanje da li su nizovi koji nisu povezani sa brojevima – na primer, prostorni i vremenski

---

[1] Stepeni rastojanja su ovde shvaćeni u smislu koji proizlazi iz relativnog množenja; stoga, ako su a i b na istom rastojanju kao b i c, onda je to rastojanje kvadratni koren rastojanja između a i c. Postulat linearnosti koji, kada se izrazi običnim jezikom, glasi „svaka linearna veličina može se podeliti na n jednakih delova, gde je n bilo koji ceo broj", može se naći u Diboa-Remonovoj *Allgemeine Functionentheorie* (Tübingen, 1882), str. 46.

nizovi – takvi da sadrže rastojanja. Može se reći nešto protiv tog gledišta. Najpre, tu mora biti prostiranja i ona moraju biti veličine. Onda postaje puka pretpostavka – koja se mora izraziti kao aksiom – da jednaka prostiranja odgovaraju jednakim rastojanjima. Ovo bi, naravno, moglo da se negira, a mi bismo čak mogli da potražimo interpretaciju neeuklidske geometrije koja je zasnovana na tom negiranju. Uobičajene koordinate bi mogle da se posmatraju kao da izražavaju prostiranja, a logaritmi njihovih neharmonijskih odnosa kao da izražavaju rastojanja; hiperbolička geometrija bi u svakom slučaju tako mogla da dobije donekle čudnu interpretaciju. Gospodin Majnong, koji sve nizove posmatra kao da sadrže rastojanja, tvrdi analogan princip u pogledu rastojanja i prostiranja uopšte. On smatra da se rastojanje povećava samo kao logaritam prostiranja. Može se primetiti da tamo gde je samo rastojanje racionalan broj (što je moguće, pošto su racionalni brojevi jedan-jedan relacije), suprotna teorija može da se učini formalno podesnom na osnovu sledeće činjenice. Kao što smo videli, kaže se da je kvadrat rastojanja dva puta veći od rastojanja kojeg je on kvadrat. Umesto toga, u slučaju u kojem je rastojanje racionalan broj, mogli bismo da kažemo da je *prostiranje* dvaput veće, ali da je *rastojanje* uistinu kvadrat prethodnog rastojanja. Jer, u slučaju u kojem je rastojanje već numeričko, uobičajena interpretacija numeričkog merenja je u neskladu sa notacijom R^2. Stoga ćemo biti primorani da prostiranje smatramo proporcionalnim logaritmu rastojanja. Ali, pošto je izvan teorije progresija uglavnom sumnjivo da li postoje rastojanja i pošto u skoro svim drugim nizovima prostiranja izgledaju neadekvatna za sve rezultate koji se inače mogu dobiti, zadržavanje rastojanja dodaje nepotrebnu komplikaciju. Prema tome, uopšte uzev je bolje, barem u filozofiji matematike, izbeći rastojanja osim u teoriji progresija, a u toj teoriji ih onda meriti naprosto indeksima stepena generišuće relacije. Koliko mi je poznato, ne postoji logički razlog u prilog pretpostavci da rastojanja postoje bilo gde drugde osim u konačnom dvodimenzionalnom prostoru i u projektivnom prostoru; a ako postoje, ona nisu matematički značajna. U Šestom delu ćemo videti kako teorija prostora i vremena može da se razvije bez pretpostavljanja rastojanja; rastojanja koja se javljaju u projektivnoj geometriji su izvedene relacije koje nisu potrebne za definisanje svojstava našeg prostora, a u Petom delu ćemo videti koliko su malobrojne funkcije rastojanja s obzirom na nizove uopšte. Protiv rastojanja se može primetiti i da, ako svaki niz mora da sadrži rastojanja, onda beskonačni regres postaje neizbežan pošto je svaka vrsta rastojanja i sama uvek niz. Mislim da ovo nije logička primedba pošto je regres logički dopustive vrste; ova primedba pokazuje da se uvode velike komplikacije ako se rastojanje smartra suštinskim za svaki niz. U celosti uzev, onda izgleda sumnjivo da li rastojanja uopšte postoje i, ako postoje, njihovo postojanje izgleda nevažno i predstavlja izvor vrlo velikih komplikacija.

248. Sada smo kompletirali razmatranje poretka ukoliko je ono uopšte moguće bez uvođenja teškoća koje proizlaze iz kontinuiteta i beskonačnosti. Videli smo da svaki poredak podrazumeva asimetrične tranzitivne relacije i da je svaki niz kao takav otvoren. Ali, videli smo da zatvoreni nizovi mogu da se razlikuju s obzirom na način na koji su generisani i time što, iako uvek imaju prvi termin, taj termin uvek može biti proizvoljno izabran. Videli smo da asimetrične relacije ponekad moraju biti neanalizabilne i da se, kada su analizabilne, u toj analizi moraju javljati druge asimetrične relacije. Utvrdili smo da razlika u pogledu znaka uvek zavisi od razlike između asimetrične relacije i njenog konversa. U diskusiji o posebnom tipu niza koji smo nazvali progresijom, videli smo kako se cela aritmetika primenjuje na sve takve nizove, i kako konačni ordinalni brojevi mogu da se definišu pomoću njih. Ali, iako smo utvrdili da je ova teorija u izvesnoj meri nezavisna od kardinala, ipak nismo pronašli razlog da se složimo sa Dedekindom u pogledu kardinala kao logički sekundarnih u odnosu na ordinale. Na kraju smo se složili da je rastojanje pojam koji nije bitan za nizove i da je od malog značaja izvan aritmetike. Nadam se da ćemo ovako opremljeni biti u stanju da se oslobodimo svih teškoća na koje su filozofi obično nailazili prilikom razmatranja beskonačnosti i kontinuiteta. Ako je to izvodivo, jedan od najvećih filozofskih problema biće rešen. Ovom problemu će biti posvećen Peti deo.

PETI DEO

BESKONAČNOST I KONTINUITET

Glava XXXII

KORELACIJA NIZOVA

249. Sada dolazimo do onoga za šta se uopšte smatralo da predstavlja fundamentalni problem matematičke filozofije – pritom mislim na problem beskonačnosti i kontinuiteta. Ovaj problem je zahvaljujući radovima Vajerštrasa i Kantora pretrpeo potpunu transformaciju. Od vremena Njutna i Lajbnica, priroda beskonačnosti i kontinuiteta tražena je u razmatranjima takozvanog infinitezimalnog računa. Ali, pokazalo se da taj račun u suštini nije ni na kakav način povezan sa infinitezimalama i da mu velika i najznačajnija grana matematike logički prethodi. Štaviše, problem kontinuiteta je u velikoj meri bio odvojen od problema beskonačnosti. Ranije se pretpostavljalo – i na tome počiva stvarna snaga Kantove matematičke filozofije – da se kontinuum suštinski tiče prostora i vremena i da je taj račun (kao što i reč *fluksija* sugeriše) pretpostavljao kretanje ili barem promenu. Po ovom gledištu filozofija prostora i vremena je prethodila filozofiji kontinuiteta, transcendentalna estetika je prethodila transcendentalnoj dijalektici, a antinomije (barem one matematičke) bile su u suštini prostorno-vremenske. Sve to je promenjeno modernom matematikom. Ono što se naziva aritmetizacijom matematike pokazalo je da su svi problemi koji su u ovom pogledu vezani za prostor i vreme već prisutni u čistoj aritmetici. Teorija beskonačnosti ima dva oblika, kardinalni i ordinalni, pri čemu prvi proizlazi iz logičke teorije broja, dok je teorija kontinuiteta čisto ordinalna. U teoriji kontinuiteta i ordinalnoj teoriji beskonačnosti problemi koji nastaju nisu specifično povezani sa brojevima, već sa svim nizovima izvesnih tipova koji se podjednako javljaju i u aritmetici i u geometriji. Ono što omogućava da se problemi o kojima je reč naročito lako tretiraju u slučaju brojeva jeste to što niz racionalnih brojeva koji predstavlja ono što ću zvati *kompaktnim* nizom nastaje iz progresije, naime, one celih brojeva, i što nam ova činjenica omogućava da damo vlastito ime svakom terminu niza racionalnih brojeva – a što predstavlja aspekt po kojem se ovaj niz razlikuje od drugih nizova istog tipa. Ali, teoreme ove vrste kojima ćemo se baviti u većini sledećih glava, premda su dobijene u aritmetici, imaju daleko širu primenu pošto su čisto ordinalne i ne pretpostavljaju nikakva logička svojstva brojeva. Drugim rečima, ideja koju Nemci nazivaju *Anzahl*, ideja broja termina u nekoj klasi, irelevantna je osim u teoriji tranzitivnih kardinala – što predstavlja značajan ali vrlo različit deo Kantorovih doprinosa teoriji beskonačnosti. Videćemo da je moguće dati opštu definiciju kontinuiteta u kojoj nema nikakvog pozivanja na masu neanaliziranih predrasuda koje kantovci nazivaju „opažaj“, a u Šestom delu ćemo uvideti da se nijedan drugi kontinuitet ne podrazumeva u prostoru i vremenu. Videćemo da je strogim pridržavanjem učenja o granicama moguće da se u potpunosti oslobodimo infinitezimala, čak i u definiciji kontinuiteta i zasnivanju infinitezimalnog računa.

250. Jedinstvena je činjenica da je srazmerno izbacivanju infinitezimala iz matematike beskonačnom dopušten slobodniji život. Kantorovo delo je otkrilo da postoje dva aspekta razlike između beskonačnih brojeva i onih koji su konačni. Prvi koji se odnosi i na kardinale i na ordinale jeste da oni ne podležu matematičkoj indukciji – ili, bolje rečeno, oni ne formiraju deo niza brojeva koji počinje sa 1 ili 0 koji su poređani po veličini, a koji sadži sve brojeve koji su po veličini između bilo koja dva njegova termina i koji podležu matematičkoj indukciji. Drugi koji se odnosi samo na kardinale jeste da celina beskonačnog broja termina uvek sadrži deo koji se sastoji od istog broja termina. Prvi aspekt konstituiše istinsku definiciju beskonačnog niza ili, bolje rečeno, ono što se može nazvati beskonačnim terminom u nizu: on izražava suštinu ordinalno beskonačnog. Drugi aspekt izražava definiciju beskonačne kolekcije i filozof će ga bez sumnje proglasiti samoprotivrečnim. Ali, ako filozof blagoizvoli da pokuša da izloži tu protivrečnost, uvideće da ona može da se dokaže jedino priznavanjem matematičke indukcije, tako da je samo ustanovio vezu sa ordinalno beskonačnim. Stoga će biti primoran da tvrdi da je negiranje matematičke indukcije samoprotivrečno, a ako je o toj stvari makar malo razmišljao, bolje bi mu bilo da ispita stvar pre izricanja suda. Kada se prizna da matematička indukcija može da se negira bez protivrečnosti, pretpostavljene antinomije beskonačnosti i kontinuiteta sve odreda nestaju. Nastojaću da to dokažem detaljnije u sledećim glavama.

251. U toku celog ovog dela često ćemo imati posla sa jednim pojmom koji je do sada bio jedva pomenut, naime, sa pojmom korelacije nizova. U prethodnom delu smo ispitali prirodu pojedinačnog niza, ali smo se jedva dotakli relacija između različitih nizova. Međutim, filozofi su u potpunosti prevideli značaj ovih relacija, a matematičari su ga tek nedavno shvatili. Odavno je poznato koliko toga bi moglo da se uradi u geometriji pomoću homografije koja predstavlja primer korelacije, a Kantor je pokazao koliko je važno znati da li je niz prebrojiv i u kojoj meri su slična dva niza koja mogu da se koreliraju. Ali, uglavnom nije isticano da zavisna promenljiva i njena nezavisna promenljiva u većini matematičkih slučajeva predstavljaju samo korelirane nizove, niti je opšta ideja korelacije bila adekvatno obrađena. U ovom radu je relevantan samo filozofski aspekt ove problematike.

Za dva *niza s* i *s*’ se kaže da su korelirani kada postoji jedan-jedan relacija *R* koja povezuje svaki termin od *s* sa jednim terminom *s*’ i obratno, i kada, ako su *x* i *y* termini od *s*, a *x* prethodi *y*, onda su njihovi korelati x' i y' u s' takvi da x' prethodi y'. Dve klase ili kolekcije su kolerirane uvek kada postoji jedan-jedan relacija između termina jedne i termina druge, tako da nijedan termin ne ostaje nekoreliran. Dakle, dva niza mogu da se koreliraju kao klase a da ne budu korelirani kao nizovi zato što korelacija nizova kao klasa podrazumeva samo istovetnost kardinalnog broja, dok korelacija nizova kao nizova podrazumeva takođe i isti ordinalni tip – što predstavlja distinkciju čiji će značaj biti naknadno objašnjen. Kako bi se razlikovali ovi slučajevi, biće dobro da govorimo o korelaciji klasa kao o prostoj korelaciji, a o korelaciji nizova kao o ordinalnoj korelaciji. Stoga, kad god govorimo nespecifikovano o korelaciji, to treba razumeti kao da se ne radi nužno o ordinalnoj korelaciji. Korelirane klase će se nazivati *sličnim*, korelirani nizovi će se nazivati *ordinalno sličnim*; a za njihove generišuće relacije će se reći da stoje u relaciji *sličnosti*.

Korelacija je metod posredstvom kog, kada je dat jedan niz, drugi mogu da se generišu. Ako postoji bilo koji niz čija je generišuća relacija P i bilo koja jedan-jedan relacija koja važi između bilo kog termina x iz niza i nekog termina koji se može nazvati x_R, onda će klasa termina x_R formirati niz istog tipa kao i klasa termina x. Jer, pretpostavimo da je y bilo koji drugi termin iz našeg prvobitnog niza i pretpostavimo da xPy. Onda imamo $x_R\breve{R}x$, xPy i yRy_R. Stoga $x_R\breve{R}PRy_R$. Sada se može pokazati[1] da, ako je P tranzitivna i asimetrična relacija, takva je onda i $\breve{R}PR$, otuda korelacija termina P-niza formira niz čija je generišuća relacija $\breve{R}PR$. Između ova dva niza postoji ordinalna korelacija i ovi nizovi su potpuno ordinalno slični. Na ovaj način, nov niz je slično prvobitnom generisan jedan-jedan relacijom čije polje uključuje prvobitni niz. Može se takođe pokazati da, obratno, ako su P i P' generišuće relacije dva slična niza, onda postoji jedan-jedan relacija R čiji je domen polje relacije P koja je takva da $P' = \breve{R}PR$.

---

[1] Vidi moj članak u RdM, Vol. VIII, br. 2.

252. Sada možemo razumeti jednu značajniju distinkciju, naime, onu između samodovoljnog ili nezavisnog niza i niza po korelaciji. U upravo objašnjenom slučaju postoji savršena matematička simetrija između prvobitnog niza i niza po korelaciji; jer, ako sa Q označimo relaciju $\breve{R}PR$ uvidećemo da $P = RQ\breve{R}$. Stoga možemo uzeti ili Q-niz ili P-niz kao prvobitan, a drugi niz kao izveden. Ali, ako bi se dogodilo da je R umesto jedan-jedan relacija mnogo-jedan relacija, onda će termini polja relacije Q koje ćemo nazvati q biti uključeni u poredak u kojem postoji ponavljanje, što znači da se isti termin javlja na različitim položajima koji odgovaraju njegovim različitim korelatima u polju relacije P koje ćemo nazvati p. Ovo je obično slučaj sa matematičkim funkcijama koje nisu linearne. Usled zaokupljenosti takvim nizovima većina matematičara ne uspeva da shvati nemogućnost ponovnog pojavljivanja istog termina u nezavisnom nizu. Na primer, u svakoj štampanoj rečenici slova stiču poredak korelacijom sa tačkama prostora i neko slovo će biti ponovljeno na različitim položajima. Ovde je niz slova suštinski derivativan zato što ne možemo da uredimo tačke prostora relacijom prema slovima: to bi nam dalo nekoliko tačaka na istom položaju umesto jednog slova na različitim položajima. U stvari, ako je P serijalna relacija, a R mnogo-jedan relacija čiji je domen polje relacije P, a $Q = \breve{R}PR$, onda Q ima sve karakteristike serijalne relacije osim one koja implicira različitost, ali $RQ\breve{S}$ nije ekvivalentno relaciji P i stoga nedostaje simetrija. To je razlog zašto su inverzne funkcije u matematici poput $\sin^{-1}x$ istinski različite od direktnih funkcija i zahtevaju neku domišljatost ili konvenciju pre nego što postanu nedvosmislene. Niz dobijen od mnogo-jedan korelacije, kao što je q dobijeno gore, nazvaćemo nizom po korelaciji. Oni nisu u pravom smislu nizovi, a njihovo eliminisanje iz diskusija o fundamentalnim pitanjima je od velikog značaja.

253. Pojam *sličnosti* među relacijama odgovara pojmu sličnosti među klasama. Sličnost se definiše na sledeći način: dve relacije P i

Q su slične kada postoji jedan-jedan relacija S takva da je domen od S polje od P, a $Q = \breve{S}PS$. Ovaj pojam nije ograničen na serijalne relacije već može da se proširi i na sve relacije. Možemo da definišemo *relacioni broj* relacije P kao klasu svih relacija koje su slične relaciji P; i tako možemo nastaviti sve do vrlo opšteg predmeta koji može da se nazove relacionom aritmetikom. Što se tiče relacionih brojeva, možemo da dokažemo sve formalne zakone sabiranja i množenja koji važe za transfinitne ordinale i da na taj način dobijemo proširenje jednog dela ordinalne aritmetike na relacije uopšte. Pomoću sličnosti možemo da definišemo konačnu relaciju kao relaciju koja nije slična nijednom pravom delu nje same – pri čemu je pravi deo relacije relacija koja implicira relaciju koje je pravi deo, ali nije sa njom ekvivalentna. Na ovaj način možemo da se potpuno oslobodimo kardinalne aritmetike. Osim toga, svojstva sličnosti su sama po sebi zanimljiva i značajna. Jedno neobično svojstvo jeste da, ako je S jedan-jedan relacija čiji je domen polje relacije P, onda je gorenavedena jednakost $Q = \breve{S}PS$ ekvivalentna sa $SQ = PS$ ili sa $Q\breve{S} = \breve{R}P$[1].

254. Pošto korelacija nizova konstituiše većinu matematičkih primera fukcija i pošto je funkcija pojam koji često nije jasno objašnjen, biće poželjno da ovde kažemo nešto o prirodi tog pojma. U njenoj najopštijoj formi, funkcijabilnost se ne razlikuje od relacije. Za sadašnju svrhu biće dobro da ponovo koristimo dva tehnička termina koja smo definisali u Prvom delu. Ako x stoji u izvesnoj relaciji prema y, x ću zvati *referencijom*, a y *relatom* relacije o kojoj je reč. Ako je x definisano kao da pripada nekoj klasi sadržanoj u domenu ove relacije, onda relacija definiše y kao funkciju od x. Naime, jedna nezavisna promenljiva je konstituisana kolekcijom termina, od kojih svaki može biti referencija izvesne relacije. Tada svaki od tih termina ima jedan ili više relata, a bilo koji od njih je izvesna funkcija njegove referencije, pri čemu je funkcija definisana tom relacijom. Stoga *otac* definiše jednu funkciju pod uslovom da je nezavisna

[1] O tome vidi moj članak u RdM, Vol. VIII, a naročito br. 2 i 6.

promenljiva klasa sadržana u klasi muških životinja koje su ili koje će produžiti svoju vrstu, a ako je *A* otac od *B*, za *B* se kaže da je funkcija od *A*. Ono što je ovde bitno jeste nezavisna promenljiva, to jest bilo koji termin neke klase i relacija čija ekstenzija uključuje tu promenljivu. Onda je referencija nezavisna promenljiva, a njena funkcija je bilo koji od odgovarajućih relata.

Ali, ova najopštija ideja funkcije se retko upotrebljava u matematici. Postoje dva glavna načina partikularizacije ove funkcije: prvo, možemo da ograničimo relacije koje se razmatraju na jedan-jedan i mnogo-jedan relacije, to jest na takve koje svakoj referenciji daju jedinstveni relat; drugo, možemo da ograničimo nezavisnu promenljivu na nizove. Ovaj drugi način je veoma značajan i naročito je relevantan za našu sadašnju temu. Ali, kako on skoro potpuno isključuje funkcije iz simboličke logike gde nizovi imaju mali značaj, možemo odložiti njegovo razmatranje za trenutak, dok ne izložimo prvi način partikularizacije.

Ideja funkcije je toliko značajna i toliko često se razmatrala uz isključivo pozivanje na brojeve, da je dobro da počnemo da se navikavamo i na primere nenumeričkih funkcija. Stoga, iskazi koji sadrže promenljive[1] predstavlaju veoma značajnu klasu funkcija. Neka postoji neki iskaz u kojem se javlja izraz „bilo koje *a*“ gde je *a* neka klasa. Onda, umesto „bilo koje *a*“ možemo da stavimo *x* gde je *x* nedefinisani član klase *a* – drugim rečima, bilo koje *a*. Ovaj iskaz onda postaje funkcija od *x* koja je jedinstvena kada je *x* dato. Ovaj iskaz će, uopšte uzev, biti istinit za neke vrednosti *x*, a lažan za neke druge. Vrednosti za koje je funkcija istinita formiraju ono što se po analogiji sa analitičkom geometrijom može nazvati logičkom krivom. Ovo opšte gledište se zapravo može učiniti takvim da uključuje i gledište analitičke geometrije. Na primer, jednačina krive u ravni je iskazna funkcija koja je funkcija dve promenljive *x* i *y*, a kriva predstavlja skup tačaka koje daju promenljivima vrednosti koje čine

[1] To su oni koje smo u Prvom delu nazvali izkaznim funkcijama.

iskaz istinitim. Iskaz koji sadrži reč *bilo koji* jeste tvrđenje da je izvesna iskazna funkcija istinita za sve vrednosti promenljive za koje ima značenje. Stoga, iskaz „svi ljudi su smrtni“ tvrdi da je iskaz „*x* je čovek implicira *x* je smrtan“ istinit za sve vrednosti *x* za koje ima značenje, a koje se mogu nazvati prihvatljivim vrednostina. Iskazne funkcije poput „*x* je broj“ imaju tu osobenost da liče na iskaze, a izgleda i da mogu da impliciraju druge iskazne funkcije, iako nisu ni istinite ni lažne. Činjenica je da su one iskazi za sve prihvatljive vrednosti promenljive, ali ne dok je promenljiva promenljiva kojoj nije dodeljena vrednost; i iako za svaku prihvatljivu vrednost promenljive mogu da impliciraju vrednost koja odgovara nekoj drugoj iskaznoj funkciji, ipak, sve dok je promenljiva promenljiva iskazne funkcije ne mogu ništa da impliciraju. Pitanje koje se tiče prirode iskazne funkcije u suprotnosti sa prirodom iskaza i uopšte funkcije u suprotnosti sa njenim vrednostima predstavlja jedno teško pitanje koje može da se razreši samo analizom prirode promenljive. Međutim, značajno je primetiti da su iskazne funkcije, kao što je pokazano u Glavi VII, fundamentalnije od drugih funkcija ili čak i od relacija. Za većinu svrha je pogodno da se identifikuju funkcija i relacija, to jest ako je $y = f(x)$ ekvivalentno sa xRy gde je R relacija, onda je pogodno govoriti o R kao o funkciji i to ćemo učiniti u nastavku; međutim, čitalac bi mogao da se seti da je ideja funkcijabilnosti fundamentalnija od ideje relacije. Ali, taj problem smo ispitali već u Prvom delu gde smo rekli dovoljno da bismo ilustrovali kako iskaz može da bude funkcija promenljive.

Druge primere nenumeričkih funkcija pruža nam rečnik. Francuski jezik je s obzirom na neku datu reč funkcija engleskog jezika i obratno, a oba predstavljaju funkcije termina koji oba označavaju. Kataloški broj neke knjige u bibliotečkom katalogu predstavlja funkciju te knjige, a broj u šifri predstavlja funkciju reči koju označava. U svim ovim slučajevima postoji relacija na osnovu koje relat biva jedinstven (ili, u slučaju jezika, uopšte uzev jedinstven) kada je data referencija; ali, termini nezavisne promenljive ne obrazuju niz osim u čisto spoljašnjem poretku koji rezultira iz alfabeta.

255. Uvedimo sada drugu specifikaciju, naime, da naša nezavisna promenljiva mora da bude niz. Nezavisna promenljiva je tada niz po korelaciji i takođe može da bude nezavisni niz. Na primer, položaji koje zauzima materijalna tačka u nizu trenutaka formiraju niz korelacijom sa trenucima čije su funkcije; ali, na osnovu kontinuiteta kretanja one takođe formiraju, kao po pravilu, geometrijski niz nezavisan od svakog pozivanja na vreme. Stoga je kretanje divan primer korelacije nizova. Ono istovremeno ilustruje najznačajnije obeležje na osnovu kojeg, kada ga ima, možemo reći da niz nije nezavisan. Kada nam je vreme poznato, položaj materijalne čestice je jedinstveno određen; ali, kada je dat položaj, onda može biti nekoliko ili čak beskonačno mnogo trenutaka koji odgovaraju datom položaju. (Biće beskonačno mnogo takvih trenutaka ako, kako se to obično kaže, čestica miruje u položaju o kom je reč. *Mirovanje* predstavlja nedovoljno strog i dvosmislen izraz, ali ću odložiti njegovo razmatranje za Sedmi deo). Stoga relacija vremena prema položaju nije strogo jedan-jedan već može da bude i mnogo-jedan. Ovo je slučaj u kojem dolazi do nastanka zavisnih nizova koji smo razmatrali u okviru opšteg izlaganja o korelaciji. Prisetimo se da smo tada zaključili da su dva korelirana nezavisna niza matematički posmatrano na istom nivou zato što, ako su P i Q njihove generišuće, a R korelirajuća relacija, onda dobijamo $P = RQ\breve{R}$ iz $Q = \breve{R}PR$. Ali, taj zaključak ne važi čim R nije striktno jedan-jedan pošto tada $R\breve{R}$ nije više sadržano u 1’ pri čemu 1’ znači identitet. Na primer, sin moga oca ne moram biti ja, mada otac moga sina moram biti ja. Ovo ilustruje činjenicu da, ako je R mnogo-jedan relacija, $R\breve{R}$ i $\breve{R}R$ onda moraju pažljivo da se razlikuju; $\breve{P}R$ je sadržano u identitetu, ali $R\breve{P}$ nije. Stoga, uvek kada je R mnogo-jedan relacija ona može da se upotrebi za formiranje niza po korelaciji, ali tako formiran niz ne može biti nezavisan. Ovo je značajan uvid koji je apsolutno fatalan po relacionu teoriju vremena[1]. Vratimo se za trenutak slučaju kretanja. Kada čestica opisuje zatvorenu krivu ili krivu koja ima dvostruke tačke, ili kada čestica ponekad miruje u toku konačnog vremena, onda niz tačaka koje ona zauzima suštinski predstavlja niz po korelaciji, a ne nezavisni niz. Ali, kao što sam primetio gore, kriva se ne dobija samo kretanjem već i čisto geometrijskom figurom koja može da se definiše bez pozivanja na neku pretpostavljenu materijalnu tačku. Međutim, kada se kriva tako definiše, ona ne mora da sadrži tačke mirovanja: putanja materijalne tačke koja se ponekad kreće a ponekad miruje u nekom konačnom vremenu razlikuje se kada se posmatra kinematički i kada se posmatra geometrijski, zato što je geometrijski tačka u kojoj postoji mirovanje jedna, dok kinematički ona odgovara mnogim terminima niza.

Prethodna diskusija o kretanju ilustruje na nenumeričkom primeru slučaj koji se normalno javlja među funkcijama čiste matematike. Ove funkcije (kada predstavljaju funkcije realne promenljive) obično ispunjavaju sledeće uslove: i nezavisna i zavisna promenljiva predstavljaju klase brojeva, a definišuća relacija funkcije je mnogo-jedan[2]. Ovaj slučaj pokriva racionalne funkcije, cirkularne i eliptične funkcije realne promenljive, kao i veliku većinu direktnih funkcija čiste matematike. U svim takvim slučajevima, nezavisna promenljiva je niz brojeva koji može da se ograniči kako god želimo – na pozitivne, racionalne, cele, proste brojeve ili na neku drugu klasu. Zavisna promenljiva se takođe sastoji od brojeva, ali je poredak tih brojeva određen njihovom relacijom prema odgovarajućem terminu nezavisne promenljive, a ne relacijom brojeva koji formiraju same zavisne promenljive. U jednoj širokoj klasi funkcija dva poretka mogu da koincidiraju; u drugima pak gde postoje maksimumi i minimumi na

[1] Vidi moj članak „Is position in time absolute or relative?“, *Mind*, July 1901.

[2] Za sada izostavljam kompleksne promenljive koje, kada se uvedu dimenzije, vode komplikacijama potpuno nove vrste.

konačnim intervalima, dva poretka koincidiraju duž celog konačnog prostiranja, a onda postaju tačno suprotni duž celog drugog konačnog prostiranja, itd. Ako je *x,* nezavisna promenljiva, *y* zavisna promenljiva, a konstitutivna relacija mnogo-jedan, isti broj *y* će, uopšte uzev, biti funkcija od *x* to jest funkcija koja odgovara nekolikim brojevima *x*. Stoga je *y*-niz suštinski niz po korelaciji i ne može se smatrati nezavisnim nizom. Onda, ako želimo da razmatramo inverznu funkciju koja je definisana konverznom relacijom, potrebne su razne domišljatosti ako želimo da i dalje imamo korelaciju nizova. Jedna od njih koja deluje najznačajnije, sastoji se u podeli na klase vrednosti od *x* koje odgovaraju istoj vrednosti od *y*, tako da je (što može biti slučaj) moguće razlikovati (recimo) *n* različitih *x*-ova od kojih svaki stoji u različitoj jedan-jedan relaciji prema *y*, i stoga je ta relacija naprosto reverzibilna. Ovo je uobičajeno, na primer, u razlikovanju pozitivnog i negativnog kvadratnog korena. To je moguće kada god generišuća relacija naše prvobitne funkcije formalno može da se izloži kao disjunkcija jedan-jedan relacija. Jasno je da će disjunktivna relacija formirana od *n* jedan-jedan relacija od kojih svaka sadrži u svom domenu izvesnu klasu *u* biti, kroz celu klasu *u*, *n*-jedan relacija. Tako se može desiti da nezavisna promenljiva može da se podeli na *n* klasa tako da unutar svake od njih definišuća relacija bude jedan-jedan, to jest tako da unutar svake od njih postoji samo jedno *x* koje stoji u definišućoj relaciji prema datom *y*. U ovakvim slučajevima koji su uobičajeni u čistoj matematici od naše mnogo-jedan relacije može da se napravi disjunkcija jedan-jedan relacija od kojih je svaka, uzeta za sebe, reverzibilna. U slučaju kompleksnih funkcija ovo je, *mutatis mutandis*, metod Rimanovih površina. Ali, treba jasno upamtiti da tamo gde je naša funkcija prirodno jedan-jedan, *y* koje se javlja kao zavisna promenljiva ordinalno je različito od *y* koje se javlja kao nezavisna promenljiva u inverznoj funkciji.

Nadam se da su gorenavedene primedbe koje ćemo ilustrovati kako budemo napredovali pokazale koliko su tesno povezane korelacija nizova i uobičajena matematička upotreba funkcija. U nastavku ćemo susresti i mnoge druge slučajeve značajnih korelacija. Može se primetiti da je svaka prebrojiva klasa povezana posredstvom jednovrednosne funkcije sa konačnim celim brojevima i obratno. Pošto je uređena zahvaljujući korelaciji sa celim brojevima, takva klasa postaje niz tipa koji Kantor naziva ω. Fundamentalni značaj korelacije za Kantorovu teoriju transfinitnih brojeva će se pokazati kada budemo prešli na razmatranje definicije transfinitnih ordinala.

256. Izgleda da je u vezi sa funkcijama poželjno reći nešto o neophodnosti formula za definiciju. Funkcija je prvobitno, nakon što je prestala da bude prosto stepen, bila nešto što je suštinski moglo da se izrazi formulom. Bilo je uobičajeno da se počne od nekog izraza koji sadrži promenljivu x, ali da se najpre ništa ne kaže o tome šta je x, uz uobičajeno prećutnu pretpostavku da je x neka vrsta broja. Sva dalja ograničenja u pogledu x bila su izvedena, ako uopšte, iz same formule, a uglavnom je želja da se takva ograničenja uklone vodila različitim generalizacijama broja. Ova algebarska generalizacija[1] je prevaziđena jednim ordinalnijim tretmanom u kojem su sve klase brojeva definisane pomoću celih brojeva, a formule nisu relevantne za proces definisanja. Uprkos tome, formula ima izvestan značaj za upotrebu funkcija u slučajevima u kojima su i zavisne i nezavisne promenljive beskonačne klase. Pogledajmo njenu definiciju.

Formula je, u najopštijem smislu, iskaz ili, ispravnije, iskazna funkcija koja sadrži jednu ili više promenljivih, gde je promenljiva bilo koji termin neke definisane klase ili, čak, bilo koji termin bez ograničenja. Vrsta formule koja je relevantna u vezi sa funkcijama jedne promenljive jeste formula koja sadrži dve promenljive. Ako su obe promenljive definisane, jedna tako da pripada klasi u, a druga tako da pripada klasi v, formula je onda istinita ili lažna. Formula je istinita ako svako u stoji prema svakom v u relaciji izraženoj

[1] Izvrsno objašnjenje može da se nađe u Couturat, *De l'Infini Mathématique*, Paris, 1896, deo I, knjiga II.

formulom; inače je lažna. Ali, ako je jedna od promenljivih, recimo x, definisana tako da pripada klasi u dok je druga, y, definisana samo formulom, onda formula može da se posmatra kao definisanje y kao funkcije od x. Nazovimo tu formulu P_{xy}. Ako u klasi u postoji termin x takav da ne postoji nijedan termin y koji čini iskaz P_{xy} istinitim, onda je formula u pogledu njenih termina nemoguća. Stoga moramo pretpostaviti da je u klasa od koje će svaki termin za prikladnu vrednost y učiniti iskaz P_{xy} istinitim. Onda, ako za svaki termin x iz u postoji neki entitet y koji čini P_{xy} istinitim i drugi koji to ne čini, onda P_{xy} korelira svakom x izvesnu klasu termina y. Na ovaj način je y definisano kao funkcija od x.

Ali, obično značenje formule u matematici podrazumeva jedan drugi element koji može da se izrazi i rečju *zakon*. Teško je reći šta je ovaj element ali izgleda da se u izvesnoj meri sastoji od intenzionalne jednostavnosti iskaza P_{xy}. U slučaju dva jezika, na primer, moglo bi se reći da ne postoji formula koja ih povezuje osim u takvim slučajevima kao što je Grimov zakon. Osim rečnika, relacije koje stavljaju u korelaciju reči u različitim jezicima su istovetnog značenja, ali to ne daje metod kojim iz date reči u jednom jeziku može da se dobije odgovarajuća reč u drugom. Ono što nedostaje je mogućnost računanja. Sa druge strane, formula (recimo $y = 2x$) pruža način otkrivanja y kada znamo x. U slučaju jezikâ, jedino nabrajanje svih parova će odrediti zavisnu promenljivu. U slučaju algebarske formule, nezavisna promenljiva i relacija nam omogućavaju da znamo sve o zavisnoj promenljivoj. Ovo je od suštinskog značaja ako funkcije treba proširiti na beskonačne klase zato što nabrajanje postaje nemoguće. Prema tome, za korelaciju beskonačnih klasa i izučavanje funkcija beskonačnih klasa bitno je da formula P_{xy} bude formula u kojoj, ako je x dato, klasa termina y koji zadovoljavaju formulu treba da bude ona klasa koju možemo da otkrijemo. Ne mogu da pružim logičko objašnjenje ovog uslova i sumnjam da je on isključivo psihološke prirode. Njegov praktičan značaj je veliki, ali njegov teorijski značaj deluje krajnje sumnjivo.

Međutim, postoji jedan logički uslov koji je povezan sa prethodnim, iako mu možda nije sasvim identičan. Neka su data neka dva termina, onda postoji neka relacija koja važi između ova dva termina i nikojih drugih. Ako su date bilo koje dve klase termina *u* i *v*, onda postoji disjunktivna relacija u kojoj bilo koji termin od *u* stoji prema bar jednom terminu od *v*, i u kojoj nijedan termin koji ne pripada klasi *u* ne stoji prema bilo kojem terminu. Kada su dve klase konačne posredstvom ovog metoda možemo da izvedemo korelaciju (koja može biti jedan-jedan, mnogo-jedan ili jedan-mnogo) koja korelira termine ovih i nikojih drugih klasa. Na ovaj način bilo koji skup termina teorijski predstavlja funkciju bilo kojih drugih i tek to je ono što, na primer, omogućava pravljenje diplomatskih šifri. Ali, ako je broj termina u klasi koja konstituiše nezavisnu promenljivu beskonačan, onda na ovaj način praktično ne možemo da definišemo funkciju, osim ako se dusjunktivna relacija ne sastoji od relacija dobijenih jednih iz drugih posredstvom nekog zakona, u kom slučaju je formula prosto prenesena na relaciju. Ovo se svodi na tvrđenje da definišuća relacija funkcije ne sme biti beskonačno složena ili, ako je takva, sama mora biti funkcija koja je definisana nekom relacijom konačne složenosti. Mislim da ovaj uslov, iako sam logički, ima samo psihološku nužnost zahvaljujući kojoj možemo da ovladamo beskonačnim tek pomoću zakona poretka. Međutim, razmatranje ovog pitanja bi podrazumevalo diskusiju o relaciji beskonačnosti prema poretku – što je pitanje čije će razmatranje biti nastavljeno kasnije, ali koje još nismo u stanju da na razložan način tretiramo. U svakom slučaju, možemo reći da formula koja sadrži dve promenljive i definišuću funkciju mora, ako treba da bude praktično korisna, da dâ relaciju između dve promenljive na osnovu koje, kada je jedna od promenljivih data, sve odgovarajuće vrednosti druge mogu da se nađu; izgleda da se u ovome sastoji matematička suštinu svih formula.

257. Preostaje još jedan potpuno različit logički pojam koji je veoma značajan u vezi sa granicama, naime, pojam potpunog niza.

Ako je *R* definišuća relacija niza, taj niz je potpun kada postoji termin *x* koji pripada nizu takav da svaki drugi termin koji prema *x* stoji ili u relaciji *R* ili u relaciji $\breve{P}$ pripada tom nizu. Niz je *povezan* (kako je objašnjeno u Četvrtom delu) kada nijedan drugi termin ne pripada tom nizu. Stoga se potpun niz sastoji od onih i samo onih termina koji stoje u generišućoj relaciji ili u njenom konversu prema nekom drugom terminu, zajedno sa tim drugim terminom. Pošto je generišuća relacija tranzitivna, niz koji ispunjava ovaj uslov za jedan od svojih termina ispunjava ga i za sve druge. Niz koji je *povezan* ali nije potpun nazvaćemo nepotpunim ili parcijalnim. Primeri potpunih nizova su kardinalni celi brojevi, pozitivni i negativni celi brojevi i nula, racionalni brojevi, trenuci vremena ili tačke na pravoj liniji. Svaki izbor iz takvih nizova je nepotpun s obzirom na generišuće relacije gorenavedenog potpunog niza. Stoga su pozitivni brojevi nepotpun niz, a takvi su i racionalni brojevi između 0 i 1. Kada je niz potpun, onda nijedan termin ne može da dođe pre ili posle nekog termina niza a da ne pripada tom nizu; kada je niz nepotpun, to više nije slučaj. Niz može biti potpun s obzirom na neku generišuću relaciju, ali ne i s obzirom na neku drugu. Stoga su konačni celi brojevi potpun niz kada je taj niz definisan stepenima relacije sledovanja o čemu je bilo reči u diskusiji o progresijama u Četvrtom delu; ali, kada se konačni celi brojevi urede sa koreliranjem s obzirom na celinu i deo, oni onda formiraju samo deo niza konačnih i transfinitnih celih brojeva, kao što ćemo videti u nastavku. Potpun niz može da se smatra proširenjem termina s obzirom na datu relaciju, zajedno sa samim tim terminom; kao što ćemo videti, zbog toga se potpun niz značajno razlikuje od ordinalno sličnih nepotpunih nizova. Ali, pomoću logike relacija može da se pokaže da bilo koji nepotpuni niz može da postane potpun nekom promenom generišuće relacije i obratno. Dakle, razlika između potpunog i nepotpunog niza suštinski zavisi od date generišuće relacije.

Glava XXXIII

REALNI BROJEVI

258. Nakon svega što je već rečeno o bojevima, filozof može biti iznenađen kada uvidi da je tek sada naučio nešto o *realnim* brojevima, a njegovo iznenađenje će se preobratiti u užas kada uvidi da je *realni* broj suprotan *racionalnom* broju. Ali, on će se smiriti kada uvidi da realni brojevi zapravo uopšte nisu brojevi, već nešto sasvim različito.

Niz realnih brojeva, kako se uobičajeno definiše, sastoji se od celog skupa racionalnih i iracionalnih brojeva, pri čemu su iracionalni brojevi definisani kao granice niza racionalnih brojeva koji nema ni racionalnu ni beskonačnu granicu. Međutim, ova definicija uvodi strašne teškoće koje ćemo razmatrati u sledećoj glavi. Što se mene tiče, ne vidim nijedan razlog da pretpostavim da postoje bilo kakvi iracionalni brojevi u prethodnom smislu, a ako postoje bilo koji iracionalni brojevi deluje izvesno da ne mogu da budu veći ili manji od racionalnih brojeva. Kada matematičari sprovedu generalizaciju broja, onda postaju isuviše skromni u vezi sa tim – oni misle da je razlika između uopštenih i prvobitnih pojmova manja nego što zapravo jeste. Već smo videli da konačni kardinali ne mogu da se poistovete sa pozitivnim celim brojevima, niti sa odnosima prirodnih brojeva prema 1, od kojih i jedni i drugi izražavaju relacije koje prirodni brojevi ne izražavaju. Na sličan način postoji jedan realan broj koji je pridružen svakom racionalnom broju ali je različit od njega. Tvrdiću da realan broj nije ništa drugo do izvesna klasa racionalnih brojeva. Stoga je klasa racionalnih brojeva manjih od $\frac{1}{2}$ realan broj koji je pridružen ali očigledno ne i identičan racionalnom broju $\frac{1}{2}$. Koliko mi je poznato, ovu teoriju nisu zastupali drugi autori, mada je Peano naslućuje, a Kantor joj se približava[1]. Moji razlozi tome u prilog su, prvo, što takve klase racionalnih brojeva imaju sva matematička svojstva koja se uobičajeno pripisuju realnim brojevima i, drugo, što iz suprotne teorije proizlaze logičke teškoće koje mi deluju nepremostivo. Ovo drugo će biti razmatrano u sledećoj glavi, a za sada ću samo da izložim moje sopstveno gledište i nastojaću da pokažem da tako shvaćeni realni brojevi imaju sve neophodne karakteristike. Primetićemo da je teorija koja sledi nezavisna od učenja o granicama koje će pak biti uvedeno u sledećoj glavi.

259. Racionalni brojevi poređani po veličini formiraju niz u kojem postoji termin između bilo koja dva termina. Takvi nizovi, koje smo u Trećem delu provizorno nazvali kontinuiranim, sada moraju da dobiju drugačije ime, pošto ćemo reč *kontinuiran* morati da rezervišemo za smisao koji joj daje Kantor. Predlažem da takve nizove zovemo *kompaktnim*[2]. Stoga, racionalni brojevi formiraju kompaktan niz. Mora se primetiti da u kompaktnom nizu postoji beskonačan broj termina između bilo koja dva, da ne postoje uzastopni termini, a da prostiranje između bilo koja dva termina (nezavisno od toga da li su uključeni u prostiranje ili ne) jeste opet kompaktan niz. Ako sada razmatramo bilo koji racionalan broj[3], recimo r, možemo relacijom prema r definisati četiri beskonačne klase racionalnih

[1] Cf. Kantor, *Math. Annalen*, Vol. XLVI, §10; Peano, *Rivista di Matematica*, Vol. VI, str. 126–140, a naročito str. 133.

[2] Takve nizove Kantor naziva *überall dicht.*

[3] Radi jednostavnosti sasvim ću se ograničiti na racionalne brojeve bez znaka. Proširenje na pozitivne ili negativne brojeve ne predstavlja nikakvu teškoću.

brojeva: (1) oni manji od *r*, (2) oni koji nisu veći od *r*, (3) oni koji su veći od *r* i (4) oni koji nisu manji od *r.* (2) i (4) se razlikuju od (1) i (3) samo zbog toga što (2) i (4) sadrže *r* a (1) i (3) ne sadrže *r*. Ali, ova činjenica vodi neobčnim razlikama u pogledu svojstava. (2) ima poslednji termin dok (1) nema; (1) je identično sa klasom racionalnih brojeva manjih od promenljivog termina od (1) dok (2) nema tu karakteristiku. Slično važi i za (3) i (4), ali ove dve klase imaju manji značaj u ovom slučaju nego u slučaju (1) i (2). Klase racionalnih brojeva koji imaju svojstva pod (1) nazivaju se *segmenti*. Segment racionalnih brojeva može da se definiše kao klasa racionalnih brojeva koja nije nulta niti je pak koekstenzivna sa samim racionalnim brojevima (to jest koja sadrži neke ali ne sve racionalne brojeve) i koja je identična sa klasom racionalnih koja je manja od (promenljivog) termina nje same, to jest sa klasom racionalnih *brojeva x* takvih da postoji jedan racionalni broj *y* date klase, takav da je *x* manje od *y*[1]. Sada ćemo videti da su segmenti dobijeni ovim metodom, ne samo od pojedinačnih racionalnih brojeva već i od konačnih i beskonačnih klasa racionalnih brojeva, uz uslov za beskonačne klase, da tu mora da postoji neki racionalan broj veći od bilo kog člana klase. Ovo se može vrlo jednostavno učiniti na sledeći način.

Neka je *u* bilo koja konačna ili beskonačna klasa racionalnih brojeva. Onda četiri klase mogu da se definišu na osnovu relacije prema *u*[2], naime, (1) oni manji od svakog *u*, (2) oni manji od promenljivog *u*, (3) oni veći od svakog *u* i (4) oni veći od promenljivog *u*, to jest takvi da za svaki od njih može da se nađe termin od *u* koji je manji od njega. Ako je *u* konačna klasa, onda ona mora da ima maksimalan i minimalan termin, pri čemu je maksimalan termin relevantan samo za (2) i (3), a minimalan samo za (1) i (4). Tako se ovaj slučaj svodi na prvi u kojem smo imali samo jedan jedini racionalan broj. Prema tome, ubuduće ću pretpostaviti da je *u* beskonačna klasa i, uz to, da

---

[1] Vidi *Formulaire de Mathématiques*, Vol. II, Deo III, §61 (Torino, 1899).

[2] Može da se definiše osam klasa, ali su nam četiri dovoljne.

bih sprečio svođenje na prvi slučaj, prilikom razmatranja (2) i (3) pretpostaviću da *u* nema maksimalni termin, to jest da je svaki termin od *u* manji od nekog drugog termina od *u*, a prilikom razmatranja (1) i (4) pretpostaviću da *u* nema minimalni termin. Za sada se ograničavam na slučajeve (2) i (3) i pretpostavljam, uz nepostojanje maksimalnog termina, postojanje racionalnih brojeva većih od bilo kog *u*, to jest postojanje klase (3). U ovim slučajevima klasa (2) će biti segment. Jer, (2) se sastoji od svih racionalnih brojeva koji su manji od promenljivog *u*; otuda, prvo, pošto *u* nema maksimalan termin, (2) sadrži celinu od *u*. Drugo, pošto je svaki termin iz (2) manji od nekog *u* koji samim tim pripada (2), svaki termin iz (2) je manji od nekog drugog termina iz (2), a svaki termin manji od nekog termina iz (2) je *a fortiori* manji od nekog *u* i stoga je termin iz (2). Stoga je (2) identično sa klasom termina manjih od nekog termina iz (2) i stoga predstavlja segment.

Tako dolazimo do sledećeg zaključka: ako je *u* samo jedan racionalan broj ili klasa racionalnih brojeva koji su svi manji od nekog fiksiranog racionalnog broja, onda racionalni brojevi manji od *u*, ako je *u* pojedinačan termin ili manje od promenljivog termina iz *u* ako je *u* klasa termina, uvek formiraju segment racionalnih brojeva. Ono što ja tvrdim jeste da segment racionalnih brojeva *predstavlja* realan broj.

260. Metod koji smo do sada upotrebljavali bio je metod koji može da se upotrebi u slučaju bilo kog kompaktnog niza. U nastavku će neke teoreme da zavise od toga što racionalni brojevi predstavljaju prebrojive nizove. Za sada ostavljam po strani raspetljavanje teorema koje od toga zavise i nastavljam razmatranje svojstava segmenata racionalnih brojeva.

Kao što smo videli, neki segmenti se sastoje od racionalnih brojeva koji su manji od nekog datog racionalnog broja. Međutim, iako neki nisu tako definisani, ipak mogu da budu tako definisani. Na primer, racionalni brojevi manji od promenljivog termina niza ·9, ·99, ·999 itd. isti su kao racionalni brojevi manji od 1. Ali, drugi segmenti koji odgovaraju onima koji se uobičajeno nazivaju iracionalnim brojevima ne mogu tako da se definišu. U sledećoj glavi ćemo videti kako je to vodilo iracionalnim brojevima. Za sada samo želim da istaknem dobro poznatu činjenicu da segmenti ne mogu jedan-jedan da se koreliraju sa racionalnim brojevima. Postoje klase racionalnih brojeva koje su definisane kao da su sastavljene od svih termina koji su manji od *promenljivog* termina beskonačne klase racionalnih brojeva koji nisu definljivi kao svi racionalni brojevi manji od nekog određenog racionalnog broja[1]. Štaviše, postoji više segmenata nego što postoji racionalnih brojeva i stoga niz segmenata ima svojstvo kontinuiranosti višeg reda od racionalnih brojeva. Segmenti formiraju niz na osnovu relacije celine i dela ili na osnovu logičkog uključivanja (isključujući identitet). Svaka dva segmenta su takva da je jedan od njih potpuno sadržan u drugom i na osnovu toga oni formiraju niz. Može se lako pokazati da oni formiraju kompaktni niz. Još izuzetnije je ovo: ako primenimo prethodni proces na niz segmenata koji formiraju segmente segmenata pozivanjem na klase segmenata, onda uviđamo da svaki segment segmenata može da se definiše kao svi segmenti koji su sadržani u izvesnom određenom segmentu. Stoga je segment segmenata koji je definisan klasom segmenata uvek identičan sa segmentom segmenata koji je definisan nekim jednim segmentom. Isto tako, svaki segment definiše segment segmenata koji može da se definiše jednom beskonačnom klasom segmenata. Rečeno Kantorovim jezikom, ova dva svojstva čine niz segmenata *savršenim*, ali objašnjenje tog termina moramo ostaviti za kasnije, dok ne pređemo na učenje o granicama.

Mogli bismo da definišemo naše segmente kao sve racionalne brojeve koji su veći od nekog termina klase *u* racionalnih brojeva. Ako to učinimo i ako uvedemo uslov da klasa *u* nema minimalni termin i da moraju da postoje racionalni brojevi manji od svakog *u*, onda dobijamo ono što se može nazvati gornjim segmentima koji se razlikuju od segemenata prethodne vrste, a koji se mogu nazvati donjim

---

[1] Cf. Deo I, Glava V, §61.

segmentima. Tada bismo uvideli da svakom gornjem segmentu odgovara donji segment koji sadrži sve racionalne brojeve koji nisu sadržani u gornjem segmentu, sa izuzetkom pojedinačnog racionalnog broja. Postojaće jedan racionalni broj koji ne pripada ni gornjem ni donjem segmentu onda kada je gornji segment definisan kao svi racionalni brojevi koji su veći od pojedinačnog racionalnog broja. U tom slučaju će se odgovarajući donji segment sastojati od svih racionalnih brojeva koji su manji od tog pojedinačnog termina, koji sam neće pripadati nijednom segmentu. Pošto postoji racionalan broj između bilo koja dva racionalna broja, klasa racionalnih brojeva koji nisu veći od nekog datog racionalnog broja nikada ne može da uvek bude identična sa klasom racionalnih brojeva koji su manji od nekog drugog, a klasa racionalnih brojeva koja ima maksmalni termin nikad ne može da bude segment. Stoga je u slučaju koji razmatramo nemoguće pronaći donji segment koji sadrži sve racionalne brojeve koji ne pripadaju datom gornjem segmentu. Ali, kada gornji segment ne može da se definiše pojedinačnim racionalnim brojem, onda će uvek biti moguće da pronađemo donji segment koji sadrži *sve* racionalne brojeve koji ne pripadaju gornjem segmentu.

Nula i beskonačno mogu da se uvedu kao granični slučajevi segmenata, ali u slučaju nule segment mora da bude one vrste koju smo gore nazvali (1), a ne vrste (2) o kojoj smo do sada govorili. Lako je konstruisati klasu racionalnih brojeva takvu da neki termin te klase bude manji od nekog datog racionalnog broja. U ovom slučaju klasa (1) neće sadržati termine i biće nulta klasa. To je realan broj nula koji, međutim, nije segment pošto je segment definisan kao klasa koja nije nulta. Da bi se uvela nula kao klasa vrste (2), morali bismo da počnemo od nulte klase racionalnih brojeva. Nijedan racionalan broj nije manji od termina nulte klase racionalnih brojeva i tako je klasa (2) u tom slučaju nulta klasa. Slično može da se uvede i realan broj beskonačno. Beskonačno je identično celoj klasi racionalnih brojeva. Ako imamo neku klasu *u* racionalnih brojeva takvu da nijedan racionalni broj nije veći od svih *u*-ova, onda je svaki racionalan broj sadržan u klasi racionalnih brojeva koji su manji od nekog *u*. Ili, pak, ako imamo klasu racionalnih brojeva kod koje je neki termin manji od bilo kog pripisanog racionalnog broja, rezultujuća klasa (4) (termina većih od nekog *u*) sadržaće svaki racionalan broj i stoga će predstavljati realan broj beskonačno. Stoga i nula i beskonačno moraju da se uvedu kao krajnji termini među realnim brojevima, ali ni nula ni beskonačno nisu segementi, u skladu sa definicijom.

261. Neki dati segment može da se definiše pomoću mnogo različitih klasa racionalnih brojeva. Može se smatrati da dve takve klase *u* i *v* imaju segment kao zajedničko svojstvo. Dve beskonačne klase *u* i *v* će definisati isti donji segment ako, kada je dato bilo koje *u*, postoji jedno *v* veće od njega, i, kada je dato bilo koje *v*, postoji jedno *u* koje je veće od njega. Ovo je takođe i *nužan* uslov ako nijedna od ovih klasa nema maksimalni termin. Klase *u* i *v* bismo onda sa Kantorom mogli da nazovemo koherentnim (*zusammengehörig*)[*]. Može se pokazati, ne uzimajući u obzir segmente, da je relacija koja je koherentna ujedno i simetrična i tranzitivna[1], odakle bismo onda pomoću principa apstrakcije mogli da zaključimo da oba termina stoje prema nekom trećem terminu u zajedničkoj relaciji, u kojoj nijedan od njih ne stoji prema nekom drugom terminu. Kao što smo videli iz prethodne diskusije, možemo smatrati taj treći termin segmentom koji oba definišu. Možemo proširiti reč *koherentan* na klase *u* i *v* od kojih jedna definiše gornji segment a druga donji segment koji među sobom uključuju sve racionalne brojeve uz najviše jedan izuzetak. Slične primedbe će, *mutatis mutandis*, važiti i u ovom slučaju.

---

[*] Kada se u savremenoj literaturi u kontekstu rasprava o zasnivanju teorije skupova i problemu strukture (linearnog) kontinuuma govori o Kantorovom uslovu koherentnosti, tada se najčešće misli na pojam *zusammenhängend* (o čijem tehničkom značenju će Rasel govoriti u §272 *infra*). Međutim, Rasel prevodi *zusammenhängend* rečju *kohezivan* i pažljivo razlikuje kohezivnost od koherentnosti tokom razmatranja Kantorovih definicija kontinuiteta počev od Glave XXXV (prim. stručnih redaktora prevoda).

[1] Cf. Kantor, *Math. Annalen*, XLVI i *Rivista di Matematica*, V, str. 158 i 159.

Videli smo da uobičajena svojstva realnih brojeva pripadaju segmentima racionalnih brojeva. Prema tome, nema matematičkog razloga za razlikovanje takvih segmenata od realnih brojeva. Ostaje da se objasne priroda granice, potom teorija iracionalnih brojeva, a potom i da se analiziraju prigovori koji će našu teoriju učiniti poželjnijom.

Napomena. Gorenavedena teorija je u suštini sadržana u članku profesora Peana koji smo već pomenuli („Sui Numeri Irrazionali“, *Rivista di Matematica*, VI, str. 126–140), a koji me je, kao i *Formulaire de Mathématiques*, naveo da prihvatim ovu teoriju. U tom članku su date odvojene definicije realnih brojeva (§2, br. 5) i segmenata (§8, ˙0) što bi moglo da nas navede da pomislimo da su one različite. Ali, nakon definicije segmenata pronalazimo primedbu (na str. 133): „Tako definisani segmenti se razlikuju od realnih brojeva samo u pogledu nomenklature“. Profesor Peano nastavlja tako što prvo navodi čisto tehničke razloge za razlikovanje segemenata i realnih brojeva na osnovu notacije, naime, da sabiranje, oduzimanje itd. realnih brojeva mora različito da se izvodi od analognih operacija koje mogu da se izvode nad segmentima. Stoga bi delovalo da je celokupno gledište koje zastupam sadržano u ovom članku. Istovremeno, tamo postoji neki manjak u pogledu jasnoće pošto iz definicije realnih brojeva deluje da se oni smatraju granicama klasa racionalnih brojeva, dok segment ni u kakvom smislu nije granica klase racionalnih brojeva. Isto tako, tamo nigde nije sugerisano – iz definicije realnih brojeva bi čak moglo da se zaključi i suprotno – da nijedan realan broj ne može da bude racionalan i nijedan racionalan realan. To se javlja tamo gde on ističe (na str. 134) da se 1 razlikuje od klase pravih razlomaka (što više nije slučaj u pogledu realnog broja 1 kada ga razlikujemo i od celog broja 1 i od racionalnog broja 1 : 1) ili kada kažemo da je 1 manje od √2 (u tom slučaju bih rekao da 1 mora da se inertpretira kao klasa pravih razlomaka, a ovo tvrđenje treba da se shvati kao da znači: pravi razlomci su neki, ali ne svi, od racionalnih brojeva čiji su kvadrati manji od 2). On dalje kaže (*ib.*): „Iako je realan broj određen sa i određujući za segment *u*, uobičajeno se smatra krajnošću, krajem ili gornjom granicom segmenta“, a ne postoji razlog za pretpostavku da segmenti koji nemaju racionalnu granicu uopšte imaju granicu. Stoga, iako priznaje (*ib*). da potpuna teorija iracionalnih brojeva *može* da se konstruiše pomoću segmenata, izgleda da ne shvata razloge (koje ćemo navesti u sledećoj glavi) zašto to *mora* da se učini – pri čemu su ti razlozi, doduše, više filozofski nego matematički.

Glava XXXIV

GRANICE I IRACIONALNI BROJEVI

262. Matematički tretman kontinuiteta u potpunosti počiva na učenju o granicama. Neki matematičari i neki filozofi su smatrali da je ovo učenje potisnuto infinitezimalnim računom i da je to pokazalo da je tačno da se infinitezimale pretpostavljaju u samom pojmu granice[1]. Ali, deluje mi da je moderna matematika konkluzivno pokazala da je ovo gledište pogrešno. Metod granica se ispostavio kao više ili manje fundamentalan. U ovoj glavi ću najpre da izložim opštu definiciju granice, a zatim ću da ispitam njenu primenu pri kreiranju iracionalnih brojeva.

Kompaktni niz može da se definiše kao niz u kojem postoji jedan termin između bilo koja dva. Ali, u takvom nizu je uvek moguće pronaći dve *klase* termina koje nemaju termin između sebe, i uvek je moguće svesti *jednu* od ovih klasa na pojedinačni termin. Na primer, ako je P generišuća relacija, a x bilo koji termin niza, onda je klasa termina koji prema x stoje u relaciji P klasa između koje i x ne postoji termin[2]. Tako definisana klasa termina je klasa dva segmenta

[1] Ovo je na primer Koenovo gledište u Cohen, *Das Princip der Infinitesimal-Methode und seine Geschichte*, Berlin, 1883; vidi str. 1, 2.

[2] Možda je suvišno objašnjavati da je termin između dve klase u i v kada stoji u relaciji P prema svakom terminu iz u, a u relaciji $\breve{P}$ prema svakom terminu iz v ili obratno.

određena x-om; ideja segmenta je ideja koja zahteva samo niz uopšte, a ne nužno numerički niz. U ovom slučaju, ako je niz kompaktan, za x se onda kaže da predstavlja *granicu* klase; kada postoji takav termin kao x, za segment se kaže da je završen, te stoga svaki završen segment u kompaktnom nizu ima svoj definišući termin kao granicu. Ali, ovo ne konstituiše definiciju granice. Da bi se dobila opšta definicija granice, treba razmotriti neku klasu u koja je sadržana u nizu generisanom relacijom P. Onda će, uopšte uzev, klasa u u pogledu nekog termina x koji joj ne pripada biti deljiva na dve klase, onu čiji termini stoje prema x u relaciji P (koju ću zvati klasom termina koji prethode x), i onu čiji termini stoje prema x u relaciji $\breve{P}$ (koju ću zvati klasom termina koji slede iza x). Ako je samo x termin klase u, onda razmatramo sve termine različite od x i oni su i dalje deljivi na gorenavedene dve klase koje možemo zvati $\pi_u x$ i $\breve{\pi}_u x$. Ako je $\pi_u x$ takvo da, ako je y bilo koji termin koji prethodi x, onda postoji termin iz $\pi_u x$ koji sledi iza y, to jest nalazi se između x i y, onda je x granica od $\breve{\pi}_u x$. Slično, ako je $\breve{\pi}_u x$ takvo da, ako je z bilo koji termin posle x, onda postoji termin iz $\breve{\pi}_u x$ između x i z, onda je x granica od $_u x$. Sada definišemo da je x granica od u ako je x ili granica od $\pi_u x$ ili od $\breve{\pi}_u x$. Treba primetiti da u može da ima mnogo granica i da sve te granice zajedno formiraju novu klasu koja je sadržana u nizu generisanom relacijom P. Ovo je klasa (ili, bolje rečeno, pomoću izvesnih daljih pretpostavki postaje klasa) koju Kantor označava kao prvi izvod klase u.

263. Pre nego što nastavimo dalje, možda bi bilo dobro da načinimo neke opšte primedbe elementarnog karaktera o problematici granica. Prvo, granice uglavnom pripadaju klasama koje su sadržane u kompaktnom nizu – klase koje mogu, kao ekstremni slučaj, da budu identične sa kompaktnim nizom o kojem je reč. Drugo, granica može ali ne mora da pripada klasi u čija je granica, ali uvek pripada nekom nizu u kome je klasa u sadržana i, ako je to termin iz u, onda je ona još i granica klase koja se sastoji od svih termina klase u, izuzev tog termina koji predstavlja granicu. Treće, nijedna klasa ne može da ima granicu ukoliko ne sadrži beskonačan broj termina. Jer, vratimo se našoj prethodnoj podeli, ako je *u* konačno, onda će i $\pi_u x$ i $\breve{\pi}_u x$ takođe biti konačni. Stoga će svako od njih da ima termin najbliži *x*, a između tog termina i *x* neće se nalaziti nijedan termin iz *u*. Stoga *x* nije granica od *u*, a pošto je *x* bilo koji termin ovog niza, onda *u* neće uopšte imati granice. Ovome se uobičajeno dodaje teorema da svaka beskonačna klasa, pod uslovom da su njeni termini sadržani između dva specifikovana termina niza generisanog relacijom *P*, mora da ima barem jednu granicu; ali, kao što ćemo videti, ova teorema zahteva interpretaciju pomoću segmenata i nije tačna u obliku u kom je formulisana. Četvrto, ako je *u* koekstenzivno sa celim kompaktnim nizom generisanim relacijom *P*, onda svaki termin tog niza predstavlja granicu klase *u*. Ovde ne može biti drugih termina koji su granice u istom smislu, pošto su granice definisane samo u relaciji prema ovom kompaktnom nizu. Da bi se dobile druge granice, morali bismo da posmatramo niz generisan relacijom *P* kao da formira deo nekog drugog kompaktnog niza – što je slučaj koji, kao što ćemo videti, može da nastane. U svakom slučaju, ako je *u* bilo koji kompaktan niz, svaki termin iz *u* je granica od *u*; da li *u* ima i druge granice zavsi od daljih okolnosti. Granica može generalno da se definiše kao termin koji neposredno sledi (ili neposredno prethodi) nekoj klasi termina koji pripadaju nekom beskonačnom nizu, a da ne sledi neposredno (ili prethodi, zavisno od slučaja) bilo kom terminu niza. Kao što ćemo videti, na ovaj način granice mogu generalno da se definišu u svim beskonačnim nizovima koji nisu progresije – kao na primer u nizu konačnih i transfinitnih celih brojeva.

264. Sada možemo da nastavimo i da razmotrimo različite aritmetičke teorije iracionalnih brojeva koje sve zavise od granica. Videćemo da, u egzaktnom obliku u kojem su ih njihovi izumitelji formulisali sve podrazumevaju aksiom u prilog kojem ne postoje nikakvi argumenti koji se tiču bilo filozofske nužnosti, bilo matematičke podesnosti, a protiv koga se mogu istaći teške logičke primedbe, a od kojeg je teorija realnih brojeva iz prethodne glave potpuno nezavisna.

Aritmetičke teorije iracionalnih brojeva nisu mogle da budu tretirane u Drugom delu pošto suštinski zavise od pojma poretka. Jedino pomoću iracionalnih brojeva je moguće da brojevi postanu kontinuirani u smislu koji je sada uobičajen među matematičarima; u Šestom delu ćemo videti da se nijedan drugi smisao kontinuiteta ne zahteva za prostor i vreme. Veoma je važno shvatiti logičke razloge koji čine neku aritmetičku teoriju iracionalnih brojeva nesumnjivo nužnom. U prošlosti je definicija iracionalnih brojeva uglavnom proizlazila iz geometrijskih razmatranja. Međutim, taj postupak je bio krajnje nelogičan jer, ako je primena brojeva na prostor proizvodila ništa drugo do tautologije, primenjeni brojevi su morali da budu nezavisno definisani; i, ako bi samo geometrijska definicija bila moguća, tu strogo govoreći ne bi bilo takvog geometrijskog entiteta kao što je onaj koji je definicija pretendovala da definiše. Algebarska definicija u kojoj su iracionalni brojevi bili uvedeni kao koreni algebarskih jednačina koje nemaju racionalne korene, bila je podložna sličnim primedbama pošto je ostalo da se pokaže da takve jednačine imaju korene; pored toga, ovaj metod će samo proizvesti takozvane algebarske brojeve koji predstavljaju beskonačno mali deo realnih brojeva i nisu kontinuirani u Kantorovom smislu, niti u smislu koji zahteva geometrija. U svakom slučaju, ako je moguće bez bilo koje dalje pretpostavke preći od aritmetike do analize i od racionalnih do iracionalnih brojeva, pokazati kako to može da se uradi predstavlja značajan logički produhvat. Sve generalizacije pojma broj – sa izuzetkom uvođenja imaginarnih brojeva koje može nezavisno da se sprovede – predstavljaju nužne posledice prihvatanja toga da prirodni brojevi formiraju progresiju. U svakoj progresiji termini stoje u dve vrste relacija, jedne koje konstituišu opšti analogon pozitivnih i negativnih celih brojeva, i druge koje predstavljaju analogon racionalnih brojeva. Racionalni brojevi formiraju prebrojiv kompaktni niz, a segmenti prebrojivih kompaktnih nizova, kao što smo videli u prethodnoj glavi, formiraju niz koji je kontinuiran u najstrožem smislu. Stoga sve sledi iz pretpostavljanja progresije. Ali, u ovoj glavi moramo da ispitamo iracionalne brojeve kao zasnovane na granicama i u tom smislu ćemo videti da oni ne slede bez neke nove pretpostavke.

Postoji nekoliko donekle sličnih teorija iracionalnih brojeva. Počeću od Dedekindove[1].

265. Iako su racionalni brojevi takvi da između bilo koja dva uvek postoji neki treći, ipak postoje mnogi načini da se *svi* racionalni brojevi podele na dve klase, takve da svi brojevi jedne klase dolaze posle svih brojeva druge klase, a nijedan racionalan broj se ne nalazi između ove dve klase, dok, ipak, prva klasa nema prvi termin, a druga nema poslednji termin. Na primer, svi racionalni brojevi, bez izuzetka, mogu da se klasifikuju u zavisnosti od toga da li su njihovi kvadrati veći ili manji od 2. Svi termini obe klase mogu da se urede u jedan niz u kojem postoji određeni presek pre kojeg dolazi jedna od klasa, a posle kojeg dolazi druga klasa. *Izgleda* da kontinuitet zahteva da neki termin mora da odgovara ovom preseku. Broj koji se nalazi između dve klase mora da bude novi broj pošto su svi stari brojevi klasifikovani. Ovaj novi broj koji je tako definisan položajem u nizu predstavlja *iracionalan* broj. Kada se ovi brojevi uvedu, ne samo što uvek postoji broj između bilo koja dva broja nego postoji i broj između bilo koje dve klase, od kojih jedna u celosti dolazi posle druge, a prva nema minimum, dok druga nema maksimum. Stoga možemo da proširimo na brojeve aksiom kojim Dedekind definiše kontinuitet prave linije (*op. cit*., str. 11):

„Ako sve tačke jedne linije mogu da se podele na dve klase, takve da je svaka tačka jedne klase levo od svake tačke druge klase, onda tu postoji jedna i samo jedna tačka koja proizvodi ovu podelu svih tačaka na dve klase, ovaj presek linije na dva dela".

---

[1] *Stetigkeit und irrationale Zahlen*, drugo izdanje, Brunswick, 1892.

266. Međutim, ovaj Dedekindov aksiom je prilično slobodno formulisan i zahteva poboljšanje na koje ukazuje izvođenje iracionalnih brojeva. Ako se *sve* tačke jedne linije podele na dve klase, ne preostaje nijedna tačka koja bi predstavljala presek. Ako *sve* znači isključiti tačku koja predstavlja presek, aksiom više ne karakteriše kontinuirani niz nego se primenjuje podjednako na sve nizove, na primer, na niz celih brojeva. Treba smatrati da se ovaj aksiom u pogledu podele ne primenjuje na sve tačke linije već na sve tačke koje formiraju neki kompaktni niz i koje su distribuirane duž cele linije, ali koje predstavljaju samo jedan deo tačaka linije. Aksiom uz ovo poboljšanje postaje prihvatljiv. Ako iz termina niza mogu da se izaberu neki koji bi formirali kompaktni niz koji je distribuiran duž celog prethodnog niza, i, ako ovaj novi niz uvek može da se podeli na Dedekindov način na dva dela između kojih se ne nalazi termin novog niza već jedan i samo jedan termin prvobitnog niza, onda je prvobitni niz kontinuiran u Dedekindovom smislu reči. Međutim, ovo poboljšanje u potpunosti razara samoočiglednost na koju se Dedekind jedino oslanja (na str. 11) za dokaz svog aksioma u primeni na pravu liniju.

Može da se načini i jedno drugo, donekle manje komplikovano, poboljšanje za koje mislim da daje ono što je Dedekind *mislio* da tvrdi svojim aksiomom. Možemo reći da je neki niz kontinuiran u Dedekindovom smislu onda i samo onda kada, ako su *svi* termini niza, bez izuzetka, podeljeni na dve klase tako da prva klasa u celosti prethodi drugoj u celosti, onda, kako god da je podela izvršena, ili prva klasa ima poslednji termin ili druga klasa ima prvi termin, ali nikad oba. Ovaj termin koji dolazi na jedan kraj jedne od dve klase onda može da se upotrebi na Dedekindov način za definisanje preseka. U diskretnim nizovima kakav je niz konačnih celih brojeva, postoji i poslednji termin prve klase i prvi termin druge klase[1], dok

---

[1] Ako ovaj niz sadrži pravi deo koji je progresija, istinito je samo *uopšte* ali ne bez izuzetka da prva klasa mora da ima poslednji termin.

se u kompaktnim nizovima kakav je niz racionalnih brojeva, gde nema kontinuiteta, ponekada dešava (mada ne u svakoj mogućoj podeli) da prva klasa nema poslednji termin, a da poslednja klasa nema prvi termin. Obe ove klase su isključene iz gorenavedenog aksioma. Ali, ne mogu da vidim nikakav trag samoočiglednosti u takvom aksiomu, bilo u primeni na brojeve, bilo na prostor.

267. Ostavljajući za trenutak po strani opšti problem kontinuiteta, vratimo se na Dedekindovu definiciju iracionalnih brojeva. Prvo pitanje koje se može postaviti jeste: Kakvo pravo imamo da pretpostavljamo egzistenciju takvih brojeva? Koji razlog imamo za pretpostavku da mora da postoji položaj između dve klase od kojih je jedna sasvim desno od druge i od kojih jedna ima minimum a druga maksimum? Ovo nije tačno za nizove uopšte, pošto su mnogi nizovi diskretni. To ne zahteva ni priroda poretka. I, kao što smo videli, kontinuitet je u izvesnom smislu moguć i bez toga. Zašto bi onda morali da postuliramo neki takav broj uopšte? Treba se pristetiti da se algebarski i geometrijski problemi, koje su iracionalni brojevi trebalo da reše, ne smeju ovde uzimati u obzir. Egzistzencija iracionalnih brojeva je u prošlosti izvođena iz takvih problema. Jednačina $x^2–2$ mora da ima koren čemu se u prilog govorilo da ukoliko x raste od 0 do 2, $x^2–2$ raste i najpre je negativno, a onda pozitivno; ako se x kontinuirano menja onda se tako menja i $x^2–2$; stoga $x^2–2$ mora da uzme vrednost 0 u prelazu od negativnog ka pozitivnom. Ili, bilo je dokazivano i da dijagonala jediničnog kvadrata očigledno ima preciznu i određenu dužinu x i da je ta dužina takva da je $x^2–2 = 0$. Ali, takvi argumenti nisu mogli da pokažu da je x zaista broj. Možemo smatrati da ovi argumenti jednako dobro pokazuju neadekvatnost brojeva u algebri i geometriji. Ova teorija je namenjena da dokaže aritmetičku egzistenciju iracionalnih brojeva. Ona je poželjnija od prethodnih teorija u pogledu toga kako je zamišljena, ali ne uspeva da ispuni tu zamisao. Ispitajmo detaljnije definiciju $\sqrt{2}$ dobijenu Dedekindovim metodom. Jedinstveno je to što, iako se racionalan broj nalazi između bilo koja dva pojedinačna racionalna broja, dve klase racionalnih brojeva mogu da se definišu tako da nijedan racionalan broj ne bude između njih iako su svi iz jedne klase veći od svih iz druge. Očigledno je da bar jedna od ovih klasa mora da se sastoji od beskonačnog broja termina. Jer, ako se ne bi sastojala, onda bismo mogli da izdvojimo dva termina suprotnih vrsta koji bi bili najbliži jedan drugom, i da ubacimo novi broj između njih. Ovaj broj bi bio između dve klase, suprotno hipotezi. Ali, kada je jedna od klasa beskonačna možemo urediti sve ili neke termine u niz termina koji se kontinuirano približava drugoj klasi a da je ne doseže i da nema poslednji termin. Pretpostavimo na trenutak da je naša beskonačna klasa prebrojiva. Tada dobijamo prebrojiv niz brojeva a_n koji svi pripadaju jednoj klasi, ali koji se kontinuirano približavaju drugoj klasi. Neka B bude fiksirani broj ove druge klase. Onda, između a_n i B uvek postoji neki drugi racionalni broj, ali on može da se izabere kao neki drugi od a-ova, recimo a_{n+1}, a pošto je niz a-ova beskonačan, na ovaj način ne dobijamo nužno broj koji ne pripada nizu a-ova. U definiciji iracionalnih brojeva, niz b-ova je takođe beskonačan. Pored toga, ako su b-ovi takođe prebrojivi, bilo koji racionalni broj broj između a_n i b_m je, za odgovarajuće vrednosti p i q, ili a_{n+p}, ili b_{m+q}, ili pak leži između a_{n+p} i a_{n+p+1} ili između b_{m+q} i b_{m+q+1}. U stvari, a_{n+p} se uvek nalazi između a_n i b_m. Sukcesivnim koracima se ne dobija nijedan termin koji se nalazi između svih b-ova i svih a-ova. Uprkos tome, i a-ovi i b-ovi su konvergentni. Jer, uzmimo da a-ovi rastu dok se b-ovi smanjuju. Onda se $b_n - a_n$ i $b_n - a_{n+1}$ kontinuirano smanjuju i stoga je $a_{n+1} - a_n$ koje je manje od oba manje od broja koji se kontinuirano smanjuje. Štaviše, ovaj broj se smanjuje bez granice; jer, ako je $b_n - a_n$ imalo granicu ε, broj $a_n+\varepsilon/2$ bi se na kraju nalazio između dve klase. Stoga $a_{n+1}-a_n$ postaje na kraju manji od bilo kog datog broja. Stoga su i a-ovi i b-ovi konvergentni. Pošto, štaviše, njihova razlika može da se učini manjom od bilo kog datog broja ε oni imaju istu granicu, ako uopšte imaju granicu. Ali, ova granica ne može da bude racionalan broj pošto se on nalazi između svih *a*-ova i svih *b*-ova. Izgleda da je to argument u prilog egzistencije iracionalnih brojeva.

Na primer, ako je

$$x = \sqrt{2} + 1, \text{ odnosno } x^2 - 2x - 1 = 0.$$

Onda je dalje

$$x = 2 + \frac{1}{x} = 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{x}}, \text{ i dalje } x - 1 - 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \ddots + \frac{1}{x}}}}}} = \text{ itd.}$$

Sukcesivni konvergenti koji konvergiraju kontinuiranom razlomku *$1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \ddots}}} =$ su takvi da su svi neparni konvergenti manji od svih parnih konvergenata, dok neparni konvergenti kontinuirano rastu a parni se kontinuirano smanjuju. Štaviše, razlika između neparnog i sledećeg parnog konvergenta se kontinuirano smanjuje. Stoga oba niza, ako imaju granicu, imaju istu granicu i ta granica je definisana kao $\sqrt{2}$.

Ali, postojanje granice je u ovom slučaju očigledno puka pretpostavka. Na početku ove glave smo videli da postojanje granice zahteva veći niz od onoga čiji je granica deo. Stvaranje granice posredstvom niza čiju granicu treba pronaći predstavljalo bi stoga logičku grešku. Bitno je da se rastojanje od granice neodređeno smanjuje. Ali, jedino se za rastojanje između uzastopnih termina zna da se neodređeno smanjuje. Štaviše, svi *a*-ovi su manji od b_n. Stoga se oni

---

* Ovakav razlomak se na srpskom jeziku zove verižni razlomak [od reči *verige* (lanac)]. Ovaj verižni razlomak je u originalnom izdanju (1903) složen na potpuno nerazumljiv način (po svoj prilici krivicom slovoslagača), što nije ispravljeno ni u kasnijim izdanjima, uključujući i poslednje na kojem je ovaj prevod zasnovan. Svi ti verižni razlomci su tek u ovom, srpskom izdanju prvi put ispravno napisani zahvaljujući intervenciji stručnih redaktora prevoda (prim. stručnih redaktora prevoda).

kontiunirano sve manje razlikuju od b_n. Ali, štagod da je n, b_n ne može da bude granica a-ova zato što se b_{n+1} nalazi između b_n i svih a-ova. Time ne može da se dokaže da granica postoji već samo da *ako* bi postojala, onda ne bi bila bilo koji od a-ova ili b-ova, niti pak neki drugi racionalan broj. Stoga nije dokazano da iracionalni brojevi postoje, već da *mogu* da budu samo pogodne fikcije za opisivanje relacija između a-ova i b-ova.

268. Vajerštrasova teorija iracionalnih brojeva donekle je slična Dedekindovoj. U Vajerštrasovoj teoriji imamo niz termina a_1, a_2, ..., a_n, ..., tako da je Σa_n za sve vrednosti n manje od nekog datog broja. Ovaj slučaj može da se predstavi, na primer, pomoću beskonačne decimalne ekspanzije. Razlomak 3˙14159..., ma koliko termina uzeli, ostaje manji od 3˙1416. Kao što ističe Kantor[1], u ovom metodu granica nije kreirana sumacijom već se mora pretpostaviti da već postoji kako bi $\sum_1^\infty a_n$ moglo da se definiše posredstvom te granice. Ovo je isto ono što smo našli i u Dedekindovoj teoriji: korišćenjem niza racionalnih brojeva ne može da se dokaže postojanje iracionalnih brojeva kao njihovih granica, ali se može dokazati da, *ako* postoji granica, onda ona mora da bude iracionalna.

Ova aritmetička teorija iracionalnih brojeva i u jednom i u drugom od gorenavedenih oblika izložena je sledećim primedbama. (1) Iz ove teorije se ne može dobiti dokaz postojanja bilo kojih brojeva osim racionalnih, ukoliko ne prihvatimo neki aksiom kontinuiteta različit od onog koji zadovoljavaju racionalni brojevi, a kao što smo do sada videli nema nikavih razloga u prilog takvom aksiomu. (2) Ako se dopusti postojanje iracionalnih brojeva, onda su oni samo specifikovani a ne definisani nizom racionalnih brojeva čije su granice. Ukoliko nisu nezavisno postulirani, onda ne možemo znati da nizovi o kojima je reč imaju granicu, a znanje iracionalnog broja koji je granica je pretpostavljeno u dokazu da on jeste granica. Stoga,

[1] *Mannichfaltigkeitslehre*, str. 22. Navodim Vajerštrasovu teoriju iz prikaza u Stolz, *Vorlesungen über allgemeine Arithmetik*, I.

iako bez ikakvog pozivanja na geometriju bilo koji dati iracionalan broj ne može da se *specifikuje* posredstvom beskonačnog niza racionalnih brojeva, ipak, pomoću samih racionalnih brojeva ne može da se dobije nikakav dokaz da uopšte postoje iracionalni brojevi, a njihovo postojanje mora da se dokaže pomoću nekog novog i nezavisnog postulata.

Druga primedba na ovu teoriju jeste da ona pretpostavlja da racionalni i iracionalni brojevi formiraju deo jednog istog niza generisanog relacijama *veće od* i *manje od*. Ovo izaziva istu vrstu teškoća za koje smo u Drugom delu uvideli da proizlaze iz koncepcije da su celi brojevi veći ili manji od racionalnih ili da su neki racionalni brojevi celi brojevi. Racionalni brojevi su u suštini relacije između celih brojeva, ali iracionalni brojevi nisu. Ako je dat beskonačni niz racionalnih brojeva onda mogu da postoje dva cela broja čija relacija je racionalni broj koji ograničava niz, ili može da ne bude takvog nekog para celih brojeva. Entitet koji je postuliran kao granica u ovom poslednjem slučaju nije više iste vrste kao termini niza koji on po pretpostavci ograničava, zato što svaki od njih predstavlja relaciju između celih brojeva, dok granica to nije. Za takve heterogene termine je teško pretpostaviti da mogu da stoje u relacijama *veće od* i *manje od* i, u stvari, konstitutivna relacija *veće od* i *manje od* iz koje proizlazi niz racionalnih brojeva mora da dobije novu definiciju za slučaj dva iracionalna broja ili za slučaj racionalnog i iracionalnog broja. Ta definicija kaže da je iracionalan broj veći od racionalnog kada iracionalni broj ograničava niz koji sadrži termine veće od datog racionalnog broja. Ali, ono što je ovde zapravo dato jeste relacija datog racionalnog broja prema klasi racionalnih brojeva, naime, relacija koja pripada segmentu definisanom nizom čija je granica dati iracionalni broj. I u slučaju dva iracionalna broja, jedan je definisan kao veći od drugog kada njegov definišući niz sadrži termine veće od bilo kojih termina definišućeg niza drugog – ovo je uslov koji se svodi na tvrđenje da segment koji odgovara jednom sadrži kao svoj pravi deo segment koji odgovara drugom. Ove definicije određuju relaciju koja je sasvim različita od nejednakosti dva racionalna broja, naime, logičku relaciju uključivanja. Stoga iracionalni brojevi ne mogu da formiraju deo niza racionalnih brojeva, ali novi termini koji odgovaraju racionalnim brojevima moraju da se pronađu pre nego što bi pojedinačni niz mogao da bude konstruisan. Kao što smo videli u poslednjoj glavi, takvi termini su segmenti, ali teorije Dedekinda i Vajerštrasa takve termine i dalje moraju da traže.

269. Iako, filozofski posmatrano, Kantorova teorija nije izražena sa zadovoljavajućom jasnoćom, ona mnogo lakše vodi interpretaciji koju i ja zastupam, a posebno je zamišljena za *dokazivanje* postojanja granica. On primećuje[1] da je u njegovoj teoriji postojanje granice strogo dokaziv iskaz i naglašava logičku grešku koja je sadržana u nastojanju da se postojanje granice izvede iz niza čija je ona granica (*ib.*, str. 22)[2]. Kantor počinje razmatranjem onoga što on naziva fundamentalnim nizovima (a što je jednako onome što ja nazivam progresijama) koji su sadržani u većem nizu. Svaki od ovih fundamentalnih nizova mora biti ili potpuno rastući ili potpuno opadajući. Dva takva niza se zovu koherentnim (*zusammengehörig*) pod sledećim uslovima:

(1) Ako su oba rastuća i posle svakog termina jednog uvek postoji termin drugog;

(2) Ako su oba opadajuća i pre svakog termina jednog uvek postoji termin drugog;

(3) Ako je jedan rastući, a drugi opadajući, i jedan potpuno prethodi drugom i postoji *najviše* jedan termin koji je između ta dva fundamentalna niza.

Relacija koherentnosti je simetrična po definiciji, a Kantor pokazuje da je i tranzitivna. U članku iz kojeg su preuzeta prethodna

---

[1] *Op. cit.*, str. 24.

[2] Kantorova teorija iracionalnih brojeva može da se pronađe u *op. cit.*, str. 23, kao i u Stolz, *Vorlesungen über allgemeine Arithmetik*, I, 7. Ja ću u početku slediti Štolcov prikaz jer mi deluje jasnije; to čini §10 članka sadržanog u *Math. Annalen*, XLVI i u *Rivista di Matematica*, V.

zapažanja Kantor se bavi opštijim temama od definicije iracionalnih brojeva. Ali, gorenavedeni opšti prikaz koherentnih nizova će nam pomoći da shvatimo teoriju iracionalnih brojeva. Ova teorija je izložena u *Mannichfaltigkeitslehre* (str. 23ff).

Fundamentalni niz racionalnih brojeva je definisan kao prebrojiv niz takav da, ako je dat neki broj ε, postoji najviše jedan konačan broj termina u nizu u kom apsolutne vrednosti razlika sledujućih termina prevazilaze ε. Drugim rečima, ako je dat ma koliko mali broj ε, razlika bilo koja dva termina niza koji oba dolaze nakon izvesnog termina nalazi se između $+\varepsilon$ i $-\varepsilon$. Takav niz mora da bude neki od sledeće tri vrste: (1) koji god broj ε da uzmemo, apsolutne vrednosti termina će, od nekog termina nadalje, sve biti manje od ε, koji god ε da smo uzeli; (2) od nekog termina nadalje, svi termini mogu biti veći od nekog pozitivnog broja ρ; (3) od nekog termina nadalje, svi termini mogu biti manji od nekog negativnog broja $-\rho$. Realan broj b mora da se definiše fundamentalnim nizom i u prvom slučaju se kaže da je nula, u drugom da je pozitivan, a u trećem da je negativan. Da bi se definisalo sabiranje itd. ovih novih brojeva zapazimo da, ako su a_ν i a'_ν ν-ti termini dva fundamentalna niza, niz čiji je ν-ti termin $a_\nu + a'_\nu$ ili $a_\nu - a'_\nu$, ili $a_\nu \times a'_\nu$ takođe je fundamentalan niz; dok ako realan broj definisan nizom (a_ν)[1] nije nula, (a'_ν/a_ν) takođe definiše fundamentalni niz. Ako su *b i b*' realni brojevi definisani nizovima (a_ν) i (a'_ν), onda su realni brojevi definisani pomoću $(a_\nu + a'_\nu)$, $(a_\nu - a'_\nu)$, $(a_\nu \times a'_\nu)$ i (a'_ν/a_ν) definisani da budu $b + b'$, $b - b'$, $b \times b'$ i b'/b. Zatim, prelazimo na definisanje relacija *jednako*, *veće od* i *manje od* nad realnim brojevima. Definišemo da $b = b'$ znači $b - b' = 0$; $b > b'$ znači da je $b - b'$ pozitivno, a $b < b'$ znači da je $b - b'$ negativno – što su termini koji su prethodno već definisani. Kantor dalje primećuje da u ovim definicijama jedan od brojeva mora da bude racionalan. To donekle može formalno da se opravda zapažanjem da je prebrojiv niz čiji su termini jedan isti racionalan broj fundamentalni niz, u

[1] Simbol (a_ν) označava ceo niz čiji je ν-ti termin a_ν, a ne samo taj termin.

skladu sa definicijom; stoga pri konstruisanju razlika $a_v - a'_v$ kojima je $b - b'$ definisano možemo da stavimo neki fiksiran racionalan broj a umesto a'_v za sve vrednosti v. Ali, posledica da možemo da definišemo $b - a$ ne sledi, i to iz sledećih razloga. Ne postoji apsolutno ništa u prethodnoj definiciji realnih brojeva što bi ukazivalo da je a realan broj definisan fundamentalnim nizom čiji su svi termini jednaki sa a. Jedini razlog zbog kojeg ovo deluje samoočigledno jeste da je definicija pomoću granica nesvesno prisutna navodeći nas da mislimo da, pošto je a očigledno granica niza čiji su termini svi jednaki sa a, a mora da bude realan broj definisan takvim nizom. Međutim, pošto Kantor s pravom insistira da je njegov metod nezavisan od granica koje, naprotiv, treba da se iz njega izvedu (str. 24–5), ne smemo dopustiti da ta predrasuda na nas u značajnijoj meri utiče. Ako ne grešim, ta predrasuda je zapravo i pogrešna. Ne postoji ništa u gorenavedenim definicijama što bi pokazivalo da realan i racionalan broj ikada mogu da budu ili jednaki ili nejednaki, a postoje vrlo jaki razlozi da se pretpostavi suprotno. Stoga takođe treba odbaciti i iskaz (str. 24) da, ako je b realan broj definisan fundamentalnim nizom (a_v), onda

$$\operatorname*{Lim}_{v=\infty} a_v = b$$

Kantor je s ponosom pretpostavio da njegova teorija čini ovaj iskaz strogo dokazivim. Ali, kao što smo videli, ne postoji ništa što pokazuje da racionalan broj može da se oduzme od realnog broja, i otuda je pretpostavljeni dokaz lažan. Ono što je tačno i što ima sve matematičke prednosti gore obrazložene teoreme jeste ovo: postoji realan broj povezan sa svakim racionalnim brojem a, naime, onaj koji je definisan fundamentalnim nizom čiji termini su svi jednaki sa a; ako je b realan broj definisan fundamentalnim nizom (a_v) i ako je b_v realan broj definisan fundamentalnim nizom čiji su termini jednaki sa a, onda je (b_v) fundamentalni niz realnih brojeva čija je granica b. Ali, iz ovoga možemo da zaključimo, kao što Kantor pretpostavlja (str. 24), da Lim a_v postoji, a to će biti tačno samo u slučaju kada (a_v)

ima racionalnu granicu. Granica jednog niza racionalnih brojeva ili ne postoji ili je racionalna; ni u jednom slučaju ona nije realan broj. Ali, u svim slučajevima fundamentalni niz racionalnih brojeva definiše realni broj koji nikada nije identičan sa bilo kojim racionalnim brojem.

270. Sada možemo da sumiramo ono što je rečeno o Kantorovoj teoriji: dokazivanjem da dva fundamentalna niza mogu da stoje u relaciji koja je koherentna i dokazivanjem da je ta relacija simetrična i tranzitivna, Kantor pomoću principa apstrakcije (koji je prećutno pretpostavljen) pokazuje da dva takva niza stoje u nekoj relaciji prema jednom trećem terminu i ni prema kojem drugom. Kada se naš niz sastoji od racionalnih brojeva, taj termin definišemo kao realan broj koji oba ova niza determinišu. Onda možemo da definišemo pravila operacije za realne brojeve kao i relacije jednakosti, *veće od* i *manje od* nad njima. Ali, princip apstrakcije nas ostavlja u sumnji u pogledu toga šta su zapravo realni brojevi. Međutim, izgleda da je jedno izvesno. Realni brojevi ne mogu da formiraju deo nekog niza koji sadrži racionalne brojeve zato što su racionalni brojevi relacije između celih brojeva a realni brojevi nisu, a konstitutivna relacija na osnovu koje relacije formiraju niz definisana je samo pomoću celih brojeva između kojih su oni relacije, tako da ista relacija ne može da važi između dva realna broja ili između realnog i racionalnog broja. U ovoj sumnji u pogledu toga šta realni brojevi mogu da budu uviđamo da segmenti racionalnih brojeva, kako su definisani u prethodnoj glavi, ispunjavaju sve zahteve postavljene Kantorovom definicijom, kao i one izvedene iz principa apstrakcije. Stoga nema logičkih razloga za razlikovanje segmenata racionalnih brojeva od realnih brojeva. Ako treba da se razlikuju, to onda mora biti na osnovu neke posredne intuicije ili nekog potpuno novog aksioma, kao što je onaj da svi nizovi racionalnih brojeva moraju da imaju granicu. Ali, to bi bilo fatalno po uniformni razvoj aritmetike i analize iz pet premisa za koje je Peano utvrdio da su dovoljne, a bilo bi i sasvim suprotno duhu onih koji su osmislili aritmetičku teoriju iracionalnih brojeva.

Naprotiv, prethodna teorija ne zahteva novi aksiom jer, ako postoje racionalni brojevi, onda moraju da postoje i segmenti racionalnih brojeva, a to otklanja ono što, matematički gledano, deluje kao sasvim nepotrebna komplikacija pošto, ako će segmenti da rade sve što se zahteva od iracionalnih brojeva, onda deluje suvišno uvoditi nov paralelni niz sa potpuno istim matematičkim svojstvima. Stoga zaključujem da iracionalan broj zapravo *jeste* segment racionalnih brojeva koji nemaju granicu, dok je realan broj, koji se obično identifikuje sa racionalnim, segment koji ima racionalnu granicu, a ovo se primenjuje, na primer, na realan broj definisan fundamentalnim nizom racionalnih brojeva čiji su svi termini jednaki. Ovo je teorija koja je pozitivno izložena u prethodnoj glavi i na koju smo ponovo podsetili nakon ispitivanja teorija iracionalnih brojeva koje su u opticaju. Najveći deo te teorije primenjuje se na kompaktne nizove uopšte, ali neke upotrebe fundamenalnih nizova, kao što ćemo videti u nastavku, pretpostavljaju ili numeričko merenje rastojanja i prostiranja ili da je prebrojiv kompaktni niz na izvestan način sadržan u našem nizu[1]. Međutim, cela ova teorija se primenjuje na kompaktne nizove dobijene iz neke progresije, kao što su racionalni brojevi dobijeni iz celih brojeva, te se stoga nijedno svojstvo brojeva ne podrazumeva osim činjenice da oni formiraju progresiju.

---

[1] Vidi Glavu XXXVI.

Glava XXXV

KANTOROVA PRVA DEFINICIJA KONTINUITETA

271. Filozofi su po pravilu shvatali pojam kontinuiteta kao nešto što ne može da se analizira. Oni su o kontinuitetu rekli mnogo stvari uključujući i hegelovski *dictum* da je sve diskretno kontinuirano i obratno[1]. Ovu primedbu koja predstavlja primer Hegelove uobičajene navike da se kombinuju suprotnosti poslušno su ponavljali svi njegovi sledbenici. Ali, u pogledu toga šta su podrazumevali pod kontinuitetom i diskretnošću, oni su o tome diskretno i kontinuirano ćutali. Samo jedna stvar je bila očigledna, a to je da šta god da su podrazumevali pod ovim pojmovima, to ne bi moglo da bude relevantno za matematiku ili filozofiju prostora i vremena.

U poslednjoj glavi Trećeg dela provizorno smo se složili da jedan niz nazovemo kontinuiranim ako postoji termin između bilo koja dva. Lajbnic[2] je uglavnom bio zadovoljan ovom definicijom i uopšte se smatralo da je ona dovoljna sve do Kantorovog revolucionarnog otkrića. Uprkos tome, i pre Kantorovog vremena je bilo razloga za nagađanje da je moguć kontinuitet višeg reda. Jer, sve od otkrića

---

[1] *Logik*, Volasov prevod, str. 188; *Werke*, V, str. 201.

[2] *Phil. Werke*, Gerhardovo izdanje, Vol. II, str. 515. Ali, cf. Cassirer, *Leibniz's System*, Berlin, 1901, str. 183.

nesamerljivosti u geometriji – otkrića čiji dokaz je izložen u desetoj knjizi Euklidovih *Elemenata* – bilo je verovatno da prostor ima svojstvo kontinuiteta višeg reda od kontinuiteta racionalnih brojeva, koji pak imaju svojstvo kontinuiteta one vrste koju smo definisali u Trećem delu. Složili smo se da vrstu kontinuiteta koja pripada racionalnim brojevima i koja se sastoji u tome da između bilo koja dva termina postoji treći nazovemo *kompaktnost*, a da bismo izbegli zbrku nikada neću govoriti o ovoj vrsti kao o kontinuitetu. Ali, druga vrsta kontinuiteta za koju smo utvrdili da pripada prostoru bila je tretirana, kao što primećuje Kantor[1], kao vrsta religiozne dogme i bila je izuzeta iz pojmovne analize koja je neophodna za njeno razumevanje. Uistinu, naročito su filozofi smatrali da to pokazuje da bilo šta što poseduje svojstvo kontinuiteta ne može da se valjano analizira na elemente. Kantor je pokazao da je to gledište pogrešno, na osnovu tačne definicije vrste kontinuiteta koja mora da pripada prostoru. Ova definicija, ukoliko predstavlja ono što objašnjava prostor, mora, kao što Kantor s pravom tvrdi[2], da bude formulisana bez pozivanja na prostor. Samim tim u njegovoj konačnoj definiciji pronalazimo samo ordinalne pojmove opšte vrste koji mogu u potpunosti da se egzemplifikuju u aritmetici. Dokaz da je tako definisan pojam tačno ona vrsta kontinuiteta koji pripada prostoru, moramo odložiti za Šesti deo. Kantor je dao svoju definiciju u dva oblika od kojih prva nije formulisana u *čisto* ordinalnim terminima, već takođe podrazumeva ili broj ili kvantitet. U ovoj glavi želim da prevedem njegovu prvu definiciju na što je moguće prostiji i manje tehnički jezik, a onda ću pokazati kako se nizovi koji su kontinuirani u ovom smislu javljaju u aritmetici i uopšte u teoriji bilo koje progresije. Drugom definicijom ćemo se baviti u sledećoj glavi.

---

1 *Mannichfaltigkeitslehre*, str. 28.

2 *Acta Math*. II, str. 403.

272. Da bi niz bio kontinuiran mora da ima dve karakteristike: mora biti *savršen* i *kohezivan* (*zusammenhängend*, *bien enchaînée*)[1]. Oba ova termina imaju tehničko značenje koje zahteva opširno objašnjenje. Počeću od drugog.

(1) Popularno rečeno, niz je kohezivan ili ima svojstvo kohezivnosti kada ne sadrži nikakve konačne praznine. Precizna definicija, onako kako ju je formulisao Kantor, glasi: „Nazivamo T kohezivnom kolekcijom tačaka ako za svake dve tačke t i t' iz T, za neki unapred dati broj ε mali koliko god to želimo, uvek postoji, na nekoliko načina, jedan konačan broj tačaka t_1, t_2, ... t_v koje pripadaju T tako da su rastojanja tt_1, t_1t_2, t_2t_3, ..., t_vt' sva manja od ε"[2]. Kao što ćemo videti, ovaj uslov se suštinski poziva na rastojanje. Nije neophodno da se razmatrana kolekcija sastoji od brojeva, niti da ε bude broj. Neophodno je samo to da kolekcija bude niz u kojem postoje rastojanja koja podležu Arhimedovom aksiomu i koja nemaju minimum, te da je ε proizvoljno rastojanje one vrste koja je predstavljena datim nizom. Ako je niz celo polje nekih asimetričnih tranzitivnih relacija ili ako se u celosti sastoji od termina koji stoje u izvesnoj asimetričnoj tranzitivnoj relaciji prema datom terminu, onda možemo da zamenimo rastojanje sa prostiranjem, a čak i ako je niz samo deo takvog niza, možemo da ga zamenimo prostiranjem u svim potpunim nizovima od kojih naš niz predstavlja deo. Ali, da bismo dali neko značenje koheziji moramo da imamo nešto numerički merljivo. Kasnije ću pokazati u kojoj meri je ovaj uslov neophodan, kao i šta sve može da se učini bez njega. Zahvaljujući ovom uslovu, naša razmatranja kvantiteta i mere iz Trećeg dela postaju relevantna za razmatranje kontinuiteta.

Ako rastojanja ili prostiranja ne podležu Arhimedovom aksiomu, onda postoje neka od njih koja nemaju konačnu numeričku meru s

---

[1] *Acta Math*. II, str. 405, 406; *Mannichfaltigkeitslehre*, str. 31.

[2] Reči „na nekoliko načina" deluju suvišno. Vivanti ih izostavlja: vidi *Formulaire de Mathématiques*, Vol. I, VI, §1, br. 22.

obzirom na neka druga rastojanja ili prostiranja. U tom slučaju više ne postoji analogija zahtevane vrste sa bilo racionalnim bilo realnim brojevima, a niz nužno nije kohezivan. Jer, neka su δ i d dva rastojanja i neka su takva da je za bilo koji konačan broj n, $n\delta$ manje od d. U ovom slučaju, ako je δ rastojanje ε, a d rastojanje tt', jasno je da uslov kohezivnosti ne može biti zadovoljen. Takvi slučajevi se zapravo javljaju i – što deluje paradoksalno – mogu nastati samo pukom interpolacijom termina u izvestan kohenzivni niz. Na primer, niz segmenata racionalnih brojeva je kohezivan, a kada ovi segmenti imaju racionalne granice, te granice nisu sadržane u njima. Pridodajmo sada nizu ono što se može nazvati *upotpunjenim* segmentima, to jest pridodajmo mu segmente koji imaju racionalne granice zajedno sa njihovim granicama. To su novi termini koji formiraju deo istog niza pošto stoje u relaciji celine i dela prema ranijim terminima. Ali, sada se razlika između segmenta i odgovarajućeg upotpunjenog segmenta sastoji od jednog jedinog racionalnog broja, dok se sve druge razlike u nizu sastoje od beskonačnog broja racionalnih brojeva. Tako Arhimedov aksiom pada, a novi niz nije kohezivan.

Uslov da su rastojanja u nizu takva da nemaju minimum zadovoljavaju i realni i racionalni brojevi, a nužno je, ako kohezija treba da se proširi na nenumeričke nizove, da, kada se izabere bilo koje jedinično rastojanje, onda moraju da postoje rastojanja čija je numerička mera manja od ε, gde je ε bilo koji racionalan broj. Jer, ako postoji minimalno rastojanje, onda ne možemo da učinimo naša rastojanja tt_1, t_1t_2, ... manjim od ovog minimalnog, što je suprotno definiciji kohezije. Ne samo da ne sme da postoji minimum rastojanja uopšte, već ni rastojanja od bilo kog termina ne smeju da budu minimalna. Otuda svaki kohezivni niz mora da bude kompaktan, to jest mora da ima termin između bilo koja dva.

Međutim, ne sme se pretpostviti da je svaki kompaktan niz kohezivan. Razmotrimo, na primer, niz formiran od 0 i $2 - m/n$ pri čemu su m i n bilo koja dva cela broja, takva da je m manje od n. U tom slučaju postoji termin između bilo koja dva, ali rastojanje od 0 ne može da bude manje od 1. Stoga ovaj niz, iako je kompaktan nije kohezivan. Međutim, ovaj niz nije potpun budući da predstavlja deo jedino niza racionalnih brojeva pomoću kojih se njegova rastojanja mere. U slučaju potpunog niza ovi uslovi se donekle razlikuju. Moramo da razlikujemo dva slučaja u zavisnosti od toga da li postoje rastojanja ili ne. (*a*) Ako postoje i ako jednaka rastojanja ne odgovaraju jednakim prostiranjima, može se dogoditi da, iako je niz kompaktan, rastojanja od nekog termina nikada ne postaju manja od nekog konačnog rastojanja. Ovaj slučaj bi mogao da se predstavi veličinama ako bismo prihvatili Majnongovo mišljenje da je rastojanje bilo koje konačne veličine od nule uvek beskonačno (*op. cit.,* str. 84). To je predstavljeno brojevima, ako merimo rastojanja (za šta postoje mnogi razlozi) pomoću log x/y. Stoga u ovom slučaju, s obzirom na rastojanja, niz nije kohezivan mada je potpun i kompaktan. (*b*) Ako ne postoje rastojanja već samo prostiranja, onda će, ako pretpostavimo Arhimedov aksiom, svako prostiranje biti manje od $n\varepsilon$ za neku odgovarajuću vrednost n. Otuda, ako podelimo prostiranje na n delova, bar jedan od njih će biti manji od ε. Ali, nema načina da se pokaže da svi ti delovi mogu da se učine manjim od ε osim ukoliko ne pretpostavimo ili aksiom linearnosti (da svako prostiranje može da se podeli na n jednakih delova) ili jedan kopmlikovaniji ali znatno opštiji aksiom koji bi omogućio da prostiranje d može da se podeli na n delova od kojih je svaki veći od $d/(n+1)$, a manji od $d/(n-1)$, koji god ceo broj da je n. Pod pretpostavkom ovog aksioma i Arhimedovog aksioma potpun i kompaktan niz mora biti kohezivan, ali ova dva aksioma zajedno čine potpunost nepotrebnom, a kompaktnost izlišnom. Stoga uviđamo da je kohezija u skoro svim slučajevima različit uslov od kompaktnosti. Kompaktnost je čisto serijalna, dok se kohezija suštinski poziva na brojeve ili na uslove numeričkog merenja. Kohezija implicira kompaktnost, ali kompaktnost nikada ne implicira koheziju osim u slučaju potpunog niza racionalnih ili realnih brojeva.

273. (2) Teže je objasniti šta se misli pod *savršenim* nizom. Niz je složen kada koincidira sa svojim prvim izvodom[1]. Da bismo objasnili ovu definiciju moramo da ispitamo pojam *izvoda* niza[2], a to zahteva objašnjenje pojma *granične tačke* niza. Generalno govoreći, termini niza su dvojake vrste, oni koje Kantor naziva *izolovanim* tačkama i oni koje naziva graničnim tačkama. Konačni niz ima samo izolovane tačke, a beskonačni niz mora definisati najmanje jednu graničnu tačku, mada ona ne mora da pripada nizu. Kantor je definisao graničnu tačku kao termin tako da u svakom intervalu koji sadrži taj termin postoji beskonačni broj termina niza (*ib*., str. 343). Ova definicija je formulisana preko tačaka na liniji, ali se u suštini ne poziva na prostor. Granična tačka može ali ne mora da bude termin prvobitnog niza. Skup svih graničnih tačaka naziva se prvim izvodom niza. Prvi izvod prvog izvoda naziva se drugim izvodom itd. Peano daje definiciju prvog izvoda klase realnih brojeva na sledeći način: neka je *u* klasa realnih brojeva i neka je *x* realan broj (koji može ali ne mora da pripada klasi *u*), tako da je donja granica apsolutne vrednosti razlikâ *x* od termina klase *u* različitih od *x* nula, onda klasa termina *x* koji zadovoljavaju ovaj uslov predstavlja prvi izvod od *u*[3]. Ova definicija je zapravo identična Kantorovoj, ali eksplicitnije pokazuje vezu izvoda sa granicama. Dakle, niz je savršen kada se sastoji tačno od istih termina kao i njegov prvi izvod, to jest kada su sve njegove tačke granične tačke i kada mu sve njegove granične tačke pripadaju.

274. Ali, s obzirom na poslednje tvrđenje, naime, da sve granične tačke niza moraju da mu pripadaju, neophodno je izvesno objašnjenje. Uzmimo, na primer, niz racionalnih brojeva. Svaki racionalan broj je granica nekog niza racionalnih brojeva i stoga su racionalni brojevi sadržani u svom prvom izvodu. Ali, što se tiče onih nizova

---

[1] *Acta Math*., II, str. 405.

[2] *Ib*., str. 341–4.

[3] *Formulaire*, Vol. II, br. 3 (1899), §71, 1˙0 i 4˙0

racionalnih brojeva koji nemaju racionalnu granicu, u poslednjoj glavi smo se složili da oni uopšte nemaju granicu. Otuda, svi nizovi racionalnih brojeva koji imaju granicu imaju racionalnu granicu, te bi stoga racionalni brojevi prema poslednjoj definiciji formirali savršen niz. Ali to nije slučaj. Kao što smo videli u vezi sa iracionalnim brojevima, Kantor veruje, što smo mi bili prinuđeni da smatramo pogrešnim, da svaki niz koji ispunjava izvesne uslove koji se mogu nazvati uslovima konvergencije mora da ima granicu. Zato on smatra da niz racionalnih brojeva koji nema racionalnu granicu ima iracionalnu granicu, zbog čega ima granicu koja ne pripada nizu racionalnih brojeva, te stoga niz racionalnih brojeva ne sadrži sve termine svog prvog izvoda. Zapravo se smatra da realni brojevi predstavljaju prvi izvod racionalnih brojeva. Ali, kada smatramo realne brojeve segmentima racionalnih, onda je nemoguće da prihvatimo ovo gledište, a kada osporavamo teoremu egzistencije za granice, neophodno je da modifikujemo Kantorovu definiciju savršenosti[1]. Sada moramo da razmotrimo tu modifikaciju.

Moramo reći da je niz savršen kada su sve njegove tačke granične tačke i kada bilo koji niz da se izabere iz našeg prvog niza, ako je to niz vrste koja se uobičajeno smatra onom koja definiše granicu, onda taj niz stvarno ima granicu koja pripada našem prvom nizu. Da bi se ovaj iskaz učinio preciznim moramo da ispitamo za koje uslove se uobičajeno smatralo da definišu granicu. U slučaju prebrojivog niza, oni su jednostavni i već smo ih uspostavili. Oni se svode na to da, ako je dato bilo koje ma koliko malo rastojanje ε, onda su svi termini našeg niza nakon nekog određenog termina, recimo m-tog, takvi da je apsolutna vrednost razlike bilo koja dva od njih manja od ε. Kao što ćemo videti, ovaj iskaz podrazumeva ili broj ili kvantitet, to jest nije čisto ordinalan. Neobično je da, iako pretpostavljeni uslov za postojanje granice ne može posredstvom našeg sadašnjeg metoda

---

[1] Ovo mesto je znalački razmatrao Kutira u *Revue de Mét. et de Morale*, mart 1900, str. 167.

da bude formulisan u čisto ordinalnim terminima, granica prebrojivog niza, ako postoji, uvek može da se definiše u čisto ordinalnim terminima. Razdvojiću Kantorove fundamentalne nizove u kompaktnom nizu na progresije i regresije u zavisnosti od toga da li raniji termini uvek stoje u relaciji *P* prema kasnijim terminima, ili uvek u relaciji $\breve{P}$ (pri čemu je *P* generišuća relacija kompaktnog niza u kojem su progresije i regresije o kojima je reč sadržane). Zatim se pretpostavlja da je kompaktni niz potpun. Termin *x* je onda granica progresije ako svaki termin progresije stoji prema *x* u relaciji *P*, dok svaki termin koji stoji prema *x* u relaciji *P* takođe stoji u toj relaciji prema nekom terminu progresije. Kao što ćemo videti, ova definicija je čisto ordinalna, a slična definicija će se primenjivati i na regresije.

Ispitajmo onda koji su uobičajeni uslovi za postojanje granice neprebrojivog niza. Kada pređemo na ispitivanje neprebrojivih nizova uvidećemo da je ograničavanje na prebrojive nizove nepodesno, te će stoga biti dobro da razmotrimo i druge nizove odjednom. Naravno, ako bilo koji prebrojivi niz koji je sadržan u našem širem nizu ispunjava uslove za granicu, onda će postojati odgovarajuća definicija granične tačke našeg šireg niza. Gornja ili donja granica celog našeg šireg niza ili nekog njegovog dela, ako postoji, može da se definiše isto kao i u slučaju progresije ili regresije. Ali, opšti uslovi za postojanje granice mogu da se postave samo pozivanjem na prebrojiv niz koji je sadržan u našem širem nizu. Treba primetiti da Kantorova definicija granične tačke pretpostavlja postojanje jedne takve tačke i da ne može da se pretvori u definiciju uslova pod kojima postoje takve tačke. To ilustruje veliki značaj Kantorovih fundamentalnih nizova.

Međutim, metod segmenata će baciti svetlo na ovu stvar. U Glavi XXXIII smo videli da bilo koja klasa termina u nizu definiše neki segment i da taj segment ponekad može, a ponekad ne može, da se definiše pomoću pojedinačnog termina. Kada može tako da se definiše, onda taj termin predstavlja njegovu gornju granicu, a ako taj termin ne pripada klasi kojom je segment bio definisan, onda on takođe predstavlja gornju granicu te klase. Ali kada segment nema gornju granicu, onda ni klasa kojom je segment definisan nema gornju granicu. Međutim, u svim slučajevima – a to je jedna od glavnih vrlina segmenata – segment koji je definisan beskonačnom klasom koja nema gornju granicu predstavlja gornju granicu segmenata definisanih pomoću nekoliko članova te klase. Stoga, bilo da klasa ima ili da nema gornju granicu, segmenti koje njeni različiti termini definišu uvek imaju granicu – pod uslovom da kompaktni niz u kojem je klasa sadržana ima termin koji dolazi posle svih termina te klase.

Sada bez pretpostavljanja postojanja granica u slučajevima gde to nije dokazivo možemo da izrazimo ono na šta se misli pod nizom koji sadrži svoj prvi izvod. Kada je bilo koja klasa termina sadržana u nekom kompaktnom nizu, uslovi za koje se uobičajeno kaže da osiguravaju postojanje gornje granice te klase, mada oni to ne osiguravaju, ipak osiguravaju gornju granicu klase segmenata definisanih pomoću nekoliko članova te klase. A u pogledu donjih granica važi isto što, *mutatis mutandis*, važi za ono što smo nazvali gornjim segmentima. Stoga možemo da definišemo: klasa *u* termina koji formiraju ceo ili deo niza savršena je kada je svaki od termina klase *u* gornja ili donja granica neke klase sadržane u klasi *u* i kada, ako je *v* neka klasa sadržana u klasi *u* i ako donji segmenti definisani pomoću nekoliko članova klase *v* imaju gornju granicu ili ako gornji segmenti imaju donju granicu, onda je ovaj granični segment jedan od onih koji može da se definiše pojedinačnim terminom klase *u*, to jest da ima termin klase *u* za svoju gornju odnosno donju granicu. Mora se priznati da je ova definicija komplikovanija od Kantorove, ali je oslobođena od neopravdanih pretpostavki postojanja granica.

Možemo da ponovimo definiciju savršenosti nešto manje komplikovanim jezikom. Ako je dat bilo koji niz i bilo koja klasa termina *u* sadržana u tom nizu, onda postoje jedan gornji i jedan donji segment koji odgovaraju svakom terminu iz *u*. Koji god da se beskonačni skup termina *v* odabere iz klase *u*, postoje izvesni uslovi za koje se uobičajeno kaže da obezbeđuju da v ima gornju granicu koja, priznaje se, ne može da pripada ni klasi u ni nizu u kojem je klasa u sadržana. Međutim, ono što ovi uslovi obezbeđuju jeste da klasa gornjih segmenata koji odgovaraju klasi v ima gornju granicu. Ako je ovaj niz savršen, klasa v će imati gornju granicu kad god odgovarajuća klasa segmenata ima granicu, a ta gornja granica od v će biti termin iz u. Ova definicija savršenosti zahteva da ovo mora da važi i za gornje i za donje granice, kao i za bilo koju klasu v sadržanu u klasi u.

275. Pošto je pitanje koje se tiče postojanja granica, a koje je izazvalo prethodne komplikacije, pitanje od izvesnog filozofskog značaja, ponoviću argumente protiv priznavanja postojanja granica u klasi nizova kojima pripadaju racionalni brojevi. U slučajevima u kojima niz nije savršen a njegov prvi izvod jeste, tu prvi izvod logički prethodi svojoj vlastitoj formaciji. Drugim rečima, tek pretpostavljanjem savršenog niza može da se pokaže da je to izvod niza koji nije savršen. Već smo videli da je ovo slučaj sa pojedinačnim iracionalnim brojevima, a lako je uvideti da je ovaj princip opšti. Bilo gde da izvod sadrži termin koji ne pripada prvobitnom nizu, taj termin je granica nekog prebrojivog niza koji predstavlja integralni deo prvog niza. Ako ovaj niz sa granicom ima opšti termin a_n, onda – ako formulišemo definiciju tako da se ne odnosi samo na nizove brojeva – uvek postoji određeni broj m za neko specifikovano ma koliko malo rastojanje ε takvo da, ako je n veće od m, onda je rastojanje između a_{n+p} i a_n manje od ε, koji god da je pozitivan ceo broj p. Iz ovoga je zaključeno da niz (a_n) ima granicu i pokazano je da u mnogim slučajevima ta granica ne može da pripada nizu iz kog je niz (a_n) izabran. Ali, zaključak da postoji granica predstavlja nepouzdano izvođenje. Taj zaključak se može podržati ili prethodnom upoznatošću sa terminom koji je granica ili nekim aksiomom koji bi postojanje takvog termina činio nužnim. Kada smo nezavisno upoznati sa terminom koji je granica, onda lako možemo da pokažemo da je taj termin granica. Ali, kada nismo, onda ne možemo da dokažemo da granica uopšte postoji, osim ako ne uvedemo neki aksiom kontinuiteta. Jedan takav aksiom uveo je Dedekind, ali smo videli da je on nezadovoljavajući. Princip apstrakcije koji pokazuje da dva koherentna niza imaju nešto zajedničko potpuno zadovoljavaju i segmenti. U nekim slučajevima, među kojima je i slučaj racionalnih brojeva, izgleda da konstitutivna relacija niza koji nije savršen ne može da važi između bilo kojih termina koji ne pripadaju tom nizu, tako da je postojanje granica koje ne pripadaju nizu sasvim nemoguće. Jer, granica mora da ima određeni položaj u nizu kojeg niz koji on ograničava predstavlja deo, a to zahteva neku konstitutivnu relaciju u kojoj granica kao i granični termini mogu da stoje. Nezavisni potpuni niz kao što je niz racionalnih brojeva zapravo ne može da ima bilo koje granične tačke koje mu ne pripadaju. Jer, ako je *R* konstitutivna relacija, a dva termina *a* i *b* stoje u relaciji *R*, onda bilo koji treći termin *c* koji stoji u toj relaciju ili u njenom konversu ili prema jednom od ili prema oba termina *a* i *b*, pripada istom nizu kao i *a* i *b*. Ali granica, ako postoji, mora da stoji u konstitutivnoj relaciji prema terminima koje ograničava, te stoga mora da pripada potpunom nizu kome oni pripadaju. Stoga, bilo koji niz koji ima aktualne granične tačke koje mu ne pripadaju predstavlja samo deo nekog potpunog niza, a potpuni niz koji nije savršen predstavlja niz u kojem granice koje su definisane na uobičajen način, ali koje ne pripadaju tom nizu, uopšte ne postoje. Stoga, u svakom potpunom nizu ili neke definljive granice ne postoje ili niz sadrži svoj prvi izvod.

Da bismo učinili proizvoljnost pretpostavljanja postojanja granica još očiglednijom, pokušajmo da formulišemo besprekorniji aksiom kontinuiteta od Dedekindovog. Uvidećemo da on i dalje može da se porekne potpuno nekažnjivo.

Kada se izvestan broj položaja u nizu kontinuirano razlikuje sve manje i manje i za koje se zna da svi moraju biti na jednoj strani od nekog datog položaja, onda mora da postoji (tako bi naš aksiom mogao da glasi) *neki* položaj prema kojem se svi drugi neodređeno približavaju tako da ne može da se specifikuje rastojanje koje bi bilo toliko malo da položaji ne bi mogli da se jedni drugima približe bliže no što je to rastojanje. Ako se ovaj aksiom prizna, onda sledi da svi nizovi koji nisu savršeni i čiji su prvi izvodi savršeni pretpostavljaju te prve izvode i treba ih smatrati odabirima iz njih. Ispitajmo posledice osporavanja našeg aksioma u slučaju niza brojeva. U tom slučaju bi moglo prenagljeno da se pretpostavi da bi položaj koji je najbliži svim terminima a_n, ali koji im ne pripada, bio (recimo) p gde je $p - a_n$ veće od ε za neku odgovarajuću vrednost ε, ma koje n da je u pitanju. Ali, ako je naš niz kompaktan, onda postoji termin između p i $p - \varepsilon$, recimo p'. Stoga je $p' - a_n$ manje od $p - a_n$, koliko god da je n. Stoga je p' bliže svim a-ovima od p, suprotno hipotezi. Ali, prethodno osporavanje nije direktno i činjenica da ono deluje korektno ilustruje greške koje je u ovoj problematici teško izbeći. Ovaj aksiom glasi: postoji termin kome se a-ovi približavaju onoliko blizu koliko želimo. Osporavanje se sastojalo u sledećem: postoji termin najbliži a-ovima, ali na konačnom rastojanju od njih. Osporavanje bi trebalo da glasi ovako: ne postoji termin kome se a-ovi približavaju onoliko koliko želimo. Drugim rečima, koji god termin da specifikujemo, recimo p, postoji neko konačno rastojanje ε, tako da je $p - a_n$ veće od ε, koliko god a_n bilo. Ovo je istinito u slučaju niza racionalnih brojeva koji nemaju racionalnu granicu. U tom slučaju ne postoji termin koji je najbližii a-ovima već je na konačnom rastojanju, dok takođe, ma koji termin izvan a-ova specifikovali (izuzev u slučajevima gde naš niz ima racionalnu granicu), nijedan od a-ova se ne približava bliže ovom terminu negoli izvesnom konačnom rastojanu ε. Svaki termin izvan a-ova je na nekom rastojanju većem od konačnog od svih njih, ali ne postoji konačno rastojanje koje svaki termin izvan a-ova premašuje. Uvođenje iracionalnih brojeva uvodi simetriju u ovo neobično stanje stvari tako da postoji termin kome se a-ovi neodređeno približavaju u istoj meri u kojoj se niz termina neodređeno približava a-ovima. Kada se iracionalni brojevi ne priznaju, ako imamo termin p posle svih a-ova i malo rastojanje ε, onda, ako je ε specifikovano, p može da se odabere tako da je $p - a_n$ manje od ε, koliko god da je n; ali, ako je p specifikovano, ε uvek može da se pronađe (osim kada je granica racionalna) tako da $p - a_n$ bude veće od ε, ma koliko da je n. Iako je ovo stanje stvari neobično, ono nije samoprotivrečno. Stoga je priznavanje iracionalnih brojeva, za razliku od segmenata, logički nepotrebno, a pošto je i matematički uzev suvišno i fatalno po teoriju racionalnih brojeva, ne postoji ni razlog u prilog priznavanja iracionalnih brojeva, a ni strogi razlozi protiv toga. Stoga naposletku bilo koji aksiom koji je zamišljen da pokaže postojanje granica – u slučajevima u kojima to ne može drugčije da se pokaže – mora biti odbačen, a Kantorova definicija savršenosti mora da se modifikuje na način na koji smo mi gore to uradili. Ovaj zaključak ću ubuduće smatrati ustanovljenim.

Pošto smo sada analizirali Kantorovu prvu definiciju kontinuiteta, nastavimo sa ispitivanjem njegove kasnije, ordinalne definicije kao i sa primenom njenih različitih delova na nizove koji su opštiji od nizova brojeva, da bismo ukazali, ako je moguće, na tačna mesta na kojima se ti različti delovi zahtevaju.

Glava XXXVI

ORDINALNI KONTINUITET[1]

276. Kao što smo videli, definicija kontinuiteta koju smo ispitali u prethodnoj glavi nije bila čisto ordinalna; ta definicija je na bar dva mesta zahtevala nekakvo pozivanje ili na brojeve ili na numerički merljive veličine. Uprkos tome, izgleda da je kontinuitet čisto ordinalni pojam i to je navelo Kantora da konstruiše definiciju koja je oslobođena svih elemenata koji su poretku spoljašnji[2]. Sada ću da ispitam ovu definiciju kao i neke druge koje bi mogle da se predlože. Videćemo da sve dok je pozivanje na broj i na kvantitet isključeno, postoje teoreme od velikog značaja, posebno u pogledu fundamentalnih nizova koje, s obzirom na bilo koju predloženu ordinalnu definiciju, osim Kantorove, ostaju nedokazive i za koje se može pretpostaviti da su ponekad lažne[3] – na osnovu čega zasluge Kantorove definicije koju ćemo sada navesti postaju očigledne.

---

[1] Ova glava se bavi istim sadržajem kao i Kutiraov članak „Sur la Définition du Continu", *Revue de Métaphysique et de Morale*, Mart 1900. Uglavnom sam saglasan sa ovim člankom u kome može da se pronađe mnogo od onoga što sam rekao u prethodnim glavama i što ću reći u ovoj.

[2] *Math. Annalen*, XLVI.

[3] Matematički dokazi ovakvih teorema koji još nisu dobro poznati mogu da se pronađu u RdM, VII, 3.

277. Kantorova definicija kontinuuma u njegovom kasnijem članku[1] glasi ovako. Polazimo (§9) od tipa niza koji je predstavljen racionalnim brojevima većim od 0 a manjim od 1 i poređanih po veličini. Ovaj tip nazivamo η. Niz ovog tipa definišemo pomoću sledećih karakteristika. (1) Taj niz je prebrojiv, to jest kada se njegovi termini postave u pogodan poredak (koji pak mora da se razlikuje od onog u kome su dati), onda možemo da ih dovedemo u jedan-jedan korespondenciju sa konačnim celim brojevima. (2) Ovaj niz nema prvi ili poslednji termin. (3) Postoji termin između bilo koja dva, to jest ovaj niz je kompaktan (*überall dicht*). Zatim se dokazuje da ove tri karaktaristike u potpunosti definišu tip poretka koji je predstavljen pomoću racionalnih brojeva, što znači da postoji jedan-jedan korespondencija između bilo koja dva niza koji imaju ova tri svojstva i u kojima raniji termini odgovaraju ranijim terminima, a kasniji termini kasnijim terminima. To je ustanovljeno upotrebom matematičke indukcije koja je primenljiva zato što su nizovi ovog tipa prebrojivi. Stoga su svi nizovi koji su prebrojivi, beskrajni[2] i kompaktni, slični u pogledu poretka (ordinalno slični). Sada prelazimo (§10) na razmatranje fundamentalnih nizova sadržanih u bilo kom jednodimenzionalnom nizu *M*. Pokazujemo (na način koji je već bio objašnjen) na šta se misli kada se kaže da su dva fundamentalna niza *koherentna*, i dajemo ordinalnu definiciju granice fundamentalnih nizova, naime, u slučaju progresije granica dolazi posle cele progresije, ali svaki termin pre granice dolazi pre nekog termina progresije uz odgovarajuću definiciju granice regresije. Dokazujemo da nijedan fundamentalni niz ne može da ima više od jedne granice i da, ako fundamentalni niz ima granicu, onda je ona i granica svih koherentnih nizova i, takođe, da su dva fundamentalna niza od kojih je jedan deo drugog koherentni. Bilo koji termin od *M* koji je granica nekog fundamentalnog niza u *M* naziva se *glavni* termin od *M*. Ako su svi

[1] *Math. Annalen*, XLVI, §11.

[2] To jest koji nemaju ni početak ni kraj.

termini od *M* glavni termini, *M* se onda naziva niz koji je *gust u sebi (insichdicht*). Ako svaki fundamentalni niz u *M* ima granicu u *M*, *M* se onda naziva *zatvorenim* (*abgeschlossen*)[1]. Ako je *M* i zatvoren i u sebi gust niz, onda je *savršen.* Sva ova svojstva, ako pripadaju nizu *M*, pripadaju i svakom nizu koji je ordinalno sličan nizu *M*. Sa ovim pripremama najzad stižemo do definicije kontinuuma (§11). Neka je θ tip niza kojem pripadaju realni brojevi od 0 do 1 uključujući i 0 i 1. Onda je θ, kao što znamo, savršen tip. Ali, to samo po sebi ne karakteriše θ. Taj niz ima još i svojstvo da sadrži u sebi niz tipa η kojem pripadaju relacije na takav način da između bilo koja dva termina niza θ postoje termini niza η. Odatale proizlazi sledeća definicija kontinuuma:

Jednodimenzionalni kontinuum *M* je niz koji je (1) savršen, (2) sadrži u sebi prebrojivi niz *S*, od kojeg postoje termini između bilo koja dva termina niza *M*.

Nije neophodno ovoj definiciji dodati druga svojstva koja su potrebna kako bi se pokazalo da *S* jeste tipa η. Jer, ako bi *S* imalo prvi i poslednji termin, onda bi to bio i prvi i poslednji termin od *M*; stoga bismo mogli da ga uklonimo iz *S*, ostavljajući niz koji i dalje zadovoljava uslov (2) ali koji ne bi imao prvi i poslednji termin, a uslov (2) zajedno sa uslovom (1) osigurava da je *S* kompaktan niz. Kantor dokazuje da je svaki niz *M* koji zadovoljava gorenavedene uslove ordinalno sličan brojevnom kontinuumu, to jest realnim brojevima između 0 i 1 uključujući tu i 0 i 1; otuda sledi da gornja definicija uključuje potpuno istu klasu nizova kao što su oni koji su bili uključeni u Kantorovu prethodnu definiciju. On ne tvrdi da je ova nova definicija čisto ordinalna i na prvi pogled bi moglo da se posumnja da li je ona takva. Pogledajmo radi nas samih da li su neki izvan-ordinalni pojmovi u njoj sadržani.

---

[1] Ovo ne treba pomešati sa elementarnim smislom zatvorenog niza koji smo razmatrali u Delu IV.

278. Jedino mesto u pogledu kojeg bi mogla da nastane sumnja je ono koje se tiče uslova prebrojivosti. Biti prebrojiva kolekcija znači biti kolekcija čiji su svi termini termini neke progresije. Ovaj pojam je, za sada, čisto ordinalan. Ali, u pretpostavljenom slučaju niza racionalinih brojeva ili bilo kojeg ordinalno sličnog niza, termini koji formiraju niz moraju moći da se urede na dva način, jedan u kojem formiraju kompaktni niz i drugi u kojem formiraju progresiju. Da bi se otkrilo da li dati skup termina može da se uredi na ova dva načina ili ne potrebni su, uopšte uzev, uslovi različiti od ordinalnih, a ipak je sam pojam o kojem je ovde reč čisto ordinalan. Na osnovu sličnosti svih takvih nizova sa nizom racionalnih brojeva (koji podrazumeva samo ordinalne ideje) znamo da nijedan takav niz nije savršen. Ali, preostaje da se vidi da li ovo možemo da dokažemo bez pozivanja na posebna svojstva racionalnih brojeva koja proizlaze iz postojanja niza u kojem postoji rastojanje. Zapravo znamo da prebrojivi niz može biti savršen[1]. Ali, mi ovde želimo da damo čisto ordinalan dokaz ove teoreme. Takav dokaz je pak lako dati. Jer, uzmimo termine našeg prebrojivog kompaktnog niza *S* redosledom u kojem oni formiraju progresiju i u tom poretku ih nazovimo *u*. Polazeći od prvog u ovom poretku kojeg ćemo nazvati x_0 mora da postoji jedan termin koji u drugom poretku *S* sledi nakon x_0. Uzmimo prvi takav termin, x_1, kao drugi termin u fundamentalnom nizu *v*. Taj termin ima konačan broj prethodnika u progresiji *u* i stoga ima sledbenike u *S* koji su takođe sledbenici u *u* zato što je broj sledbenika u *S* uvek beskonačan. Uzmimo prvi od ovih zajedničkih sledbenika, recimo x_2, kao treći termin našeg fundamentalnog niza *v*. Postupajući na ovaj način možemo da konstruišemo rastući fundamentalni niz u *S* čiji termini stoje u istom poretku u *u* kao i u *S*. Ovaj niz ne može da ima granicu u *S* zato što svaki termin x_n sledi, u *S*, za svakim terminom koji mu u *u* prethodi. Stoga će bilo koji termin od *S* biti premašen nekim terminom x_n našeg fundamentalnog niza *v* i otuda

[1] *Acta Mathematica*, II, str. 409.

ovaj fundamentalni niz nema granicu u *S*. Stoga je teorema da prebrojiv beskrajni niz ne može da bude savršen čisto ordinalna. Od ove tačke nadalje nema teškoća i naša prethodna teorija segmenata nam omogućava da stvar jednostavno izrazimo. Ako je dat prebrojiv, beskrajan, kompaktan niz *S*, konstruišemo sve segmente definisane fundamentalnim nizom u *S*. Oni formiraju savršen niz i između bilo koja dva termina niza segmenata postoji segment čija je gornja (ili donja) granica termin od *S*. Ovakvi segmenti koji mogu da se nazovu racionalnim segmentima predstavljaju nizove istog tipa kao *S* i sadržani su u celom nizu segmenata na zahtevani način. Stoga je ordinalna definicija kontinuuma potpuna.

279. Ne sme se pretpostaviti da kontinuitet, onako kako je gore definisan, u aritmetici može da bude egzemplifikovan jedino zaobilaznim putem od celih do racionalnih brojeva, a odatle potom do realnih brojeva. Naprotiv, sami celi brojevi mogu da se učine takvim da ilustruju kontinuitet. Razmotrimo sve moguće beskonačne klase celih brojeva i uredimo ih po sledećem planu. Od dve klase *u* i *v* od kojih je najmanji broj u *u* manji od najmanjeg broja u *v*, *u* dođe prvo. Ako je prvih *n* termina u *u* i *v* identično dok se termini na mestu (n+1) razlikuju, onda onaj koji je manji treba da dođe prvi. Ovaj niz ima prvi termin, naime, celu klasu celih brojeva, ali ne i poslednji termin. Međutim, bilo koji upotpunjeni segment niza je kontinuirani niz, kao što i sam čitalac može lako da vidi. Prebrojiv kompaktni niz koji je u njemu sadržan sastavljen je od onih beskonačnih klasa koje sadrže sve brojeve veće od nekog broja, to jest od onih klasa koje sadrže sve osim konačnog broja brojeva. Stoga su klase konačnih celih brojeva same dovoljne za generisanje kontinuiranih nizova.

280. Kao što ćemo videti, prethodna definicija zavisi od progresija. Pošto progresije predstavljaju samu suštinu diskretnosti, deluje paradoksalno zahtevati ih za definiciju kontinuiteta[1]. I, na kraju,

---

[1] Gospodin Vajthed je pokazao da je sledeća jednostavnija definicija ekvivalentna Kantorovoj. Niz je kontinuiran kada (1) svaki gornji i donji segment

pošto je izvesno da u prošlosti ljudi nisu povezivali neku preciznu ideju sa rečju *kontinuitet*, definicija koju usvajamo je u određenoj meri proizvoljna. Nizovi koji imaju svojstva navedena u Kantorovoj definiciji bi uopšte uzev mogli da se nazovu kontuiniranim nizovima ali bi takvi bili i mnogi drugi nizovi koje njegova definicija isključuje. U svakom slučaju je vredno istražiti šta može da se uradi pomoću kompaktnog niza bez progresija.

Neka je *u* bilo koji beskrajan kompaktni niz čija je generišuća relacija *P* o kojoj ništa više nije poznato. Onda, pomoću bilo kog termina ili bilo koje klase termina iz niza *u* možemo da definišemo segment od *u*. Označimo sa *U* klasu svih donjih segmenata od *u*. Donji segment, ne škodi da ponovimo, predstavlja klasu *v* termina sadržanih u nizu *u* koja nije nulta i koja nije koekstenzivna sa *u* i koja je takva da *v* nema poslednji termin, a svaki termin koji prethodi nekom *v* je neko *v*. U obrnutom slučaju, kada *v* nema prvi termin i kada je svaki termin koji sledi za nekim *v* neko *v*, *v* se onda naziva gornjim segmentom. Tada je lako dokazati da se svaki segment sastoji od svih termina koji prethode (ili slede) ili nekom pojedinačnom terminu iz *u* ili promenljivom terminu neke klase termina iz *u* i da svaki pojedinačni termin i svaka klasa termina definiše gornji i donji segment na ovaj način. Onda, ako sa *V* označimo klasu gornjih segmenata, lako je dokazati da su i *U* i *V*, takođe beskrajni kompaktni nizovi čija je generišuća relacija relacija celine ili dela dok, ako *u* ima jedan ili dva kraja onda ih imaju i *U* i *V*, mada krajnji termini nisu segmenti prema definiciji. Ako sada nastavimo da razmatramo segmente u *U* ili *V* (recimo u *U*) uvidećemo da segment *U*-ova koji je definisan bilo kojom klasom *U*-ova uvek može da se definiše nekim pojedinačnim *U* koje, ako je klasa beskonačna i ako nema

ima granicu a niz ima prvi i poslednji termin; (2) neki prebrojiv kompaktni niz je sadržan u njemu na takav način da postoje termini tog drugog niza između svaka dva termina prvobitnog niza. U ovoj definiciji progresije su relevantne samo za definisanje prebrojivog niza.

poslednji termin, predstavlja gornju granicu klase, i koje, u svim slučajevima predstavlja logički zbir svih članova te klase – članova koji su, moramo se podsetiti, svi same klase sadržane u u[1]. Stoga sve klase koje su sadržane u U i koje nemju poslednji termin imaju gornju granicu u U i, takođe (a što predstavlja različit iskaz), sve klase koje su sadržane u U i koje nemaju prvi termin imaju donju granicu u U osim u slučaju u kojem je donja granica logička nula ili nulta klasa, a ta donja granica uvek predstavlja logički poizvod svih klasa koje čine klasu koju ona ograničava. Tako se dodavanjem nulte klase U-u obezbeđuje da U bude zatvoren niz. Postoji jedan smisao u kojem je U gusto u sebi, naime: svaki termin od U predstavlja gornju granicu podesno izabrane klase sadržane u U, zato što svaki termin predstavlja gornju granicu segmenta U-ova koji on definiše, a svaki termin od U predstavlja donju granicu klase onih U-ova kojih je on pravi deo. Ali, koliko sam uspeo da utvrdim, za sada apsolutno ne postoji dokaz da je svaki temin od U gornja ili donja granica nekog *fundamentalnog* niza. Nema *a priori* razloga iz kojeg bi u bilo kom nizu granica bilo koje klase uvek trebalo da bude i granica fundamentalnog niza; izgleda da je zapravo ovo prerogativ nizova tipa kojima pripadaju racionalni, odnosno realni brojevi. Iako je naš niz gust u sebi u gore defenisanom opštem smislu, barem u slučaju koji trenutno razmatramo izgleda da nema razloga da se pretpostavi da svi termini našeg niza predstavljaju granice fundamentalnih nizova, a u tom specijalnom smislu niz može da ne bude gust u sebi.

281. Bilo bi poučno ispitati rezultat ograničavanja termina u U na one segmente koji mogu da se definišu fundamentalnim nizovima. U tom slučaju je dobro da pored gornjih i donjih segmenata razmotrimo i njihove suplemente, kako bismo mogli da ih nazovemo, a čiju

---

[1] Verujem da definiciju logičkog zbira članova klase klasâ u obliku koji ne pretpostavlja konačnost dugujemo Peanu. Ona glasi: neka je w klasa klasâ; onda je logički zbir članova klase w klasa termina x takva da postoji neka klasa koja pripada klasi w a kojoj pripada x. Vidi *Formulaire*, Vol. II, deo I (1897), br. 461.

ću definiciju uskoro da dam. Neka je dat kompaktni niz v generisan tranzitivnom asimetričnom relacijom P i neka je u bilo koji fundamentalni niz u v. Ako raniji termini iz u stoje prema kasnijim u relaciji P, niz u ću nazvati *progresijom*; a ako stoje u relaciji $\breve{P}$, niz u ću nazvati *regresijom*. Ako je sada w bilo koja klasa sadržana u v, onda w definiše, kao što smo već videli, četiri druge klase u v, naime: (1) klasu termina pre svakog w koju ću nazvati $w\pi$; (2) klasu termina posle svakog w koju ću nazvati $w\breve{\pi}$; (3) klasu termina pre nekog w koju ću nazvati πw; (4) klasu termina posle nekog w koju ću nazvati $\breve{\pi}w$. Klase (3) i (4) predstavljaju donji odnosno gornji segment; klase (1) i (2) predstavljaju suplement klasa (4) odnosno (3), zbog čega ću ih zvati suplementnim segmentima. Kada w ima gornju granicu, onda je ono prvi termin od $w\breve{\pi}$ i stoga $w\breve{\pi}$ nije segment pošto nijedan gornji segment nema prvi termin. Ali, kada w nema gornju granicu, onda, bilo da je w konačno ili beskonačno, $w\breve{\pi}$ jeste segment. Slična zapažanja važe i za donje granice. Ako w ima poslednji termin, onda ono ne pripada ni πw ni $w\breve{\pi}$ već samo drugim terminima od v koji pripadaju jednoj ili drugoj klasi, a ako w nema poslednji termin, onda svi termini od v pripadaju ili πw ili $w\breve{\pi}$. Slična zapažanja važe i za $w\breve{\pi}$ i $\breve{\pi}w$. Ako primenimo ove opšte definicije na klase progresija i regresija, uvidećemo da su za progresije značajne samo klase (2) i (3), dok su za regresije značajne samo klase (1) i (4). Pitanje gde progresija počinje ili gde se regresija završava sasvim je nevažno. Pošto progresija nema poslednji termin a regresija nema prvi termin, segment definisan i jednom i drugom zajedno sa njihovim suplementima sadrži svaki termin od v. Izlgleda da nema načina da se utvrdi na osnovu datih premisa da li progresije i regresije u v imaju granice uvek, ponekad ili nikad. Ja nisam mogao da otkrijem slučaj u kojem kompaktni niz nikada nema granice, ali ne mogu da pronađem ni bilo kakav dokaz da je neki takav slučaj nemoguć.

Postupajući sa klasama segemenata kao što smo prethodno postupali sa našom klasom U, moramo da razmotrimo četiri takve klase, naime: (1) klasa $v\pi$ čiji svaki termin predstavlja klasu $u\pi$

definisanu *regresijom u*, to jest čiji svi termini predstavljaju termine od v koji dolaze pre svih termina neke regresije u v; (2) klasa $v\pi$ koja se sastoji od svih klasa $u\breve{\pi}$ definisanih *progresijom u*; (3) klasa πv čiji su termini u, a gde je u neka *progresija*; (4) klasa $v\pi$ čiji su termini u, a gde je u neka *regresija*. Svaka od ove četiri klase predstavlja klasu klasa zato što su njeni termini klase koje su sadržane u v. Svaka od njih i sama jeste kompaktni niz. Koliko mi je poznato, ne postoji način da se dokaže da (1) i (3) ili (2) i (4) imaju bilo koje zajedničke termine. Svaki par bi imao zajednički termin ako bi v sadržalo neku progresiju i neku regresiju koje bi bile koherentne i koje ne bi imale graniicu u v, ali ne postoji način da se otkrije da li se ovaj slučaj ikada javlja u datom nizu v.

Kada pređemo na ispitivanje toga da li su ove četiri tako definisane klase guste u sebi, dobijamo najneobičnije rezultate. Svaki fundamentalni niz u bilo kojoj od četiri klase ima granicu, ali ne nužno u nizu od kojeg su sastavljeni njegovi termini i, obrnuto, svaki termin svake od naših klasa predstavlja granicu nekog fundamentalnog niza ali ne nužno niza koji je sadržan u istoj klasi kojoj granični termin pripada. Ovo se zapravo svodi na sledeće:

Svaka progresija u $v\breve{\pi}$ ili u πv ima granicu u πv.
Svaka progresija u $v\breve{\pi}$ ili u $\breve{\pi}v$ ima granicu u $\breve{\pi}v$.
Svaka regresija u $v\pi$ ili πv ima granicu u $v\pi$.
Svaka regresija u $v\breve{\pi}$ ili u $\breve{\pi}v$ ima granicu u $v\breve{\pi}$.

Svaki termin od $v\pi$ predstavlja granicu regresije u $v\pi$ i regresije u πv.

Svaki termin od $v\breve{\pi}$ predstavlja granicu regresije u $v\breve{\pi}$ i regresije u $\breve{\pi}v$.

Svaki termin od πv predstavlja granicu progresije u $v\pi$ i progresije u πv.

Svaki termin od $\breve{\pi}v$ predstavlja granicu progresije u $v\breve{\pi}$ i progresije u $\breve{\pi}v$.

Stoga:

$v\pi$ je identično sa klasom granica regresija u $v\pi$ ili u πv;

$v\breve{\pi}$ je identično sa klasom granica regresija u $v\breve{\pi}$ ili u $\breve{\pi}v$;
πv je identično sa klasom granica progresija u $v\pi$ ili u πv;
$\breve{\pi}v$ je identično sa klasom granica progresija u $\breve{\pi}v$ ili u $v\breve{\pi}$.

Stoga svaka od naše četiri klase ima neku vrstu jednostrane savršenosti. Dve od četiri su savršene na jednoj strani, a druge dve na drugoj. Ali, ne mogu da dokažem da je bilo koja od ove četiri klase u potpunosti savršena. Mogli bismo da pokušamo da kombinujemo $v\pi$ i πv kao i $v\breve{\pi}$ i $\breve{\pi}v$. Jer, $v\pi$ i πv zajedno formiraju jedan niz čija je generišuća relacija i dalje relacija celine i dela. Taj niz će biti savršen i sadržaće granice nalik progresijama i regresijama u njemu samom. Ali, ovaj niz može da ne bude kompaktan jer, ako postoji bilo koja progresija u i regresija u' u v koje obe imaju istu granicu u v (što predstavlja slučaj koji se, koliko mi je poznato, javlja u nekim kompaktnim nizovima), onda će πu i $u'\pi$ biti konsekutivni termini niza formiranog od πv i $v\pi$ zajedno, jer će $u'\pi$ sadržati zajedničku granicu dok πu neće, ali će svi drugi termini od v pripadati ili obema ili nijednoj. Stoga, kada je naš niz kompaktan, onda ne možemo da pokažemo da je savršen, a kada ga načinimo savršenim, onda možemo da pokažemo da on može da ne bude kompaktan. A niz koji nije kompaktan teško da može da se nazove kontinuiranim.

Iako možemo da dokažemo da u našem prvobitnom kompaktnom nizu v postoji beskonačan broj progresija koherentnih sa nekom datom progresijom sa kojom nemaju zajednički termin, ne možemo da dokažemo da postoji makar jedna regresija koherentna sa datom progresijom, niti možemo da dokažemo da bilo koja progresija ili regresija u v ima granicu ili da je neki termin od v granica progresije ili regresije. Ne možemo da dokažemo da su bilo koja progresija u i regresija u' takve da $\pi u = u'\pi$, niti pak da πu i $u'\pi$ mogu da se razlikuju u pogledu samo jednog termina od v. Niti, naposletku, možemo da dokažemo da bilo koja pojedinačna progresija u $v\pi$ ima granicu u $v\pi$, a slično važi i za iskaze o drugim trima klasama $\nu\breve{\pi}$, $\pi\nu$, $\breve{\pi}\nu$. U najmanju ruku, ja ne mogu da otkrijem bilo koji način da se dokaže bilo koja od ovih teorema, mada u odsustvu primera u kojima bi neke od njih bile lažne, ne deluje neverovatno da one mogu biti dokazive.

Ako je činjenica – a izgleda da jeste – da su, polazeći samo od kompaktnog niza, mnoge od uobičajenih teorema nedokazive, onda možemo uvideti u kojoj meri Kantorova ordinalna teorija fundamentalno zavisi od uslova da kompaktni niz od kojeg polazimo treba da bude prebrojiv. Čim se to pretpostavi, onda postaje lako dokazati sve gorenavedene iskaze koji se tiču tipova η odnosno θ. Ovo je činjenica koja je očigledno od velikog filozofskog značaja, a u cilju njenog jasnog isticanja sam se toliko dugo zadržao na kompaktnim nizovima za koje nije pretpostavljeno da su prebrojivi.

282. Prethodno zapažanje, da dva kompaktna niza mogu da se kombinuju tako da formiraju niz koji ponekad ima konsekutivne termine, prilično je neobično i primenjuje se podjednako i na kontinuitet onako kako ga je definisao Kantor. Segmenti racionalnih brojeva formiraju kontinuiran niz, a to čine i upotpunjeni segmenti (to jest segmenti zajedno sa svojim granicama); ali, ovi segmenti zajedno formiraju niz koji nije kompaktan i koji stoga nije kontinuiran. Sigurno je protivno uobičajenoj ideji kontinuiteta da kontinuirani niz prestaje da bude kontinuiran pukom interpolacijom novih termina između starih. Ovo bi u skladu sa uobičajenim pojmovima trebalo da učini naš niz još kontinuiranijim. Moglo bi se reći da filozofski govoreći niz ne može da se nazove kontinuiranim ako nije *potpun*, to jest ako ne sadrži izvestan termin zajedno sa svim terminima koji prema datom terminu stoje u specifikovanoj asimetričnoj tranzitivnoj relaciji ili u njenom konversu. Ako dodamo ovaj uslov, onda niz segmenata racionalnih brojeva nije potpun, s obzirom na relaciju koju smo do sada smatrali generišućom, pošto se ne sastoji od svih klasa racionalnih brojeva prema kojima dati segment stoji u relaciji celine i dela i od kojih svaka sadrži sve termine manje od bilo kojeg od njenih termina – ovaj uslov takođe zadovoljavaju i upotpunjeni segmenti. Ali, svaki niz je potpun s obzirom na neku jednostavnu ili složenu relaciju. Ovo je razlog zbog kojeg sa matematičkog stanovišta potpunost ne mora da se pominje u definiciji kontinuiteta, pošto ona uvek može da se osigura pomoću podesnog izbora generišuće relacije.

Sada smo videli u čemu se sastoji Kantorova definicija kontinuiteta i da, dok u aritmetici mogu da se pronađu primeri koji je zadovoljavaju, sama definicija je čisto ordinalna – pri čemu jedino što je neophodno da bude dato jeste prebrojiv kompaktni niz. Nezavisno od toga da li ćemo vrstu nizova koje Kantor definiše kao kontinuirane smatrati ili ne sličnim onome što je do sada nejasno označavano tom rečju, mora se priznati da sama definicija i koraci koji do nje vode predstavljaju trijumf analize i generalizacije.

Pre nego što pređemo na filozofska pitanja vezana za kontinuum, bilo bi dobro da nastavimo naš pregled Kantorovih najznačajnijih teorema, s tim što ćemo prvo da ispitamo transfinitne kardinalne i ordinalne brojeve. Od dva problema kojima se ovaj deo bavi, do sada smo razmatrali samo kontinuitet, a sada je vreme da razmotrimo ono što matematičari imaju da kažu u vezi sa beskonačnošću. Tek kada ovo obavimo bićemo u stanju da razmatramo blisko povezane filozofske probleme beskonačnosti i kontinuiteta.

Glava XXXVII

TRANSFINITNI KARDINALI

283. Skoro bi se moglo reći da matematička teorija beskonačnosti počinje sa Kantorom. Iako ne može u potpunosti da se oslobodi beskonačnosti, infinitezimalni račun se njome bavi u najmanjoj mogućoj meri i teži da je sakrije pre nego što se suoči sa svetom. Kantor je napustio ovu kukavičku politiku i izveo je kostura iz ormana*. Njega je u ovom poduhvatu ohrabrilo to što je negirao da je ovde uopšte reč o kosturu. Uistinu, slično mnogim drugim kosturima, i ovaj je u potpunosti zavisio od svog ormana, i iščezao je iznošenjem na svetlost dana. Govoreći nemetaforično, Kantor je ustanovio novu granu matematike, u kojoj je zahvaljući čistoj besprekornosti izvođenja pokazao da sve navodne protivrečnosti beskonačnosti zavise od proširivanja na beskonačno rezultata koji, iako mogu da se dokažu u vezi sa konačnim brojevima, ni u kojem smislu nisu nužno istiniti za *sve* brojeve. U ovoj teoriji je neophodno odvojeno tretirati kardinalne i ordinalne brojeve koji se daleko više razlikuju po njihovim svojstvima kada su transfinitni nego kada su konačni. Slêdeći

* Ovde se Rasel koristi uobičajenom engleskom frazom „*to bring the skeleton out of the cupboard*“ koja se upotrebljava kada je reč o iznošenju nečeg skrivanog na videlo (prim. stručnih redaktora prevoda).

isti redosled kao i ranije – redosled koji mi se jedini čini filozofski korektan – počeću od transfinitnih kardinala[1].

284. Transfinitini kardinali koji se takođe zovu i *moći* ili potencije[*] mogu za početak da se definišu tako da uključuju konačne kardinale, ostavljajući da se ispita u pogledu čega se konačno i transfinitno razlikuju. Tako Kantor daje sledeću definiciju[2].

„Označiću rečju *moć* ili *kardinalni broj* od *M* onu opštu ideju koja je pomoću naše aktivne sposobnosti mišljenja izvedena iz kolekcije *M* apstrahovanjem od prirode njenih različitih elemenata i od poretka u kojem su oni dati".

Kao što ćemo videti, ovo je samo fraza koja ukazuje na ono o čemu će se govoriti, a ne prava definicija. Njome se pretpostavlja da svaka kolekcija ima neko takvo svojstvo koje je kao ono na koje se ukazuje – drugim rečima, svojstvo koje je nezavisno od prirode njenih termina i njihovog poretka, a što zavisi, mogli bismo biti navedeni da dodamo, jedino od njihovog broja. Kantor zapravo uzima broj kao prvobitnu ideju i u njegovoj teoriji je iskaz da svaka kolekcija ima broj prvobitan. On je stoga konzistentan u specifikovanju broja koje ne predstavlja formalnu definiciju.

Međutim, kao što smo videli u Drugom delu, pomoću principa apstrakcije možemo da damo formalnu definiciju kardinalnih brojeva. Ovaj metod je u suštini dao Kantor neposredno nakon prethodno navedene neformalne definicije. Već smo videli da ako se dve klase nazivaju sličnim kada postoji jedan-jedan relacija koja uparuje svaki termin jedne sa jednim i samo jednim terminom druge klase, onda je sličnost simetrična, tranzitivna i refleksivna za sve klase. Moglo bi se primetiti da jedan-jedan relacija može da se definiše bez pozivanja

---

[1] Ovo je redosled koji je i Kantor sledio u *Math. Annalen*, XLVI, ali ne i u *Mannichfaltigkeitslehre.*

[*] Nemački termin koji upotrebljava Kantor je *Mächtigkeit* (prim. stručnih redaktora prevoda).

[2] *Math. Annalen*, XLVI, §1.

na broj na sledeći način: relacija je jedan-jedan kada, ako *x* stoji u relaciji prema *y*, a *x*' se razlikuje od *x* i *y*' od *y*, sledi da *x*' ne stoji u relaciji prema *y*, niti *x* prema *y*'. Ovde nema pozivanja na broj i definicija sličnosti je stoga takođe oslobođena od takvog pozivanja. Pošto je sličnost refleksivna, tranzitivna i simetrična, ona onda može da se izanalizira na proizvod mnogo-jedan relacije i njenog konversa i da ukazuje na barem jedno zajedničko svojstvo sličnih klasa. To svojstvo ili, ako ih ima više, barem jedno od tih svojstava, može da se nazove kardinalnim brojem sličnih klasa, a mnogo-jedan relacija predstavlja relaciju klase prema broju njenih termina. Da bismo fiksirali jedan određeni entitet kao kardinalni broj date klase, odlučujemo da identifikujemo broj klase sa celom klasom klasâ sličnih datoj klasi. Kao što dokaz principa apstrakcije pokazuje, ova klasa, uzeta kao pojedinačan entitet, ima sva svojstva koja se zahtevaju za kardinalni broj. Međutim, filozofski posmatrano, ovaj metod podleže sumnji koja proizlazi iz protivrečnosti na koju je ukazano u Glavi X Prvog dela[1].

Na ovaj način dobijamo definiciju kardinalnog broja jedne klase. Pošto je sličnost refleksivna za klase, svaka klasa ima kardinalni broj. Moglo bi se pomisliti da je ova definicija primenljiva samo na konačne klase, pošto je za dokaz da su *svi* termini jedne klase u korelaciji sa *svim* terminima druge neophodno potpuno nabrajanje. Međutim, to nije slučaj, što odmah može da se vidi zamenom reči *svi* rečju *bilo koji* – rečju koja je, uopšte uzev, poželjnija u slučajevima u kojima se radi o beskonačnim klasama. Dve klase *u* i *v* su slične kada postoji neka jedan-jedan relacija *R* takva da, ako je *x* bilo koje *u*, onda postoji neko *y* iz *v* takvo da *xRy*, i ako je *y*' bilo koje *v*, onda postoji neki termin *x*' iz *u* takav da *x*'*Ry*'. Ovde nije potrebno bilo kakvo potpuno nabrajanje već samo iskazi koji se odnose na *bilo koje u* i *bilo koje v.* Na primer, tačke na nekoj datoj liniji su slične linijama koje prolaze kroz neku tačku i koje se susreću sa datom

[1] Vidi Apendiks.

linijom jer *bilo koja* tačka na datoj liniji određuje jednu i samo jednu liniju koja prolazi kroz tu datu tačku, a *bilo koja* linija koja prolazi kroz datu tačku i susreće datu liniju određuje jednu i samo jednu tačku na datoj liniji. Stoga nam je u slučajevima u kojima su naše klase beskonačne potreban neki opšti iskaz o *bilo kom* terminu obe klase da bismo utvrdili sličnost, ali nam nije potrebno nabrajanje. Da bismo dokazali da svaka (ili bilo koja) klasa ima kardinalni broj, dovoljno je zapaziti da je bilo koji termin bilo koje klase identičan samom sebi. Nikakav drugi opšti iskaz o terminima klase nije potreban za refleksivno svojstvo sličnosti.

285. Ispitajmo sada glavna svojstva kardinalnih brojeva. Neću da dokazujem da kardinali imaju bilo koje od tih svojstava, pošto bih na taj način samo ponavljao ono što je rekao Kantor. Razmatrajući najpre relacije kardinalnih brojeva prema klasama, možemo zapaziti da, ako postoje dva skupa klasa koje su slične po parovima, a nikoje dve klase jednog od skupova nemaju zajednički deo kao ni nikoje dve drugog, onda je logički zbir svih klasa jednog skupa sličan logičkom zbiru svih klasa drugog skupa. Ovaj iskaz koji nam je poznat u slučaju konačnih klasa takođe važi i za beskonačne klase. Dalje, za kardinalni broj klase *u* kaže se da je veći od kardinalnog broja klase *v* kada nijedan deo klase *v* nije sličan klasi *u*, ali postoji deo od *u* koji je sličan klasi *v*. U ovom slučaju, takođe se kaže da je broj od *v* manji od broja od *u*. Može se dokazati da, ako postoji deo *u* koji je sličan *v* i deo *v* koji je sličan *u*, onda su *u* i *v* slični[1]. Stoga su relacije *jednako*, *veće od* i *manje od* inkompatibilne svaka sa svakom, sve su tranzitivne, a poslednje dve asimetrične. Uopšte ne možemo jednostavno da dokažemo – a izgleda da je više ili manje sumnjivo da uopšte možemo da dokažemo – da jedan od dva različita kardinalna

[1] Bernštajn-Šrederova teorema; za dokaze videti Borel, *Leçons sur la théorie des fonctions,* Paris, 1898, napomena I, i Zermelo, *Göttinger Nachrichten*, 1901, str. 34–38.

broja mora da bude veći, a drugi manji[1]. Treba primetiti da definicija *veće od* sadrži uslov koji se ne zahteva u slučaju konačnih kardinala. Ako je broj od *v* konačan, to je onda dovoljno da pravi deo od *u* bude sličan *v*. Ali, u slučaju transfinitnih kardinala ovo nije dovoljno. Za opštu definiciju *veće od* su neophodna oba dela. Ova razlika između konačnih i beskonačnih kardinala proizlazi iz definisanja razlike između konačnog i beskonačnog, naime, da kada broj klase nije konačan, onda ona uvek ima jedan pravi deo koji je sličan celini; to znači da svaka beskonačna klasa sadrži deo (i stoga beskonačan broj delova) koji ima isti broj kao i ona sama. Izvesni pojedinačni slučajevi ovog iskaza bili su dugo poznati i smatralo se da konstituišu protivrečnost u pojmu beskonačnog broja. Lajbnic, na primer, ističe[2] da pošto svaki broj može da se duplira, onda je broj svih brojeva isti kao i broj parnih brojeva, odakle zaključuje da ne postoje beskonačni brojevi. Prvi koji je generalizovao ovo svojstvo beskonačnih kolekcija i koji ih je tretirao kao neprotivrečne bio je, koliko mi je poznato, Bolcano[3]. Ali, strog dokaz ovog iskaza kada se konačni kardinali definišu pomoću matematičke indukcije kao i pokazivanje da on nije protivrečan dugujemo Kantoru i Dedekindu. Sâm iskaz može da se posmatra kao definicija transfinitnih brojeva među kardinalnim brojevima zato što predstavlja svojstvo koje pripada njima svima, a nijednom konačnom kardinalu[4]. Međutim, pre ispitivanja ovog svojstva moramo bliže da se upoznamo sa drugim svojstvima kardinalnih brojeva.

---

[1] Izgleda mi da su razlozi iz kojih Kantor smatra da je to tako nejasni kao i da nisu valjani. Oni zavise od postulata da svaka klasa predstavlja polje neke dobro uređene relacije. Vidi Kantor, *Math. Annalen*, XLVI, napomena uz §2.

[2] Gerhardovo izdanje I, str. 338.

[3] *Paradoxien des Unendlichen*, §21.

[4] Vidi Dedekind, *Was sind und was sollen die Zahlen?* br. 64.

286. Sada prelazim na strogo aritmetička svojstva kardinala, to jest na njihovo sabiranje, množenje itd[1]. *Sabiranje* brojeva je definisano, u slučaju kada su transfinitni, na tačno isti način kao što je bilo definisano u slučaju konačnih brojeva, naime, pomoću logičkog sabiranja. Broj logičkog zbira dve klase koje nemaju zajednički termin predstavlja zbir brojeva te dve klase. Ovo može da se proširi sukcesivnim koracima na bilo koji konačan broj klasa; za konačan broj klasa koji formira klasu klasâ zbir njihovih brojeva, ako te dve klase nemaju neki zajednički termin, i dalje predstavlja broj njihovog logičkog zbira – a logički zbir *bilo koje* konačne ili beskonačne klase klasâ logički je definljiv. Za tako definisane zbirove dva ili tri broja, i dalje važi komutativni i asocijativni zakon, to jest

$$a + b = b + a \quad \text{i} \quad a + (b + c) = (a + b) + c.$$

Množenje dva broja Kantor definiše ovako: ako su M i N dve klase, možemo da kombinujemo bilo koji element od M sa bilo kojim elementom od N tako da formiraju par (m, n); broj svih takvih parova predstavlja proizvod brojeva od M i N. Ako želimo da izbegnemo pojam para u ovoj definiciji, možemo da ga zamenimo na sledeći način[2]: neka je u klasa klasâ kojih po broju ima a; neka svaka od tih klasa koje pripadaju klasi u sadrži b termina i neka nikoje dve od tih klasa nemaju neki zajednički termin; onda je ab broj logičkog zbira svih tih klasa. Ova definicija je i dalje čisto logička i izbegava pojam para. Tako definisano množenje podleže zakonima komutativnosti, asocijativnosti i distributivnosti, to jest važi

$$ab = ba, \; a(bc) = (ab)c, \; a(b + c) = ab + ac.$$

Stoga sabiranje i množenje kardinala čak i kada su transfinitni zadovoljavaju sva elementarna pravila aritmetike.

---

[1] Kantor, *Math. Annalen*, XLVI, §3; Vajthed, *American Journal of Math*. Vol. XXIV, br. 4.

[2] Vivanti, *Théorie des Ensembles*, *Formulaire de Mathématiques*, Vol . I, deo VI, §2, br. 4.

Definisanje stepenovanja broja (a^b) takođe je sprovedeno logički (*ib*. §4). U tu svrhu, Kantor najpre definiše ono što se naziva pokrivanjem (*Belegung*) jedne klase N drugom klasom M. Ovo je zakon kojim je nekom elementu n od N pridružen jedan i samo jedan element m od M, ali isti element m može da se pridruži i mnogim drugim elementima od N. To znači da je *Belegung* mnogo-jedan relacija čiji domen uključuje N i koja uvek korelira termine od M sa terminima od N. Ako je a broj termina u M a b broj termina u N, onda je broj svih takvih mnogo-jedan relacija definisan kao a^b. Lako je videti da se za konačne brojeve ova definicija slaže sa uobičajenom definicijom. Za transfinitne brojeve indeksi i dalje imaju uobičajena svojstva, to jest

$$a^b a^c = a^{b+c},\ a^c b^c = (ab)^c,\ (a^b)^c = a^{bc}.$$

U slučaju gde je $a = 2$, a^b može jednostavnije da se definiše izvođenjem iz prethodne definicije. Ako $a = 2$, 2^b će onda biti broj načina na koje svaki od b termina može da se korelira sa jednim od dva termina. Sada, kada su termini koji su korelirani sa jednim od dva termina dati, ostali su onda korelirani sa drugim terminom. Stoga je u ovom slučaju taj termin dovoljan da specifikuje klasu termina koreliranih sa jednim od ta dva termina. Otuda, u svakom slučaju dobijamo klasu odabranu od b termina a u svim slučajevima dobijamo sve takve klase. Stoga je 2^b broj klasa koje mogu da se formiraju od b termina ili broj kombinacija od b stvari ma kog broja u datom trenutku – ovo je poznata teorema kada je b konačno, ali je i dalje istinita kada je b transfinitno. Kantor ima dokaz da je 2^b uvek veće od b – a, ali taj dokaz vodi teškoćama kada je b broj svih klasa ili, opštije, kada postoji neka kolekcija od b termina u kojoj su svi skupovi odabrani od b termina i sami pojedinačni termini od b[1].

Definicije množenja koje su dali Kantor i Vavanti zahtevaju da broj činilaca u proizvodu bude konačan što čini neophodnim formulisanje nove i nezavisne definicije stepenovanja ukoliko se dopusti

---

[1] Vidi Glavu XLIII *infra*.

da eksponent bude beskonačan. Gospodin A. N. Vajthed[1] je dao definiciju množenja koja je oslobođena od ovog ograničenja i koja stoga dopušta da se stepeni definišu na uobičajen način kao proizvodi. On je takođe pronašao dokaze formalnih zakona kada je broj sabiraka, zagrada ili činilaca beskonačan. Definicija proizvoda glasi: neka k bude klasa klasâ od kojih nikoje dve nemaju neki zajednički termin. Izaberimo, na svaki mogući način, jedan i samo jedan termin iz svake od klasa koje sačinjavaju klasu k. Čineći ovo na sve moguće načine dobijamo klasu klasâ koja se zove multiplikativna klasa od k. Broj termina u ovoj klasi definiše se kao proizvod brojeva termina iz različitih klasa koje su članovi klase k. U slučajevima u kojima k ima konačan broj članova, lako je videti da se ovo slaže sa uobičajenom definicijom. Neka u, v i w budu članovi od k i neka imaju α odnosno β odnosno γ termina. Tada može da se izabere jedan termin iz u na α mnogo načina: za svaki način postoji β načina biranja jednog termina iz v, a za svaki način biranja jednog termina iz u i jednog iz v postoji γ mnogo načina biranja jednog termina iz w. Stoga postoji $\alpha\beta\gamma$ mnogo načina biranja jednog termina iz svake od ovih klasa kada se množenje shvati u uobičajenom smislu. Multiplikativna klasa je značajan pojam pomoću kojeg transfinitna kardinalna aritmetika može da se razvije znatno dalje od onoga dokle ju je razvio Kantor.

287. Sve gorenavedene definicije se podjednako primenjuju i na konačne i beskonačne cele brojeve i, kao što vidimo, formalni zakoni aritmetike i dalje važe. Međutim, transfinitni celi brojevi se razlikuju od konačnih celih brojeva po svojstvima njihovih relacija prema klasama čiji su oni članovi, kao i u pogledu svojstava klasa samih celih brojeva. Klase brojeva zapravo imaju vrlo različita svojstva u zavisnosti do toga da li su svi brojevi konačni ili je barem deo njih transfinitan.

Među transfinitnim kardinalima neki su naročito značajni, a posebno broj konačnih brojeva i broj kontinuuma. Jasno je da sâm

[1] *American Journal of Mathematics*, *loc. cit.*

broj konačnih brojeva nije konačan broj zato što je klasa *konačan broj* slična klasi *paran konačan broj* koja predstavlja njen deo. Ili pak isti zaključak može da se dokaže pomoću matematičke indukcije – koja predstavlja princip koji takođe služi za definisanje konačnih brojeva, ali koji ću, budući da je više ordinalne prirode, razmotriti kasnije, u sledećoj glavi. Dakle, broj svih konačnih brojeva je transfinitan. Ovaj broj Kantor označava hebrejskim slovom alef sa sufiksom 0 [$\aleph_0$]; nama će više odgovarati da ga označimo sa α_0. Kantor dokazuje da je ovo najmanji od svih transfinitnih kardinala. To sledi iz teorema (*loc. cit.*, §6):

Svaka transfinitna kolekcija sadrži druge kolekcije kao delove čiji je broj α_0.

Svaka transfinitna kolekcija, koja predstavlja deo kolekcije čiji je broj α_0, takođe ima broj α_0.

Nijedna konačna kolekcija nije slična bilo kojem pravom delu nje same.

Svaka transfinitna kolekcija je slična bilo kojem pravom delu nje same[1].

Iz ovih teorema sledi da nijedan transfinitni broj nije manji od broja svih konačnih brojeva. Za kolekcije koje imaju ovaj broj kaže se da su prebrojive, zato što je uvek moguće prebrojati takve kolekcije u smislu da, ako je dat termin takve kolekcije, onda postoji neki konačan broj *n* takav da je dati termin *n*-ti. Ovo predstavlja samo drugačiji način da se kaže da svi termini prebrojive kolekcije stoje u jedan-jedan relaciji sa konačnim brojevima, što je pak ekvivalentno tvrđenju da je broj te kolekcije isti kao i broj svih konačnih brojeva. Lako je uvideti da će parni brojevi, prosti brojevi, savršeni kvadrati ili neke druge klase konačnih brojeva koje nemaju maksimum formirati prebrojiv niz. Ako se neke takve klase urede po veličini, onda će postojati konačan broj termina, recimo *n*, pre bilo kog datog

---

[1] Teoreme *C* i *D* zahtevaju da se konačni brojevi definišu pomoću matematičke indukcije ili u suprotnom postaju tautološke.

termina, koji će stoga biti na mestu ($n + 1$). Još je značajnije da svi racionalni brojevi, a čak i svi realni koreni jednačina konačnog stepena sa racionalnim koeficijentima (to jest svi algebarski brojevi), formiraju prebrojiv niz. A čak je i neki n-dimenzionalni niz takvih termina, gde je n konačan broj, ili najmanji transfinitni ordinal, i dalje prebrojiv[1]. Može se lako pokazati da su racionalni brojevi prebrojivi tako što ih uredimo da oni sa manjim zbirom brojilaca i imenilaca prethode onima sa većim zbirom, a u slučaju onih sa jednakim zbirovima, oni sa manjim brojiocima prethode onima sa većim. Tako dobijamo niz

1, 1/2, 2, 1/3, 3, 1/4, 2/3, 3/2, 4, 1/5 …

Ovo je diskretan niz koji ima početak, ali ne i kraj; *svaki* racionalan broj će se javiti u ovom nizu i imaće konačan broj prethodnika. U drugim slučajevima ovaj dokaz je znatno teži.

Svi prebrojivi nizovi imaju isti kardinalni broj α_0, ma koliko različito mogli da deluju. Ali, ne smemo pretpostaviti da ne postoji broj koji je veći od α_0. Naprotiv, postoji beskonačan niz takvih brojeva[2]. Kantor je tvrdio da su transfinitni kardinali dobro uređeni, što znači da svaki od njih, izuzev poslednjeg od svih (ako postoji poslednji) ima neposrednog sledbenika, a to važi i za svaku klasu transfinitnih kardinala koja posle nje ima bilo koje brojeve uopšte. Ali, nemaju svi neposrednog prethodnika; na primer, sâm α_0 nema neposrednog prethodnika. Jer, ako bi ga imali on bi morao da bude poslednji od konačnih brojeva, ali mi znamo da ne postoji poslednji konačan broj. Ali, izgleda da su Kantorovi razlozi u prilog njegovom tvrđenju da su kardinali dobro uređeni nedovoljni, tako da za sada ovo pitanje mora da ostane otvoreno.

---

1 Vidi *Acta Mathematica*, II, str. 306, 313, 326.

2 Vidi *Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung* I, 1892; *Rivista di Matematica*, II, str. 165–7. Kantorovo tvrđenje da ne postoji najveći transfinitni broj predstavlja otvoreno pitanje. Vidi Glavu XLIII *infra*.

288. Od transfinitnih brojeva različitih od α_0 najznačajniji je broj kontinuuma. Kantor je dokazao da ovaj broj nije α_0[1] i nada se da će dokazati da je taj broj α_1[2], ali ta nada, iako je dugo gajena, ipak ostaje neispunjena[*]. On je pokazao da je broj kontinuuma 2^{α_0}[3] što predstavlja najneobičniju teoremu, ali i dalje mora da ostane sumnjivo da li je ovaj broj α_1 iako ima razloga koji to čine verovatnim[4]. Što se tiče

---

[1] *Acta math*. II, str. 308.

[2] *Ib*., str. 404. α_1 je broj koji sledi neposredno iza α_0.

[*] Ovde je naravno reč o Kantorovom *problemu kontinuuma* (ovaj termin koristio je Gedel, a potom i mnogi matematičari, logičari i filozofi koji su se bavili problemima zasnivanja teorije skupova) to jest o čuvenoj *hipotezi kontinuuma*:

(CH) $2^{\aleph_0} = \aleph_1$.

Hipoteza kontinuuma nam dakle kaže da je $2^{\aleph_0}$ prvi veći kardinal od $\aleph_0$. U savremenoj literaturi iz teorije skupova najčešće se govori o prirodnom uopštenju *CH* to jest o generalizovanoj *hipotezi kontinuuma*,

(GCH) $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$.

David Hilbert je na plenarnom predavanju pod naslovom „Matematički problemi" na Drugom međunarodnom kongresu matematičara na Sorboni u Parizu 8. avgusta 1900. godine kao prvi na listi od 23 takozvana Hilbertova problema naveo upravo Kantorovu hipotezu konitnuuma. Kako bi se ovaj problem rešio, *CH* je trebalo dokazati. Iako su se ovim problemom bavili najveći logičari i matematičari XX veka, hipoteza kontinuuma je do danas ostala nerešena. Značajno je imati na umu da je u Parizu u julu 1900. godine održan i Prvi međunarodni kongres iz filozofije na kojem je učestvovao i Rasel i na kojem je upoznao Peana od kog je tom prilikom dobio „sve njegove radove", uključujući i *Formulaire*. Kako sam Rasel piše u svojoj *Autobiografiji*, „kongres je bio prekretnica u mom intelektualnom životu zato što sam tamo upoznao Peana". On je već u septembru 1900. Peanu poslao članak za njegov časopis Rivista di Matematica u kojem je izneo osnovne ideje koje će biti razvijene upravo u Principima matematike. „Početkom oktobra započeo sam sa pisanjem Principa matematike" (B. Russell, *Autobiography*, Ch. 6; Routledge, 2010) (prim. stručnih redaktora prevoda)

[3] *Math. Annalen*, XLVI, §4, napomena.

[4] Vidi Couturat, *De l'Infini Mathématique*, Pariz, 1896, str. 655. Razlog koji Kantor navodi u prilog identifikovanja druge moći sa moći kontinuuma jeste taj što svaka beskonačna linearna kolekcija tačaka ima ili prvu moć ili moć kontinuuma, odakle onda izgleda da sledi da moć kontinuuma mora da bude prva sledeća posle prve moći (*Math. Annalen*, 23, str. 488, vidi još i *Acta Math.* VII). Ali, ovaj

definicije α_1 i celog sledovanja transfinitnih kardinala, to je stvar koju je bolje odložiti za kasnije, pošto prethodno razmotrimo transfinitne ordinale. Ne smemo pretpostaviti da možemo da dobijemo novi transfinitni kardinal pukim dodavanjem kardinalu α_0 broja 1 ili čak bilo kog konačnog broja ili broja α_0. Naprotiv, takvo slabašno oružje ne može da poremeti transfinitne kardinale. Poznato je da je u slučaju α_0 i izvesne klase transfinitnih kardinala broj jednak njemu dvostrukom, kao i da je u slučaju α_0 i jedne klase transfinitnih kardinala za koju se pretpostavlja da je različita broj jednak svom kvadratu. Zbir dva broja koji pripadaju prvoj od ove dve klase jednak je većem od ova dva broja. Ne zna se da li svi transfinitni kardinali pripadaju jednoj ili obema od ovih klasa[1].

289. Možemo se zapitati: u kom pogledu konačni i transfinitni kardinali zajedno formiraju jedinstveni niz? Nije li niz konačnih brojeva u samom sebi potpun, bez mogućnosti proširenja njegove generišuće relacije? Ako definišemo niz celih brojeva pomoću generišuće relacije *razlikovati se za jedan* – metodom koji je najprirodniji kada niz treba da bude smatran progresijom – onda, mora se priznati, konačni celi brojevi formiraju potpun niz i nemoguće je dodati im

---

zaključak deluje donekle nesigurno. Razmotrite, na primer, sledeću analogiju: u kompaktnom nizu, prostiranje određeno dvama terminima sastoji se ili od beskonačnog broja termina ili, kada ta dva termina koincidiraju, samo od jednog termina a nikada od konačnog broja termina različtih od jedan. Ali, konačna prostiranja su predstavljena drugim tipovima nizova, na primer, progresijama.

Teorema da je broj kontinuuma 2^{α_0} veoma jednostavno proizlazi iz iskaza iz Glave XXXVI prema kojem beskonačne klase formiraju kontinuirani niz. Broj svih klasa konačnih celih brojeva je 2^{α_0} (*vide supra*), a broj konačnih klasa je α_0. Stoga je broj svih beskonačnih klasa konačnih celih brojeva 2^{α_0} zato što oduzimanje od α_0 ne umanjuje nijedan broj veći od α_0; stoga je 2^{α_0} broj kontinuuma. Da bi se dokazalo da je taj broj α_1 bilo bi stoga dovoljno pokazati da je broj beskonačnih klasa konačnih celih brojeva isti kao broj tipova nizova koji mogu da se formiraju od svih konačnih celih brojeva zato što je taj drugi broj, kao što ćemo videti u sledećoj glavi, α_1.

[1] Cf. Vajthed, *loc. cit.*, str. 392–4.

termine. Ali, ako, što je prikladno u teoriji kardinala, smatramo da niz nastaje korelacijom sa nizom celine i dela među klasama o kojima celi brojevi mogu da se tvrde, onda vidimo da se ova relacija ne širi preko konačnih brojeva. Postoji beskonačan broj beskonačnih klasa u kojima je neka data konačna klasa sadržana; i tako, korelacijom sa njima, broj date konačne klase prethodi bilo kojoj od beskonačnih klasa. Ostavljam nerešenim da li postoji neki drugi smisao u kojem svi celi, konačni i transfinitni brojevi formiraju jedinstveni niz, a gorenavedeni smisao bi bio dovoljan da pokaže da ne postoji logička greška u tome ako se oni posmatraju kao jedninstveni niz, kad bi bilo poznato da od bilo koja dva data kardinala jedan mora da bude veći. Ali, sada je vreme da usmerimo pažnju na transfinitne ordinalne brojeve.

Glava XXXVIII
TRANSFINITNI ORDINALI

290. Transfinitni ordinali su, ako je to uopšte moguće, čak i interesntniji i značajniji od transfinitnih kardinala. Nasuprot kardinalima, oni ne podležu komutativnom zakonu i njihova aritmetika je stoga sasvim različita od elementarne aritmetike. Za svaki transfinitni kardinal ili, u svakom slučaju, za bilo koji transfinitni kardinal izvesne klase postoji beskonačna kolekcija transfinitnih ordinala iako je kardinalni broj svih ordinala isti ili manji od kardinalnog broja svih kardinala. Ordinali koji pripadaju nizu čiji je kardinalni broj α_0 zovu se ordinali druge klase; oni koji odgovaraju α_1 zovu se ordinalima treće klase itd. Ordinalni brojevi su u suštini klase nizova ili, još bolje, klase generišućih relacija nizova; u većini slučajeva su definisani odnosom prema matematičkoj indukciji. Konačni ordinali se takođe mogu shvatiti kao tipovi nizova: na primer, možemo uzeti da ordinalni broj *n* znači „serijalna relacija *n* termina" ili, popularnim jezikom, *n* termina zaredom. Ovo je ordinalni pojam različit od „*n*-ti" i logički mu prethodi[1]. U ovom smislu *n* predstavlja ime klase serijalnih relacija. Ovaj smisao, a ne onaj izražen pomoću „*n*-ti",

[1] Cf. *supra* Deo IV, Glava XXIX, §§231, 232.

jeste onaj koji je generalizovao Kantor tako da se primenjuje na beskonačne nizove.

291. Počnimo sa Kantorovom definicijom druge klase ordinalnih brojeva[1].

„Sada treba pokazati“, kaže Kantor, „kako smo navedeni na definicije novih brojeva i na koji način nastaju prirodni isečci u apsolutno beskonačnom realnom celom sledu brojeva. […] Niz (1) pozitivnih realnih celih brojeva 1, 2, 3, ..., *v*, ... nastaje ponovljenim dodavanjem i objedinjavanjem jedinica koje su pretpostavljene i koje se smatraju jednakim; broj *v* je izraz koji se odnosi kako na jednu određenu konačnu količinu (*Anzahl*) takvih ponovljenih dodavanja, tako i na objedinjavanje jedinica u jednu celinu. Formiranje konačnih realnih celih brojeva počiva na principu dodavanja jedinice broju koji je već prethodno dat; ovaj momenat koji, kao što ćemo uskoro videti, igra značajnu ulogu u formiranju viših celih brojeva, nazivam *prvim formacionim principom*. Količina brojeva *v* klase (1) koji se grade na ovaj način je beskonačna i ne postoji njen najveći iznos (*Anzahl*). Ma koliko bilo protivrečno govoriti o najvećem broju klase (1), ipak ništa ne bi moglo da se prigovori zamisli jednog *novog* broja koji ćemo nazvati ω, a koji treba da izrazi da je sveukupnost (*Inbegriff*) klase (1) data zakonom njenog prirodnog sledovanja. (Slično kao što *v* izražava da konačna količina jedinica biva ujedinjena u jednu celinu). Čak je dozvoljeno da se o novoformiranom broju ω misli kao o *granici* kojoj brojevi *v* teže, ako se pritom ne misli ništa drugo do da je ω *prvi* ceo broj koji sledi za svim brojevima *v*, to jest da je veći od svakog od brojeva *v*. Time što se dopušta dodavanje daljih jedinica pošto je broj ω formiran, pomoću prvog formacionog principa dobijamo

$$\omega + 1, \omega + 2, \ldots \omega + v, \ldots;$$

[1] *Mannichfaltigkeitslehre*, §11, str. 32, 33. Stručni redaktori preveli su tekst koji Rasel ovde citira sa nemačkog originala (prim. stručnih redaktora prevoda).

Pošto se ovim ponovo ne dolazi ni do kakvog najvećeg broja, može se zamisliti jedan novi broj koji možemo nazvati 2ω i koji mora da bude prvi koji sledi posle dosadašnjih brojeva v i $\omega + v$; […]

Logička funkcija koja nam je dala brojeve ω i 2ω očigledno se razlikuje od *prvog* formacionog principa i ja je nazivam *drugim formacionim principom* celih realnih brojeva i bliže ga definišem na sledeći način: ako je data određena sukcesija prethodno definisanih celih realnih brojeva od kojih ne postoji najveći, onda pomoću drugog formacionog principa može da se načini jedan novi broj o kome se misli kao o *granici* onih prethodnih brojeva, to jest broj koji je definisan kao prvi sledeći broj koji je veći od svih njih".

Ova dva formaciona principa postaće jasniji ako se pretpostavi da je ordinalni broj samo tip ili klasa nizova ili, još bolje, njihova generišuća relacija. Stoga, ako imamo bilo koji niz koji nema poslednji termin, svaki deo takvog niza koji može da se definiše kao svi termini do izvesnog termina tog niza uključujući i njega samog, imaće poslednji termin. Ali, pošto sam ovaj niz nema poslednji termin, on je različitog tipa od svakog takvog dela ili od segmenta samog sebe. Stoga se ordinalni broj koji predstavlja niz kao celinu mora razlikovati od ordinalnog broja koji predstavlja neki sam takav segment i mora da bude broj koji nema neposrednog prethodnika pošto niz nema poslednji termin. Tako je ω naprosto ime klase *progresije* ili generišućih relacija nizova ove klase. Drugi formacioni princip je, ukratko, onaj kojim definišemo izvestan tip nizova koji nemaju poslednji termin. Razmatrajući ordinale koji prethode bilo kom ordinalu α koji je dobijen posredstvom drugog formacionog principa kao one koji predstavljaju segmente niza koji je predstavljen sa α, sâm ordinal α predstavlja granicu takvih segmenata i, kao što smo ranije videli, segmenti uvek imaju granicu (pod uslovom da nemaju maksiumum), čak i kada prvobitni niz nema granicu[1].

---

[1] O segmentima dobro uređenih nizova videti Kantorov članak u *Math.*

Da bi definisao klasu među transfinitnim ordinalima (čija je sukcesija, kao što je očigledno, beskonačna), Kantor uvodi ono što naziva principom ograničavanja (*Hemmungsprincip*)[1]. Prema ovom principu druga klasa ordinala se sastoji samo od onih ordinala čiji prethodnici od 1 nagore formiraju niz prve moći, to jest niz čiji je kardinalni broj α_0 ili niz čiji termini u podesnom poretku stoje u jedan-jedan relaciji prema konačnim celim brojevima. Onda je pokazano da je moć ili kardinalni broj druge klase ordinala kao celine različit od α_0 (str. 35) i da je to prvi sledeći kardinalni broj posle α_0 (str. 37). Ono na šta se misli pod sledećim kardinalnim brojem posle α_0 jasno proizlazi iz sledećeg iskaza (str. 38): „Ako je *M* bilo koja dobro definisana kolekcija koja ima moć (*Mächtigkeit*) druge klase brojeva i ako je neki beskonačni deo kolekcije *M* oduzet od *M*, onda ili kolekcija *M*' može naprosto da se smatra beskonačnim nizom ili je moguće ustanoviti biunivoku korespondenciju između *M* i *M*'“. To znači da je bilo koji deo kolekcije moći drugog stepena ili konačan ili da ima moć prvog ili moć drugog stepena, te stoga ne postoji moć između prve i druge moći.

292. Pre nego što pređemo na sabiranje, množenje i druge operacije nad ordinalima, biće dobro da gorenavedene iskaze, u meri u kojoj je to moguće, oslobodimo njihovog matematičkog ruha i da kažemo običnim jezikom šta oni tačno znače. Što se tiče ordinala ω, to je prosto ime za klasu generišućih relacija progresija. Videli smo kako je progresija definisana: ona predstavlja niz koji ima prvi termin i termin koji sledi posle bilo kog termina i zato podleže matematičkoj indukciji. Na osnovu same matematičke indukcije možemo da pokažemo da svaki deo progresije, ako ima poslednji termin, ima

Annalen, XLIX, §13. Značajno je primetiti da su gore objašnjeni ordinali analogni u pogledu njihovog nastanka realnim brojevima kada se posmatraju kao segmenti (vidi Glavu XXXIII, *supra*). Ovde, kao i tamo, postojanje ω ne predstavlja otvoreno pitanje kada se prizna teorija segmenata, dok je prema bilo kojoj drugoj teoriji teorema egzistencije nedokaziva i neplauzibilna.

[1] *Mannichfaltigkeitslehre*, str. 34.

neki konačni ordinalni broj *u*, gde *u* označava klasu nizova koji se sastoje od *u* termina u poretku, dok svaki deo koji nema poslednji termin sâm predstavlja progresiju; takođe možemo da pokažemo (što je zaista očigledno) da nijedan konačan ordinal neće predstavljati progresiju. Sada su progresije savršeno definisane klase nizova, a princip apstrakcije pokazuje da postoji neki entitet prema kojem svaka od njih stoji u relaciji u kojoj ne stoji ni prema čemu drugom – jer sve su progresije ordinalno slične (to jest sve stoje u jedan-jedan relaciji takvoj da su raniji termini korelirani sa ranijim terminima, a kasniji sa kasnijim), a ordinalna sličnost je simetrična, tranzitivna i (kada je reč o nizovima) refleksivna. Možemo smatrati da je entitet na koji ukazuje princip apstrakcije ili tip ili klasa serijalnih relacija, pošto nijedan niz ne može da pripada više nego jednom tipu nizova. Tip kome pripadaju progresije je ono što Kantor naziva ω. Polazeći od nekog konačnog ordinala matematičkom indukcijom nikada ne možemo da dosegnemo ω, pošto ω nije član klase konačnih ordinala. Uistinu, možemo da definišemo konačne ordinale ili kardinale – a kada su nizovi u pitanju, ovo je izgleda najbolja definicija – kao one koji, polazeći od 0 ili 1, mogu da se dosegnu matematičkom indukcijom. Prema tome, ovaj princip ne mora da se uzme kao aksiom ili postulat, već kao definicija konačnosti. Treba primetiti da na osnovu principa da svaki broj ima neposrednog sledbenika možemo da *dokažemo* da je bilo koji pridodat broj, recimo 10937, konačan – pod uslovom, naravno, da je pridodati broj konačan broj. To će reći, svaki iskaz koji se odnosi na 10937 može da se dokaže bez matematičke indukcije koja se, kao što se većina nas seća, nije pominjala u aritmetici našeg detinjstva. Ne postoji nikakva vrsta logičke greške u korišćenju principa kao definicije klasa konačnih brojeva, niti ima bilo kakvog razloga da se pretpostavi da se princip primenjuje na *sve* ordinalne ili *sve* kardinalne brojeve.

Ovo je pravi trenutak da se reč dâ filozofima. Izgleda da većina filozofa pretpostavlja da je razlika između konačnog i beskonačnog takva da je njeno značenje neposredno očigledno i rasuđuje o tome kao da nikakve precizne definicije nisu potrebne. Ali, tek su moderni matematičari izneli na videlo činjenicu da nipošto nije lako razlikovati konačno od beskonačnog. Brojevi 0 i 1 mogu logički da se definišu i logički može da se pokaže da svaki broj ima sledbenika. Danas možemo da definišemo konačne brojeve ili na osnovu toga što mogu da se dosegnu matematičkom indukcijom počev od 0 ili 1 – rečeno Dedekindovim jezikom oni formiraju lanac od 0 ili 1 – ili na osnovu toga što su brojevi kolekcija takvih da nijedan njihov pravi deo nema isti broj kao celina. Lako je pokazati da su ova dva uslova ekvivalentna. Ali, jedino na osnovu njih se može precizno povući razlika između konačnog i beskonačnog, a svaka diskusija o beskonačnosti koja ih zanemaruje će biti manje ili više frivolna.

293. S obzirom na brojeve druge klase različite od ω može se primetiti sledeće. Kolekcija od dva ili više termina uvek predstavlja, izuzev možda za neke vrlo velike beskonačne kolekcije, polje više od jedne serijalne relacije. Ljudi mogu da se urede po njihovom rangu, starosti, imovinskom stanju ili po azbučnom redu, a sve ove relacije među ljudima generišu nizove i svaka stavlja ljude u različit poredak. Ali, kada je kolekcija konačna svi mogući poreci daju jedan isti ordinalni broj, naime, onaj koji odgovara kardinalnom broju kolekcije. To će reći, svi nizovi koji mogu da se formiraju od izvesnog konačnog broja termina ordinalno su slični. Sa beskonačnim nizovima stvar stoji sasvim drugačije. Neka beskonačna kolekcija termina koja može da se uredi na različite načine može da pripada, u njenim različitim porecima, sasvim različitim tipovima. Već smo videli da racionalni brojevi u jednom poretku formiraju kompaktni niz bez početka ili kraja, dok u nekom drugom poretku formiraju progresiju. Ovi nizovi predstavljaju sasvim različite tipove, a ista mogućnost se proširuje i na sve beskonačne nizove. Ordinalni tip niza se ne menja uzajamnim menjanjem dva uzastopna termina niti, sledstveno, na osnovu matematičke indukcije, nekim konačnim brojem takvih uzajamnih promena. Opšti princip je da tip niza neće biti promenjen onim što se može nazvati *permutacijom*. To jest, ako je P

serijalna relacija kojom su termini od u uređeni, a R jedan-jedan relacija čiji su domen i konverzni domen oba u, onda je $\breve{R}PR$ serijalna relacija istog tipa kao P, a sve serijalne relacije čije je polje u i koje su istog tipa kao P imaju oblik $\breve{R}PR$. Ali, ponovnim uređivanjem koje nije svodivo na permutaciju tip se, generalno uzev, menja. Razmotrimo, na primer, prirodne brojeve, najpre u njihovom prirodnom poretku, a zatim u poretku u kojem prvo dolazi 2, zatim svi viši brojevi u nihovom prirodnom poretku, a na kraju svih njih broj 1. U prvom poretku prirodni brojevi formiraju progresiju, a u drugom formiraju progresiju zajedno sa poslednjim terminom. U ovom drugom obliku matematička indukcija nije više primenljiva; postoje iskazi koji važe za 2 i za svaki sledeći konačni broj, ali ne i za 1. Prvi oblik je tipa bilo kog fundamentalnog niza one vrste koju smo razmatrali u Glavi XXXVI, a drugi je tipa bilo kog takvog niza zajedno sa njegovom granicom. Kantor je pokazao da svaka prebrojiva kolekcija može da se uredi tako da njen poredak odgovara bilo kojem pridodatom broju druge klase[1]. Stoga druga klasa ordinalnih brojeva može da se definiše kao svi tipovi dobro uređenih nizova u kojima bilo koja data prebrojiva kolekcija može da se uredi pomoću različitih generišućih relacija. Mogućnost takvih različitih tipova zavisi od fundamentalnog svojstva beskonačnih kolekcija, naime, da uvek može da se pronađe beskonačan deo beskonačne kolekcije koji će da stoji u jedan-jedan korelaciji sa celinom. Ako je prvobitna kolekcija bila neki niz, ovom korelacijom deo postaje niz koji je ordinalno sličan celini: ako se termini koji ostaju dodaju nakon svih termina beskonačnog dela oni će činiti celinu koja se ordinalno razlikuje od onoga što je bila[2].

---

[1] *Acta Math*. II, str. 394.

[2] Ako su termini koji ostaju konačni po broju, često neće promeniti tip ako se dodaju na početku; ali, ako ih ima beskonačno, onda će, generalno uzev, promeniti tip. Ovo će uskoro biti potpunije objašnjeno.

Sada možemo da asimilujemo teoriju ordinala u teoriju kardinala i to na sledeći način. Za dve relacije će se reći da su *slične* kada postoji jedan-jedan relacija S čiji je domen polje jedne od njih (P) i koja je takva da je druga relacija ${}^{\omega\cdot 2}PS$. Ako je P dobro uređena relacija, to jest relacija koja generiše dobro uređeni niz, klasa relacija sličnih relaciji P može da se definiše kao ordinalni broj od P. Stoga ordinalni brojevi proizlaze iz sličnosti među relacijama, kao što kardinalni brojevi proizlaze iz sličnosti među klasama.

294. Sada možemo da shvatimo pravila sabiranja i množenja transfinitnih ordinala. Obe operacije podležu asocijativnom ali ne i komutativnom zakonu. Distributivni zakon važi, uopšte uzev, samo u obliku:

$$\gamma(\alpha+\beta) = \gamma\alpha+\alpha\beta,$$

gde su $\alpha+\beta$, α i β množioci[1]. Lako je uvideti da sabiranje ne podleže komutativnom zakonu. Uzmimo, na primer, $\omega + 1$ i $1 + \omega$. Ono prvo označava progresiju za kojom sledi pojedinačni termin: to je tip predstavljen progresijom i njenom granicom koji se razlikuje od proste progresije. Stoga je $\omega + 1$ drugačiji ordinal od ω. Ali, $1 + \omega$ označava progresiju kojoj *prethodi* pojedinačni termin, a to je ponovo progresija. Stoga $1 + \omega = \omega$, ali $1 + \omega$ nije jednako $\omega + 1$[2]. Brojevi druge klase su zapravo dvojake vrste, (1) oni koji imaju neposrednog prethodnika i (2) oni koji ga nemaju. Brojevi poput ω, $\omega\cdot 2$, $\omega\cdot 3$, …, ω^2, ω^3, ..., ω^ω, ... nemaju neposrednog prethodnika. Ako se bilo koji od ovih brojeva doda konačnom broju, ponovo se dobija isti transfinitni broj; ali, ako se konačan broj doda nekom od ovih brojeva, onda dobijamo nov broj. Brojevi bez prethodnika predstavljaju nizove koji nemaju kraja, dok brojevi koji imaju prethodnika predstavljaju nizove koji imaju kraj. Jasno je da termini dodati na početku

[1] *Mannichfaltigkeitslehre*, str. 39; $\alpha+\beta$ će biti tip niza koji se sastoji od dva dela, naime, od dela tipa α za kojim sledi deo tipa β; $\gamma\alpha$ će biti tip niza koji se sastoji od niza tipa α i niza tipa γ. Stoga je niz sastavljen od dve progresije tipa $\omega\cdot 2$.

[2] *Math. Annalen*, XLVI, §8.

niza bez kraja ostavljaju taj niz beskrajnim; ali, dodavanje niza sa krajem posle beskrajnog niza proizvodi niz sa krajem i samim tim novi tip poretka. Stoga ne postoji ništa misteriozno u vezi sa ovim pravilima sabiranja, koja naprosto izražavaju tip niza koji proizlazi iz kombinacije dva data niza.

Stoga je lako dobiti pravila oduzimanja[1]. Ako je α manje od β, jednačina

$$\alpha + \xi = \beta$$

ima uvek jedno i samo jedno rešenje u ξ koje možemo da predstavimo sa $\beta - \alpha$. Ovo daje tip niza koji mora da se doda posle α kako bi se dobilo β. Ali, jednačina

$$\xi + \alpha = \beta$$

ponekad neće imati rešnje, a nekada će imati beskonačno mnogo rešenja. Stoga, jednačina

$$\xi + \omega = \omega + 1$$

uopšte nema rešenje: nijedan broj termina dodat na početku progresije neće proizvesti progresiju zajedno sa poslednjim terminom. Zapravo, u jednačini $\xi + \alpha = \beta$, ako α predstavlja beskrajni tip a β tip sa krajem, dovoljno je očigledno da termini dodati pre α nikada ne mogu da proizvedu tip sa krajem i stoga nikada ne mogu da proizvedu tip β. Sa druge strane, ako razmotrimo jednačinu

$$\xi + \omega = 2 \cdot \omega$$

ona će biti zadovoljena sa $\xi + \omega = n$ gde je n nula ili neki konačan broj. Jer, n pre drugog ω će srasti sa ovim i dati ω i tako je $\omega + n + \omega = \omega \cdot 2$. Dakle, u ovom slučaju ima beskonačno mnogo vrednosti. Međutim, u svim ovakvim slučajevima, moguća vrednost od ξ ima minimum koji predstavlja neku vrstu glavne vrednosti razlike između β i α. Stoga je oduzimanje dvojake vrste u zavisnosti od toga da li tražimo broj koji će kada se doda α dati β, ili broj kojem može da se doda α tako da se dobije β. U prvom slučaju, pod uslovom da je α manje od β, postoji uvek jedno jedino rešenje; u drugom

[1] *Mannichfaltigkeitslehre*, str. 39.

slučaju bi moglo da nema rešenja, a moglo bi i da bude beskonačno mnogo rešenja.

295. Množenje ordinala definisano je na sledeći način[1]. Neka su M i N dva niza tipova α i β. U N, na mesto svakog elementa n stavljamo niz M_n tipa α, a neka je S niz formiran od svih termina svih nizova M_n uzetih po sledećem redu: (1) bilo koja dva elementa od S koji pripadaju istom nizu M_n treba da sačuvaju poredak u kome su bili u M_n; dva elementa koji pripadaju različitim nizovima M_n, $M_{n'}$ treba da budu u poretku u kojem n i n' stoje u N. Onda tip od S zavisi samo od α i β i definisan je kao njihov proizvod $\alpha\beta$, pri čemu je α množenik, a β množilac. Lako je videti da proizvodi ne podležu uvek komutativnom zakonu. Na primer, $2\cdot\omega$ je tip niza koji je predstavljen sa

$$e_1, f_1;\ \ e_2, f_2;\ e_3, f_3;\ \ldots\ e_\nu, f_\nu;\ \ldots$$

koji je progresija, tako da $2\cdot\omega = \omega$. Ali, $2\cdot\omega$ je tip

$$e_1, e_2, e_3, \ldots\ e_\nu, \ldots;\ f_1, f_2, f_3,\ \ldots f_\nu, \ldots$$

koji predstavlja kombinaciju dve progresije, ali ne jedne jedine progresije. U prvom nizu postoji samo jedan termin, e_1, koji nema neposrednog prethodnika, a u drugom postoje dva, e_1 i f_1.

Kod deljenja kao i kod oduzimanja treba razlikovati dve vrste[2]. Ako postoje tri ordinala α, β i γ takvi da $\beta = \alpha\gamma$, onda jednačina $= \alpha\xi$ nema drugo rešenje osim $\xi = \gamma$ i stoga možemo da označimo γ sa β/α[3]. Ali, jednačina $\beta = \xi\alpha$, ako je uopšte rešiva, može imati nekoliko ili čak beskonačno mnogo korena od kojih je, međutim, jedan uvek najmanji. Najmanji koren je označen sa $\beta//\alpha$.

---

1 *Math. Annalen*, XLVI, §8.

2 *Mannichfaltigkeitslehre*, str. 40.

3 Kantor je promenio svoju notaciju u pogledu množenja: prvobitno je u $\alpha\cdot\beta$, α bilo množilac a β množenik; ovde je usvojen obrnuti redosled. Sledeći starije radove, prilagodio sam redosled onom koji je usvojen u ovom radu, osim u slučaju sadašnjih jednačina.

Množenje ordinala je proces predstavljanja niza nizova kao jednog niza, pri čemu je svaki niz uzet kao celina i to tako da održava svoje mesto u nizu nizova. Sa druge strane, deljenje predstavlja proces rastavljanja pojedičnog niza na niz nizova bez menjanja redosleda termina. Oba ova procesa su u izvesnoj meri značajna u vezi sa dimenzijama. Jasno je da je deljenje moguće samo sa nekim tipom nizova; oni tipovi sa kojima deljenje nije moguće mogu da se nazovu prostim. Teorija prostih tipova je interesantna, ali nama nije neophodno da se njome bavimo[1].

296. Svaki racionalni integral ili eksponencijalna funkcija od ω predstavlja broj druge klase čak i kada se javljaju takvi brojevi kao ω^{ω}, ω^{ω^2} itd.[2] Ali, ne sme se pretpostaviti da svi tipovi prebrojivih nizova mogu da imaju takav oblik. Na primer, tip η koji predstavlja racionalne brojeve u poretku veličine[3], ni na koji način ne može da se izrazi pomoću ω. Takav tip Kantor nije nazvao ordinalnim *brojem*. Termin *ordinalni broj* rezervisan je za *dobro uređene* nizove, to jest nizove koji imaju sledeća dva svojstva[4]:

I. U nizu F postoji prvi termin.

II. Ako je F' deo F, i ako F poseduje jedan (ili više) termina koji dolaze posle svih termina od F', onda postoji termin f' od F koji neposredno sledi za F', tako da ne postoji termin od F pre f' i posle svih termina F'.

Jedino sve moguće funkcije od ω i konačnih ordinala, isključujući druge tipove poput tipa racionalnih brojeva, predstavljaju dobro uređene nizove mada obrnuto ne važi. U svakom dobro uređenom nizu postoji termin koji neposredno sledi za nekim datim terminom, izuzev za poslednjim ako takav postoji, a ako je niz

---

[1] Vidi *Mannichfaltigkeitslehre*, str. 40.

[2] O eksponencijalnoj funkciji vidi *Math. Annalen*, XLIX, §§18–20.

[3] *Math. Annalen*, XLVI, §9.

[4] *Math. Annalen*, XLVI, §12. Ova definicija može da se zameni sledećom koja joj je ekvivalentna: niz je dobro uređen ako svaka klasa sadržana u tom nizu (izuzev, naravno, nulte klase) ima prvi termin.

beskonačan, on uvek sadrži delove koji su progresije. Termin koji neposredno sledi za progresijom nema neposrednog prethodnika, a tip segmenta formiranog od njegovih prethodnika jeste ono što se naziva drugom vrstom. Drugi termini imaju neposredne prethodnike i za tipove segmenata formirane od njihovih prethodnika kaže se da su prve vrste.

297. Razmatranje nizova koji nisu dobro uređeni je značajno, mada se ti rezultati daleko manje tiču aritmetike nego što je to slučaj sa dobro uređenim nizovima. Stoga, tip η ne može da se izrazi kao funkcija od ω pošto sve funkcije od ω predstavljaju nizove koji imaju prvi termin, dok η nema prvi termin, a sve funkcije od ω predstavljaju nizove u kojima svaki termin ima neposrednog sledbenika, što takođe nije slučaj sa η. Čak ni niz negativnih i pozitivnih celih brojeva i nule ne može da se izrazi pomoću ω pošto taj niz nema početak. Za tu svrhu Kantor definiše serijalni tip $*\omega$ koji možemo smatrati tipom *regresije* (*ib*. §7). Kao što smo videli, definicija progresije se odnosi na neku aliorelativnu relaciju P[1]. Kada $\breve{P}$ generiše progresiju, ta progresija u odnosu na $\breve{P}$ predstavlja regresiju u odnosu na P, a njen tip, ako se posmatra kao da je generisan relacijom P, označava se sa $*\omega$. Stoga je ceo niz negativnih i pozitivnih celih brojeva tipa $\omega* + \omega$. Takav niz može bilo gde da se podeli na dve progresije koje su generisane konverznim relacijama ali koji, s obzirom na jednu relaciju, nije svodiv na neku kombinaciju progresija. Takav niz se može potpuno definisati pomoću metoda iz Četvrtog dela, na sledeći način: P je jedan-jedan aliorelativna relacija; polje od P je istovetno polju od $\breve{P}$; disjunktivna relacija „neki pozitivan stepen od P" tranzitivna je i asimetrična a niz se sastoji od svih termina koji stoje u ovoj relaciji ili u njenom konversu prema datom terminu, zajedno sa datim terminom. Zato klasa nizova koji odgovaraju nekom transfinitnom ordinalnom tipu uvek može da se definiše na taj način

[1] Aliorelativna relacija je relacija u kojoj nijedan termin ne može da stoji prema samom sebi. Ovaj termin dugujemo Persu. Vidi Schröder, *Algebra u. Logik der Relative*, str. 131.

pomoću metoda iz Četvrtog dela; ali, u slučaju u kojem tip ne može da se izrazi kao funkcija od ω ili $*\omega$ ili oboje, često će biti neophodno, ako želimo da potpuno definišemo naš tip, ili da uvedemo pozivanje na neku drugu relaciju u pogledu koje termini našeg niza formiraju progresiju, ili da specifikujemo funkcionisanje našeg niza u pogledu granica. Stoga, tip niza racionalnih brojeva nije definisan specifikacijom da je potpun i da nema ni početak ni kraj; ova definicija se takođe primenjuje, na primer, na ono što Kantor naziva semikontinuumom, to jest, kontinuumom, sa otklonjenim krajevima. Treba dodati da su racionalni brojevi prebrojivi, to jest da u odnosu na neku drugu relaciju formiraju progresiju. Sumnjam da u ovom slučaju ponašanje racionalnih brojeva s obzirom na granice može da se iskoristi za definiciju. Njihove glavne karakteristike u ovom pogledu su: (1) da su oni gusti u sebi, to jest da svaki njihov termin predstavlja granicu izvesnih progresija i regresija; (2) u bilo kom intervalu je progresija ili regresija koja nema granicu kontinuirana. Ali, obe ove karakteristike pripadaju i nizu iracionalnih brojeva, to jest nizu koji je dobijen izostavljanjem svih racionalnih brojeva iz niza realnih brojeva, a ovaj niz ipak nije prebrojiv. Tako izgleda da ne možemo da definišemo tip η kojem pripadaju racionalni brojevi bez pozivanja na dve generišuće relacije. Tip η je tip beskrajnih kompaktnih nizova čiji termini pozivanjem na neku drugu relaciju formiraju progresiju.

Iz poslednje primedbe jasno uviđamo značaj korelacije nizova sa kojom smo otpočeli diskusiju u Petom delu. Jer, tip racionalnih brojeva, a samim tim i kontinuum, može da se definiše samo pomoću korelacije. Sve dok ne uvedemo neku drugu relaciju pored one na osnovu koje nastaje poredak veličine među racionalnim brojevima, ne postoji ništa na osnovu čega bismo razlikovali tip racionalnih od tipa iracionalnih brojeva.

298. Razmatranje ordinala koji ne mogu da se izraze kao funkcije od ω jasno pokazuje da, uopšte uzev, ordinale moramo da smatramo – kao što sam i sugerisao na početku ove glave – klasama ili tipovima serijalnih relacija, a ovo je gledište kome se i sâm Kantor sada očigledno priklanja; jer, u članku u *Mathematische Annalen*, Vol. XLVI, on govori o njima uvek kao o tipovima poretka, a ne kao o brojevima, a u sledećem članku (*Math. Annalen*, XLIX, §12) on definitivno ograničava ordinalne brojeve na dobro uređene nizove. U svojim ranijim spisima on se više ograničava na funkcije od ω koje su u velikoj meri analogne poznatijim vrstama brojeva. Zapravo postoje tipovi poretka koji mogu da se predstave nizom konačnih i transfinitnih kardinala koji počinje nekim kardinalom. Ali, drugi tipovi poretka, kao što smo sada videli, imaju vrlo malo sličnosti sa brojevima.

299. Vredi ponoviti definicije opštih pojmova koji se ovde pretpostavljaju u terminima onoga što možemo nazvati relacionom aritmetikom[1]. Ako su P i Q dve relacije takve da postoji jedan-jedan relacija S čiji je domen polje od P i koja je takva da $Q = \breve{S}PS$, onda se za P i Q kaže da su *slične.* Klasa relacija sličnih relaciji P koje označavam sa λP naziva se *relacionim brojem* od P. Ako polja od P i Q nemaju zajedničke termine, $P + Q$ je definisano kao P ili Q ili relacija koja važi između svakog termina polja od P i svakog termina polja od Q i između nikojih drugih termina. Stoga $P + Q$ nije jednako $Q + P$. Nadalje, $\lambda P + \lambda Q$ je definisa no kao $\lambda(P + Q)$. Za sumiranje beskonačnog broja relacija potrebna nam je neka aliorelativna relacija čije je polje sastavljeno od relacija čija su polja uzajamno isključiva. Neka je P jedna takva relacija, p njeno polje, tako da p bude klasa relacija. Onda $\sum_p p$ označava ili jednu od relacija klase p ili relaciju nekog termina koji pipada polju neke relacije Q klase p prema terminu koji pripada polju neke druge relacije R (klase p) sa kojom Q stoji u relaciji P. (Ako je P serijalna relacija a p klasa serijalnih relacija, $\sum_p p$ će biti generišuća relacija, sume različitih nizova generisanih terminima od p uzetih u poretku koji je generisan relacijom P). Zbir relacionih brojeva različitih termina od p možemo da

[1] Cf. Deo IV, Glava XXIX, §231.

definišemo kao relacioni broj od $\sum_p p$. Ako svi termini od p imaju isti relacioni broj, recimo α, i ako je β relacioni broj od p, $\alpha \times \beta$ će biti definisano kao relacioni broj od $\sum_p p$. Postupajući na ovaj način lako je dati opšti dokaz tri formalna zakona koji važe za dobro uređene nizove, naime:

$$(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$$
$$\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$$
$$(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$$

Ovi dokazi su skoro potpuno analogni dokazima koje je oktrio Vajthed za kardinalne brojeve (*Amer. Journal of Math*., Vol. XXIV); ali, oni se razlikuju na osnovu toga što nijedan metod do sada nije otkriven za definisanje beskonačnog proizvoda relacionih brojeva ili, čak, ordinalnih brojeva.

300. Treba primetiti da se vrednost prethodno navedenog metoda sastoji u tome što ne dozvoljava sumnju u pogledu teorema egzistencije – to čini Kantorovo delo nečim za čime treba težiti. Pošto je ovo značajna stvar u pogledu koje su filozofi skloni da budu skeptični, ja ću ovde da ponovim argument u kratkim crtama. Pre svega može da se pokaže da nijedna konačna klasa ne obuhvata sve termine: ovo uz manju rezervu proizlazi iz činjenice da pošto je 0 kardinalni broj, broj brojeva do i uključujući konačni broj n jeste $n + 1$. Zatim, ako je n konačan broj, $n + 1$ je nov konačan broj različit od svih njegovih prethodnika. Stoga konačni kardinali formiraju progresiju i samim tim ordinalni broj ω i kardinalni broj α_0 postoje (u matematičkom smislu). Stoga pukim preuređivanjem niza konačnih kardinala dobijamo sve ordinale Kantorove druge klase. Sada možemo da definišemo ordinalni broj ω_1 kao klasu serijalnih relacija takvih da, ako je u klasa sadržana u polju jedne od njih, reći da u ima sledbenike implicira i implicirano je tvrđenjem da u ima α_0 termina ili konačan broj termina, a lako je pokazati da je niz ordinala prve i druge klase, u poretku veličine, ovog tipa. Time je dokazana egzistencija ω_1, a α_1 je definisano kao broj termina u nizu čija je generišuća relacija tipa ω_1. Odatle možemo ići dalje do ω_2 i α_2 itd. i čak do ω_ω i α_ω, čija egzistencija može da se dokaže na sličan način: ω_ω će biti tip generišuće relacije nekog niza tako da, ako je *u* klasa sadržana u tom nizu, reći da *u* ima sledbenike je ekvivalentno tvrđenju da je *u* konačno ili da, za podesnu konačnu vrednost *n*, ima α_n termina. Ovaj proces nam daje jedan-jedan korelaciju ordinala sa kardinalima: očigledno je da proširivanjem ovog procesa možemo učiniti da svaki kardinal koji može da pripada dobro uređenom nizu odgovara jednom i samo jednom ordinalu. Kantor uzima kao aksiom da svaka klasa predstavlja polje nekog dobro uređenog niza i na osnovu gorenavedenog metoda izvodi da *svi* kardinali mogu da se koreliraju sa ordinalima. Deluje mi da ova pretpostavka nije zagarantovana, posebno s obzirom na činjenicu da još niko nije uspeo da uredi klasu od 2^{α_0} termina u dobro uređen niz. Mi ne znamo da od bilo koja dva različita kardinalna broja jedan mora da bude veći i može biti da 2^{α_0}nije ni veće ni manje od α_1 i α_2 i njihovih sledbenika koji mogu da se nazovu dobro uređenim kardinalima zato što se primenjuju na dobro uređene klase.

301. Postoji jedna teškoća u vezi sa tipom celog niza ordinalnih brojeva. Lako je dokazati da je svaki segment ovog niza dobro uređen i prirodno je pretpostaviti da je ceo niz takođe dobro uređen. Ako je tako, njegov tip bi morao da bude najveći od svih ordinalnih brojeva, zato što ordinalni brojevi manji od datog ordinala formiraju, u poretku veličine, niz čiji je tip taj dati ordinal. Ali, najveći ordinalni broj ne može da postoji zato što je svaki ordinal povećan dodavanjem 1. Iz ove protivrečnosti gospodin Burali-Forti koji ju je otkrio[1] zaključuje da za dva različita ordinala, kao i u slučaju dva različita kardinala, nije neophodno da jedan bude veći, a drugi manji. Međutim, on time svesno poriče Kantorovu teoremu koja tvrdi suprotno[2]. Ja sam ispitivao tu teoremu sa najvećom mogućom pažnjom i nisam uspeo da pronađem neku grešku u dokazu[3]. Ali, postoji jedna druga

[1] „Una questione sui numeri transfiniti“, *Rendiconti del circolo Matematico di Palermo*, Vol. VI (1897).

[2] Teorema N iz §13 Kantorovog članka u *Math. Annalen*, Vol. XLIX.

[3] Reprodukovao sam dokaz u simboličkoj formi u kojoj se greške lakše

premisa u Burali-Fortijevom argumentu za koju mi deluje da bi mogla da se porekne, a to je da je niz svih ordinalnih brojeva dobro uređen. Ovo ne sledi iz činjenice da su svi njegovi segmenti dobro uređeni, te mislim da mora da se odbaci jer, koliko mi je poznato, ne može da se dokaže. Izgleda da bi protivrečnost o kojoj je reč mogla da se izbegne na ovaj način.

302. Sada možemo da se vratimo predmetu sukcesivnih izvoda niza o čemu smo već raspravljali u Glavi XXXVI. To predstavlja jednu od najinteresantnijih primena onih ordinala koji su funkcije od ω i čak može da se upotrebi kao nezavisan metod za njihovo definisanje. Već smo videli kako se iz niza P dobija njegov prvi izvod[1]. Prvi izvod od P koji je označen sa P' predstavlja klasu graničnih tačaka. P'', drugi izvod, onaj od P', sastoji se od graničnih tačaka od P' itd. Svaka beskonačna kolekcija ima barem jednu graničnu tačku: na primer, ω predstavlja granicu konačnih ordinala. Indukcijom možemo da definišemo bilo koji izvod iz konačnog poretka P^{ν}. Ako se P^{ν} sastoji od konačnog broja tačaka $P^{\nu+1}$ iščezava; ako se ovo dešava za neki konačan broj ν, za P se kaže da je prvog roda (*genus*) i ν-te vrste (*species*). Ali, može se desiti da nijedno P^{ν} ne iščezava, u kojem slučaju svi konačni izvodi mogu da imaju zajedničke tačke. Tačke koje su svima zajedničke formiraju kolekciju koja je definisana kao P^{ω}. Treba primetiti da je P^{ω} tako definisano da ne zahteva definiciju od ω. Termin x pripada P^{ω} ako, koji god konačan ceo broj ν da je u pitanju, x pripada P^{ν}. Mora se primetiti da iako P' može da sadrži tačke koje ne pripadaju P, naredni izvodi ipak neće uvesti nove tačke. Ovo ilustruje kreativnu prirodu metoda granica ili, bolje rečeno, segmenata: kada se prvi put primeni, može da dâ nove termine, ali

---

otkrivaju u RdM, Vol. VIII, Prop. 5.47 mog članka.

1 Ono što sledi predstavlja odlomak iz *Acta Math*. II, str. 341–360. Zbog jednostavnosti pretpostaviću da sve definljive granice postoje, to jest da niz ima granicu kad god je imaju i odgovarajući segmenti. U Glavi XXXVI sam pokazao kako treba izraziti rezultate kako bi se ova pretpostavka izbegla, ali je neophodno preformulisanje zametno.

naredne primene više ne daju nove termine. To znači da postoji intrinsična razlika između niza koji je dobijen ili koji bi mogao da bude dobijen kao izvod iz nekog drugog niza i niza koji ne može da se dobije na taj način. Svaki niz koji sadrži svoj prvi izvod i sam je izvod beskonačnog broja drugih nizova[1]. Sukcesivni izvodi, slično segmentima koji su određeni različitim terminima regresije, formiraju niz u kojem je svaki termin deo svih svojih prethodnika; stoga P^{ω}, ako postoji, predstavlja donju granicu svih izvoda konačnog reda. Od P^{ω} lako je stići do $P^{\omega+v}$, $P^{\omega \cdot v}$ itd. Moguće je stvarno konstruisati niz u kojem bilo koji određeni konačan izvod ili transfinitni izvod druge klase jeste prvi koji iščezava. Kada nijedan od konačnih izvoda ne iščezava, za P se kaže da je drugog roda. Međutim, ne sme se zaključiti da P nije prebrojivo. Naprotiv, prvi izvod racionalnih brojeva predstavlja brojevni kontinuum koji je savršen, tako da su svi njegovi izvodi identični sa njim samim; ipak, kao što znamo, racionalni brojevi su prebrojivi. Ali, kada P^{v} iščezava, P je uvek prebrojivo ako je v konačno ili druge klase.

Teorija izvoda je veoma značajna za teoriju realnih funkcija[2] u kojoj nam praktično omogućava da proširimo matematičku indukciju na bilo koji ordinal druge klase. Ali, za filozofiju ne deluje neophodno reći više od onoga što je već sadržano u prethodno navedenim primedbama i u onim iz Glave XXXVI. Popularno govoreći, prvi izvod se sastoji od svih tačaka u čijem je susedstvu nagomilano beskonačno mnogo termina kolekcije, a naredni izvodi daju, može se reći, različite stepene koncentracije u bilo kom susedstvu. Stoga je lako uvideti zašto su izvodi relevantni za kontinuitet: da bi bila kontinuirana, kolekcija mora da bude što je moguće više koncentrisana u svakom susedstvu koje sadrži bilo koje termine te kolekcije. Ali, ovakvi popularni načini izražavanja ne mogu da imaju onaj stepen preciznosti koji ima Kantorova terminologija.

---

1 *Formulaire de Mathématiques*, Vol. II, Deo III, §71, 4–8.

2 Vidi Dini, *Theorie der Functionen*, Leipzig, 1892, naročito Glava XIII i prevodiočev predgovor.

Glava XXXIX

INFINITEZIMALNI RAČUN

303. Infinitezimalni račun (*calculus*) je tradicionalno ime za diferencijalni i integralni račun zajedno, i ja sam taj naziv zadržao; mada, kao što ćemo uskoro videti, ne postoji ni aluzija ni implikacija na infinitezimale u bilo kom delu ove grane matematike.

Filozofska teorija kalkulusa je, još od vremena od kada je otkrivena, u donekle diskreditovanom položaju. Sâm Lajbnic – koji bi, čovek bi pretpostavio, trebalo da bude kompetentan da dâ tačno objašnjenje sopstvenog izuma – imao je ideje o ovoj stvari koje se ne mogu opisati drugačije do kao krajnje sirove. Izgleda da je on tvrdio da je, ako ostavimo metafizičke suptilnosti po strani, ovaj račun samo aproksimativan, ali u praksi opravdavan činjenicom da su greške do kojih dovodi manje od grešaka koje bi mogle da se utvrde opažanjem[1]. Kada je razmišljao o dinamici, njegova vera u aktualne ifinitezimale sprečila ga je da otkrije da kalkulus počiva na učenju o granicama i učinila je da ne smatra svoje *dx* i *dy* ni kao 0 niti kao konačne niti kao matematičke fikcije, već kao da stvarno predstavljaju jedinice kojima je u njegovoj filozofiji trebalo da vodi

[1] Cf. *Mathematische Werke*, Gerhardovo izdanje, IV, str. 91–93; *Phil. Werke*, Gerhardovo izdanje, II, str. 282.

beskonačna deoba[1]. I u njegovim matematičkim razmatranjima o ovom predmetu izbegao je da pruži pažljive dokaze, zadovoljavajući se nabrajanjem pravila[2]. Kasnije, istina, konačno je odbacio infinitezimale kao filozofski valjane[3]. Ali, on je propustio da pokaže kako bez upotrebljavanja infinitezimala rezultati dobijeni pomoću kalkulusa ipak mogu da budu egzaktni, a ne aproksimativni. U ovom pogledu Njutn je bolji izbor od Lajbnica: njegove leme[4] daju pravu osnovu kalkulusa u učenju o granicama i, pretpostavljajući kontinuitet prostora i vremena u Kantorovom smislu, one daju valjane dokaze pravila kalkulusa u meri u kojoj se to tiče prostorno-vremenskih veličina. Ali, Njutnu je, naravno, bila potpuno nepoznata činjenica da njegove leme zavise od moderne teorije kontinuiteta; pored toga, pozivanje na vreme i promenu koji se javljaju u reči fluksija, i na prostor koji se javlja u lemama, bilo je sasvim nepotrebno i samo je služilo prikrivanju činjenice da nikakva definicija kontinuiteta nije bila data. Deluje krajnje upitno da li je Lajbnic izbegao ovu grešku ili ne; u svakom slučaju, izvesno je da je u njegovom prvom objavljenom objašnjenju kalkulusa diferencijalni količnik definisao pomoću tangente krive. Svojim naglašavanjem infinitezimala, on je dao pogrešan smer razmatranjima koja se tiču kalkulusa, što je zavelo sve matematičare pre Vajerštrasa (sa mogućim izuzetkom De Morgana) i sve filozofe, sve do dana današnjeg. Tek u poslednjih trideset ili četrdeset godina matematičari su obezbedili rekvizite za matematičko zasnivanje filozofije kalkulusa, a to je, što je prirodno, do sada malo poznato filozofima, osim u Francuskoj[5]. Filozofske radove o ovom predmetu, kao što je Koenov *Princip infinitezimalne*

---

[1] Vidi *Math. Werke*, Gerhardovo izdanje, VI, str. 235, 247, 252.

[2] Vidi *Math. Werke*, Gerhardovo izdanje, Vol. V, str. 220ff.

[3] Na primer, *Phil. Werke*, Gerhardovo izdanje, II, str. 305. Cf. Cassirer, *Leibniz' System* (Marburg), 1902, str. 206–7.

[4] *Principia*, deo I, odeljak I.

[5] Vidi Couturat, *De l'Infini Mathématique*, *passim*.

metode i njegova istorija Princip der Infinitesimalmethode und seine Geschichte[1], kvari, u pogledu konstruktivne teorije, neprimereni misticizam nasleđen od Kanta koji vodi rezultatima kao što je poistovećivanje intenzivnih veličina sa ekstenzivnim infinitezimalama. U sledećoj glavi ispitaću koncepciju infinitezimala koja je bitna za svaku filozofsku teoriju kalkulusa koja je do sada bila predložena. Za sada samo nastojim da pružim konstruktivnu teoriju koja proizlazi iz moderne matematike.

304. Diferencijalni količnik suštinski zavisi od pojma kontinuirane funkcije kontinuirane promenljive. Ovaj pojam, koji tek treba da se definiše, nije čisto ordinalni; naprotiv, on je u prvi mah primenljiv samo na nizove brojeva, a onda putem proširivanja i na nizove u kojima su rastojanja ili prostiranja numerički merljiva. Ali, prvo moramo da definišemo kontinuiranu funkciju.

Već smo videli (Glava XXXII) na šta se misli pod funkcijom promenljive i na šta se misli pod kontinuiranom promenljivom (Glava XXXVI). Ako je ova funkcija jednovrednosna i ako je uređena samo korelacijom sa promenljivom, onda, kada je promenljiva kontinuirana nema smisla pitati da li je funkcija kontinuirana zato što je takav niz po korelaciji uvek ordinalno sličan svom prototipu. Ali kada, ako su i promenljiva i polje funkcije klase brojeva, funkcija ima poredak nezavisno od korelacije i onda može mada ne mora da se desi da vrednost funkcije u poretku koji je dobijen korelacijom formira kontinuirani niz u nezavisnom poretku. Ako je to tako u bilo kom intervalu, za funkciju se onda kaže da je kontinuirana u tom intervalu. Tačne definicije kontinuiranih i diskontinuiranih funkcija gde su i x i $f(x)$ numerčke prirode dao je Dini[2] i to na sledeći način. Pretpostavlja se da se nezavisna promenljiva x sastoji od realnih brojeva ili od svih realnih brojeva u uzvesnom intervalu; $f(x)$ u datom intervalu mora da bude jednovrednosna čak i na krajnjim tačkama intervala i

[1] Berlin, 1883. Teba reći da je istorijski deo ovog dela zadivljujući.

[2] *Op. cit.*, §30, str. 50 i 51.

takođe mora da bude sastavljena od realnih brojeva. Tada imamo sledeće definicije, pri čemu je funkcija definisana za interval između α i β, a a je neki realni broj u ovom intervalu.

„Za $f(x)$ kažemo da je *kontinuirano* za $x = a$ ili u tački a u kojoj ima vrednost $f(a)$ ako za svaki pozitivan broj σ različit od 0, ali toliko mali koliko želimo, postoji pozitivan broj ε različit od 0 takav da, za sve vrednosti od δ, koje su numerički manje od ε, tako da je razlika $f(a+\delta) - f(a)$ numerički manja od σ. Drugim rečima, $f(x)$ je kontinuirano u tački $x = a$ gde ima vrednost $f(a)$ ako je granica njene vrednosti desno i levo od a ista i jednaka $f(a)$.

Nasuprot tome, $f(x)$ je *diskontinuirano* za $x = a$ ako, za bilo koju[1] pozitivnu vrednost od σ, ne postoji odgovarajuća pozitivna vrednost od ε takva da je za sve vrednosti od δ koje su numerički manje od ε, $f(a+\delta) - f(a)$ uvek manje od σ; drugim rečima, $f(x)$ je diskontinuirano za $x = a$ kada i vrednosti $f(a+h)$ od $f(x)$ desno od a i vrednosti $f(a-h)$ od $f(x)$ levo od a nemaju određene granice ili, ako ih imaju, onda su one različite na dve strane od a; ili, ako su iste, one se razlikuju od vrednosti $f(a)$ koju funkcija ima u tački a".

Mora se priznati da su ove definicije kontinuiteta i diskontinuiteta funkcije donekle komplikovane; ali izgleda da je nemoguće uvesti bilo kakvo pojednostavljenje bez narušavanja strogosti. Grubo uzev, možemo reći da je funkcija kontinuirana u susedstvu a kada se njene vrednosti, kako se približava a, približavaju vrednosti $f(a)$ i imaju $f(a)$ za njihovu granicu i nalevo i nadesno. Ali, pojam granice funkcije donekle je komplikovaniji od pojma granice uopšte sa kojim smo se do sada bavili. Funkcija jedne savršeno opšte vrste neće imati granicu približavanjem bilo kojoj datoj tački. Da bi imala granicu kada se x približava a sa leve strane, nužno je i dovoljno da se, ako je neki broj ε naveden, bilo koje dve vrednosti od $f(x)$, kada je x dovoljno blizu a ali manje od a, razlikuju za manje od ε; popularno

---

[1] U nemačkom (ali ne i u italijanskom) stoji *svaki* umesto *bilo koji* što je omaška.

rečeno, vrednost funkcije ne čini nikakve iznenadne skokove kada se x približava a sa leve strane. U sličnim okolnostima $f(x)$ će imati granicu kada se približava a sa desne strane. Ali, ove dve granice, čak i kada obe postoje, ne moraju da budu jednake ni jedna drugoj ni $f(a)$, *vrednosti* funkcije kada je $x = a.$ Precizan uslov za neku određenu konačnu granicu može ovako da se izrazi[1]:

„Da bi vrednost od y desno i levo od konačnog broja a (recimo desno) imala određenu i konačnu granicu, nužno je i dovoljno da, za svaki proizvoljno manji pozitivan broj σ, postoji pozitivan broj ε takav da razlika $y_{a+\varepsilon} - y_{a+\delta}$ između vrednosti $y_{a+\varepsilon}$ od y za $x = a + \varepsilon$ i vrednosti $y_{a+\delta}$ koja odgovara vrednosti $a + \delta$ od x bude numerički manja od σ, za svako δ koje je veće od 0 a manje od ε".

Uopšte uzev je moguće umesto ovakvog definisanja *neke određene* granice funkcije i ispitivanja da li ona postoji definisati celu klasu granica[2]. U ovom metodu, broj z pripada klasi granica od y za $x = a$ ako se unutar bilo kog intervala koji sadrži a, ma koliko bio mali, y približava z više nego što bi se približilo u odnosu na bilo koju datu razliku. Tako će, na primer, sin $1/x$, kada se x približava 0, uzeti svaku vrednost od -1 do +1 (uključujući obe) u svakom konačnom intervalu koji sadrži 0, ma koliko bio mali. Stoga u ovom slučaju interval od -1 do + 1 formira klasu granica za $x = 0$. Ovaj metod ima tu prednost da *klasa* granica uvek postoji. Onda je lako definisati *neku određenu* granicu kao jedini član klase granica, a u slučaju da ove klase imaju samo jedan član. Ovaj metod istovremeno deluje i jednostavnije i opštije.

305. Pošto smo sada saglasni u pogledu značenja kontinuirane funkcije i granice funkcije, možemo da pređemo na pitanje izvoda funkcije ili diferencijalnog količnika. Ranije je pretpostavljano da su sve kontinuirane funkcije diferencijabilne, ali je sada poznato da je

---

[1] Dini, *op. cit*. str. 38.

[2] Vidi Peano, *Rivista di Matematica*, II, str. 77–79; *Formulaire*, Deo III, §73, 1.0.

to bila greška. Neke funkcije su svuda diferencijabilne a neke druge su diferencijabilne svuda osim u jednoj tački, neke su svuda diferencijabilne nadesno ali ponekad ne i nalevo, neke pak sadrže beskonačan broj tačaka u bilo kom konačnom intervalu u kojima nisu diferencijabilne iako jesu u nekom beskonačno većem broju tačaka, a, naposletku, neke – a one su zapravo najopštije klase – nisu uopšte diferencijabilne[1]. Ali, uslovi pod kojima su funkcije diferencijabilne, mada su od nekog značaja za filozofiju prostora i kretanja, ovde ne moraju mnogo da nas se tiču; u svakom slučaju, najpre moramo da znamo šta je zapravo diferencijal.

Ako je $f(x)$ funkcija koja je konačna i kontinuirana u tački x, onda se može desiti da funkcija

$$\{f(x+\delta)-f(x)\}/\delta$$

ima određenu granicu kada se δ približava nuli. Ako se ovo desi, granicu označavamo sa $f'(x)$ i nazivamo je izvodom ili diferencijalom od $f(x)$ u tački x. Drugim rečima, z predstavlja izvod od $f(x)$ u tački x ako postoji neki broj z takav da, ako je dat bilo koji ma koliko mali broj ε i ako je δ bilo koji broj manji od nekog broja η, ali pozitivan, onda se $\{f(x \pm \delta)-f(x)\}/\pm\delta$ razlikuje od z za manje od ε. Ako granica o kojoj je reč ne postoji, onda $f(x)$ nema izvod u tački x. Ako $f(x)$ nije kontinuirano u ovoj tački, granica ne postoji; ako je $f(x)$ kontinuirano, granica može ali ne mora da postoji.

306. Jedino na šta je sada značajno da ukažemo jeste da infinitezimale nisu implicirane ovom definicijom. Broj δ je uvek konačan i u definiciji granice ne postoji ništa što bi impliciralo suprotno. U stvari, $\{f(x+\delta)-f(x)\}/\delta$, kada se posmatra kao funkcija od δ, sasvim je neodređeno kada je $\delta = 0$. Kao što smo videli, granica jedne funkcije za neku datu vrednost nezavisne promenljive predstavlja sasvim različit pojam od vrednosti funkcije koju bi funkcija imala za

[1] Vidi Dini, *op. cit*. Glave X, XI, XII; *Encyclopädie der math. Wissenschaften*, Band II, Heft I (Leipzig, 1899), naročito str. 20–22.

vrednost nezavisne poremenljive o kojoj je reč, a te vrednosti mogu ali ne moraju da budu isti broj. U ovom slučaju granica može da se definiše ali vrednost za $\delta = 0$ može da nema značenje. Stoga učenje o granicama leži u osnovi kalkulusa, a ne bilo koje navodno korišćenje infinitezimala. Ovo je jedini aspekt ovog predmeta koji je od filozofskog značaja i samo sam zbog iznošenja na videlo ovog aspekta opteretio čitaoca sa toliko mnogo matematike.

307. Pre ispitivanja samih infinitezimala, preostaje da definišemo određeni integral i da pokažemo da se ni tu ne pretpostavljaju infinitezimale. Za nas nije značajan neodređeni integral koji predstavlja konvers diferencijala, ali određeni integral ima nezavisnu definiciju koju moramo ukratko da ispitamo.

Baš kao što izvod funkcije predstavlja granicu razlomka, tako određeni integral predstavlja granicu zbira[1]. Određeni integral može da se definiše na sledeći način: neka je $f(x)$ jednovrednosna i konačna funkcija u intervalu od α do β (uključujući oba). Podelimo ovaj interval na ma koliko n delova pomoću $(n-1)$ tačaka $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ i nazovimo sa $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ n intervala $x_1 - \alpha, x_1 - x_2, \ldots \beta - x_{n-1}$.. U svakom od ovih intervala, δ_8, da uzmemo bilo koju od vrednosti, recimo $f(\zeta_8)$, koju $f(x)$ uzima u ovom intervalu i pomnožimo ovu vrednost intervalom δ_8. Zatim, formirajmo zbir $\sum_1^n f(\zeta_8)\delta_8$. Ovaj zbir će uvek biti konačan. E sada, ako kako n raste zbir teži jednoj određenoj granici, ma koje $f(\zeta_8)$ može da se izabere u njenom intevalu i ma koji intevrvali da su izabrani (samo pod uslovom da su svi manji od bilo kog pridodatog broja za dovoljno veliku vrednost od n) – onda se ta

[1] Definicija određenog integrala donekle se razlikuje u različitim delima. Cf. Dini, *op. cit.*, §§178–181; Jordan, *Cours d'Analyse*, Vol I (Paris, 1893), glava I, §§41–48; *Encyclopädie der mathematischen Wissenschaften*, II. A. 2, §31. Definicija integrala kao granice zbira više je u saglasnosti sa Lajbnicovim gledištima nego definicija integrala kao inverzije izvoda, ali su je Bernuli i Ojler prognali i tek ju je Koši povratio. Vidi reference iz *Encyclopädie der math. Wis. ad loc*.

granica naziva određenim integralom od $f(x)$ od α do β. Ako ne postoji takva granica, $f(x)$ nije integrabilno od α do β.

308. Kao i u slučaju izvoda, i ovoj definiciji može da se uputi samo jedna primedba. Određeni integral ne pretpostavlja ni beskonačno ni infinitezimale i on sam nije zbir već samo i strogo granica zbira. Svi termini koji se javljaju u zbiru čija je granica određeni integral konačni su i sâm zbir je takođe konačan. Ako bismo pretpostavili da je granica zapravo dosegnuta, onda bi uistinu broj intervala bio beskonačan, a veličina svakog bi bila infinitezimalna; ali, u tom slučaju zbir postaje besmislen. Stoga zbir ne sme da se posmatra kao da stvarno doseže njegovu granicu. Ali, ovo je jedan aspekt svih nizova uopšte. Bilo koji niz koji uvek raste ili opada i koji nema poslednji termin ne može da dosegne svoju granicu; drugi beskonačni nizovi *mogu* da imaju termin jednak njihovoj granici ali, ako je tako, onda je to puka slučajnost. Opšte je pravilo da granica ne pripada nizu koji ograničava, a u definiciji izvoda i definiciji integrala vidimo samo još jedan primer ove činjenice. Dakle, takozvani infinitezimalni račun nema nikakve veze sa infinitezimalama, a samo indirektno ima veze sa beskonačnim – njegova veza sa beskonačnim sastoji se u tome što podrazumeva granice, a samo beskonačni nizovi imaju granice.

Pošto gorenavedene definicije pretpostavljaju množenje i deljenje, suštinski su aritmetičke. Za razliku od definicija granica i kontinuiteta, ne možemo ih smatrati čisto ordinalnim. Ali, očigledno je da istovremeno mogu da se prošire na bilo koje numerički merljive veličine i samim tim i na sve nizove u kojima prostiranja ili rastojanja mogu da se mere. Pošto pod ovo potpadaju prostori, vremena i kretanja, kalkulus je primenljiv u geometriji i dinamici. Kasnije ću morati da kažem nešto u pogledu aksioma koji je uključen u pretpostavku da su geometrijske i dinamičke funkcije diferencijabilne i integrabilne. Sada je vreme da sprovedem kritičko ispitivanje samih infinitezimala.

Glava XL

INFINITEZIMALE I NEPRAVA BESKONAČNOST

309. Sve donedavno bila je stvar opšteg verovanja da kontinuitet, izvod i određeni integral svi odreda pretpostavljaju aktualne infinitezimale, to jest da čak i ako bi definicije ovih pojmova mogle formalno da se oslobode od eksplicitnog pominjanja infinitezimala, u primeni ovih definicija, aktualne infinitezimale bi ipak uvek morale da se pojave. Ovo verovanje je sada generalno napušteno. Definicije koje su date u prethodnim glavama ni na koji način ne impliciraju infinitezimale i izgleda da je ovaj pojam postao matematički beskoristan. U ovoj glavi ću najpre da dam definiciju infinitezimala, a onda ću da ispitam slučajeve u kojima ovaj pojam nastaje. Završiću sa kritičkim razmatranjem verovanja da kontinuitet implicira infinitezimale.

Infinitezimale su, uopšte uzev, bile vrlo maglovito definisane. Smatrale su se ili brojevima ili veličinama koje, iako nisu nula, ipak jesu manje od bilo kog konačnog broja ili veličine. Infinitezimale su bile *dx* ili *dy* kalkulusa, vreme u kojem lopta bačena vertikalno naviše ostaje na najvišoj tački svoje putanje, rastojanje između tačke na liniji i sledeće, itd., itd. Ali, nijedan od ovih pojmova nije sasvim precizan. Kao što smo videli u poslednjoj glavi, *dx* i *dy* uopšte nisu ništa: *dy/dx* predstavlja granicu razlomka čiji su brojilac i imenilac konačni brojevi, ali samo *dy/dx* nije razlomak. Vreme trajanja bačene lopte na najvišoj tački je vrlo složen pojam, koji podrazumeva celokupnu filozofsku teoriju kretanja; kada budemo izlagali ovu teoriju u Sedmom delu, videćemo da takvog vremena i nema. Rastojanje između uzastopnih tačaka pretpostavlja da postoje uzastopne tačke – što je gledište za koje imamo sve razloge da ga odbacimo. A tako je i sa većinom primera – oni ne omogućavaju preciznu definiciju onoga na šta se misli pod infinitezimalom.

310. Koliko mi je poznato, postoji samo jedna precizna definicija koja od infinitezimala čini čisto relativan pojam, korelativan nečemu za šta se proizvoljno pretpostavlja da je konačno. Kada umesto toga smatramo ono za šta se pretpostavljalo da je infinitezimala kao konačna, korelativni pojam tome je ono što Kantor naziva nepravo beskonačnim (*Uneigentlich-Unendliches*). Definicija relacije o kojoj je reč dobijena je poricanjem Arhimedovog aksioma, baš kao što su transfinitni brojevi dobijeni poricanjem matematičke indukcije. Ako su P i Q bilo koja dva broja ili bilo koje dve merljive veličine, za njih se kaže da su konačni jedan u odnosu na drugi kada, ako je P manji, onda postoji konačan ceo broj n takav da je nP veće od Q. Postojanje takvog celog broja čini suštinu Arhimedovog aksioma i definicije relativne konačnosti. Primetićemo da to pretpostavlja definiciju apsolutne konačnosti među brojevima – definiciju koja, kao što smo videli, zavisi od dve stvari, (1) veze 1 sa logičkim pojmom jednostavnosti ili 0 sa logičkim pojmom nulte klase; (2) principa matematičke indukcije. Pojam relativne konačnosti sasvim je različit od pojma apsolutne konačnosti. Ova druga se primenjuje samo na brojeve, klase i deljivosti, dok se ona prva primenjuje na bilo koju vrstu merljive veličine. Bilo koja dva broja, klase ili deljivosti koja su oba apsolutno konačna, takođe su i relativno konačna, ali obrnuto ne važi. Na primer, ω i $\omega \cdot 2$, inč i stopa, dan i godina predstavljaju relativno konačne parove iako se sva tri sastoje od termina koji su apsolutno beskonačni.

Dakle, definicija infinitezimala i nepravo beskonačnog glasi ovako. Ako su *P* i *Q* dva broja ili dve merljive veličine iste vrste, i ako je, kada je *n* bilo koji konačan ceo broj, *nP* uvek manje od *Q*, onda je *P* infinitezimalno u odnosu na *Q* i *Q* je beskonačno u odnosu na *P*. S obzirom na brojeve, ovi relativni termini nisu potrebni; jer, ako je u pretpostavljenom slučaju *P* apsolutno konačno, onda je *Q* apsolutno beskonačno; dok, ako bi bilo moguće da je *Q* apsolutno konačno, *P* bi bilo apsolutno infinitezimalno – što predstavlja slučaj za koji ćemo, međutim, uvideti da je nemoguć. Stoga ću ubuduće pretpostavljati da *P* i *Q* nisu brojevi već veličine one vrste od koje su barem neke numerički merljive. Trebalo bi primetiti da je u pogledu veličina Arhimedov aksiom jedini način definisanja ne samo infinitezimala već, takođe, i beskonačnog. O veličini koja nije numerički merljiva ne može ništa da se kaže, izuzev da je ona veća od neke druge veličine njene vrste i manja od drugih; ali, na osnovu takvih iskaza beskonačnost ne može da se dobije. Čak ako i postoji veličina veća od svih ostalih njene vrste, nema razloga da se smatra beskonačnom. Konačnost i beskonačnost su suštinski numerički pojmovi i jedino relacijom prema brojevima ovi termini mogu da se primene na druge entitete.

311. Sledeće pitanje za razmatranje jeste: šta bi trebalo da budu primeri infinitezimala? Iako postoji daleko manje primera nego što je nekada bilo pretpostavljano, ipak postoje neki koji su značajni. Pre svega, ako smo bili u pravu kada smo smatrali deljivost veličinom, jasno je da je deljivost bilo koje celine koja sadrži konačan broj prostih delova infinitezimalna kada se uporedi sa celinom koja sadrži beskonačno mnogo delova. Ako se broj delova uzme kao mera, svaka beskonačna celina će biti veća od *n* puta svake konačne celine, ma koji konačan broj da je *n*. Prema tome, ovo je savršeno jasan primer. Ali, ne sme se pretpostaviti da odnos deljivosti dve celine od kojih je barem jedna transfinitna može da se meri odnosom kardinalnih brojeva njihovih prostih delova. Postoje dva razloga zbog kojih ovo ne može da se učini. Prvi je da dva transfinitna kardinala nemaju nikakvu relaciju koja bi bila strogo analogna odnosu; zapravo, definicija odnosa je dobijena pomoću matematičke indukcije. Relacija dva transfinitna kardinala α i γ izražena jednačinom $\alpha\beta = \gamma$ ima izvesnu sličnost sa integralnim odnosom i $\alpha\beta = \gamma\delta$ može da se upotrebi za definisanje drugih odnosa. Ali, tako definisani odnosi nisu baš slični konačnim odnosima. Drugi razlog zbog kojeg beskonačne deljivosti ne smeju da se mere transfinitnim brojevima jeste da celina mora uvek da ima više deljivosti nego deo (pod uslovom da deo koji ostaje nije relativno infinitezimalan), iako može da ima isti transfinitni broj. Ukratko, deljivosti su, slično ordinalima, jednake sve dok su celine konačne, onda i samo onda kada su kardinalni brojevi celina isti; ali, pojam veličine deljivosti razlikuje se od pojma kardinalnog broja i vidno se od njega odvaja čim pređemo na beskonačne celine.

Dve beskonačne celine mogu biti takve da je jedna beskonačno manje deljiva nego što je druga. Razmotrimo, na primer, dužinu jedne konačne prave linije i površinu kvadrata nad njom, ili dužinu jedne konačne prave linije i dužinu cele prave linije čiji je ona deo (osim u konačnim prostorima), ili površinu i zapreminu, ili racionalne i realne brojeve, ili kolekciju tačaka na konačnom delu linije koja može da se dobije fon Štautovom kvadrilateralnom konstrukcijom i celokupnu kolekciju tačaka na datom konačnom delu[1]. Sve ove veličine su jedne iste vrste, naime, deljivosti, i sve su beskonačne deljivosti, ali su različitih redova beskonačnosti. Tačke na ograničenom delu linije koje mogu da se dobiju kvadrilateralnom konstrukcijom formiraju kolekciju koja je infinitezimalna s obzirom na taj dati deo; taj deo je ordinalno infinitezimalan[2] s obzirom na bilo koju ograničenu površinu; bilo koja ograničena površina ordinalno je infinitezimalna s obzirom na bilo koju organičenu zapreminu; i, bilo koja ograničena zapremina (osim u konačnim prostorima) ordinalno je

[1] Vidi Deo VI, Glava XLV.

[2] Vidi Deo VI, Glava XLVII, §397.

infinitezimalna s obzirom na ceo prostor. U svim ovim slučajevima reč *infinitezimala* upotrebljena je strogo u skladu sa gorenavedenom definicijom koja je dobijena pomoću Arhimedovog aksioma. Ono što sa matematičkog stanovišta čini ove infinitezimale donekle beznačajnim jeste to što merenje suštinski zavisi od Arhimedovog aksioma i, uopšte uzev, ne može da se proširi pomoću transfinitnih brojeva iz razloga koji su upravo bili objašnjeni. Stoga su dve deljivosti, od kojih je jedna infinitezimalna s obzirom na drugu, obično smatrane veličinama različite vrste, a smatrati ih veličinama iste vrste nema nikakvu drugu prednost osim filozofske tačnosti. Međutim, sve one su strogo primeri infinitezimala i njihovi nizovi će ilustrovati relativnost termina *infinitezimala*.

Zanimljiv metod upoređivanja izvesnih veličina analogno deljivostima bilo kojih beskonačnih kolekcija tačaka sa deljivostima kontinuiranih prostiranja dao je Štolc (Stolz)[1], a jedan vrlo sličan ali opštiji metod dao je Kantor[2]. Ovi metodi su suviše matematički da bismo ovde mogli u potpunosti da ih objasnimo, ali srž Štolcovog metoda može ukratko da se objasni. Pretpostavimo da je kolekcija tačaka x sadržana u nekom konačnom intervalu od a do b. Podelimo ovaj interval na bilo koji broj n delova, a svaki od tih delova ponovo na bilo koji broj delova itd., a neka sledujuće podele budu obavljene tako da svi delovi postaju redom sve manji od bilo kog pripisanog broja δ. U svakoj fazi saberimo sve delove koji sadrže tačke od x'. Neka rezultujući broj u m-toj fazi bude S_m. Tada sledujuće podele moraju da smanjuju ovaj zbir, ali ne mogu da ga povećavaju. Onda, kako broj podela raste, S_m mora da se približava granici L. Ako je x' kompaktno celom dužinom intervala, imaćemo $L = b - a$; ako bilo koji konačni izvod od x' iščezava, $L = 0$. L očigledno daje analogiju sa određenim integralom, ali se ne zahtevaju nikakvi uslovi za

---

1 *Math. Annalen*, 23, „Ueber einen zu einer unendlichen Punktmenge gehörigen Grenzwerth“.

2 *Ib*. „Ueber unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten“, br. 6.

postojanje *L*. Ali, *L* ne sme da se poistoveti sa ovom deljivošću zato što su neki kompaktni nizovi, na primer, niz racionalnih brojeva, manje deljivi od nekih drugih, na primer, od kontinuuma, ali daju istu vrednost od *L*.

312. Slučaj u kojem se nekada pretpostavljalo da su infinitezimale naročito očigledne jeste slučaj kompaktnih nizova. Međutim, u ovom slučaju je moguće dokazati da ne mogu da postoje infinitezimalni segmenti[1], pod uslovom da je numeričko merenje uopšte moguće – a ako nije moguće, infinitezimale, kao što smo videli, nisu definljive. Prvo, očigledno je da je segment koji je sadržan između dva različita termina uvek beskonačno deljiv; jer, pošto postoji termin *c* između bilo koja dva termina *a* i *b*, postoji neki drugi termin *d* između *a* i *c* itd. Stoga nijedan segment sa krajevima ne može da sadrži konačan broj termina. Ali, segmenti koji su definisani kao klase termina mogu (kao što smo videli u Glavi XXXIV) da nemaju granični termin. Međutim, u tom slučaju, pod uslovom da se segment ne sastoji od jednog termina *a*, on će sadržati neki drugi termin *b*, i stoga beskonačan broj termina. Stoga su svi segmenti beskonačno deljivi. Sledeći korak jeste da se definišu umnošci segmenata. Dva segmenta sa krajevima mogu da se sabiraju tako što se segment jednak jednom od njih postavi na kraj drugog, tako da se dobije novi segment, a ako su ova dva segmenta bila jednaka, za novi se kaže da je dvostrukost od bilo kog od ta dva. Ali, ako dva segmenta nemaju krajeve, onda ovaj postupak ne može da se primeni. Njihov zbir u tom slučaju definisao je profesor Peano kao logički zbir svih segmenata dobijenih dodavanjem dva segmenata sa krajevima koji su sadržani u dvama segmentima koja treba sabrati, svaki u po jednom[2]. Pošto smo definisali ovaj zbir, možemo da definišemo bilo koji konačan umnožak jednog segmenta. Stoga možemo da definišemo

---

[1] Vidi Peano, *Rivista di Matematica*, Vol. II, str. 58–62.

[2] *Loc. cit*, str. 61, br. 9.

klasu termina sadržanih u *nekom* konačnom umnošku našeg segmenta, to jest logički zbir svih njegovih konačnih umnožaka. Ako, s obzirom na sve veće segmente naš segment podleže Arhimedovom aksiomu, onda će ova nova klasa sadržati sve termine koji dolaze posle početka našeg segmenta. Ali, ako je naš segment infinitezimalan s obzirom na neki drugi segment, onda klasa o kojoj je reč neće sadržati neke tačke ovog drugog segmenta. Za takav slučaj je pokazano da su svi transfinitni umnošci našeg segmenta međusobno jednaki. Stoga sledi da klasa formirana logičkim zbirom svih konačnih umnožaka našeg segmenta koji mogu da se nazovu beskonačnim umnošcima našeg segmenta, mora da bude segment koji nema kraj zbog toga što se segment sa krajevima uvek povećava dupliranjem. „Svaki od ovih rezultata“, zaključuje profesor Peano, „protivreči običnom pojmu segmenta. A iz činjenice da infinitezimalni segment ne može da se učini konačnim pomoću bilo kog aktualnog beskonačnog množenja, ja zaključujem sa Kantorom, da on ne može da bude element u konačnim veličinama“ (str. 62). Ali, mislim da je opravdan čak i jedan stroži zaključak. Jer, videli smo da u kompaktnom nizu svakom segmentu odgovara neki segment segmenata, kao i da on uvek ima kraj određen njegovim definišućim segmentom; dalje, da je numerička mera segmenata segmenata potpuno ista kao numerička mera prostih segmenata; odakle primenom gore dobijenog rezultata na segmente segmenata dobijamo izvesnu protivrečnost pošto nijedan od njih ne može da bude bez krajeva, a infinitezimalni segment ne može da ima krajeve.

U slučaju racionalnih ili realnih brojeva, potpuno znanje koje o njima posedujemo čini nepostojanje infinitezimala dokazivim. Racionalan broj je odnos dva konačna cela broja, a svaki takav odnos je konačan. Realan broj različit od 0 predstavlja segment niza racionalnih brojeva; otuda, ako je x, realan broj različit od 0, onda postoji ne-nulta klasa u racionalnih brojeva takva da, ako je y neko u, a z manje od y, z je neko x to jest pripada segmentu koji je x. Stoga je svaki realan broj različit od 0 klasa koja sadži racionalne brojeve, a svi racionalni brojevi su konačni; samim tim, svaki realan broj je konačan. Sledstveno, ako bi bilo moguće u bilo kojem smislu govoriti o infinitezimalnim brojevima, onda bi to morao da bude neki radikalno nov smisao.

313. Sada prelazim na jedno veoma teško pitanje o kojem bih bio rad da ne kažem ništa – mislim na pitanje o redovima beskonačnosti i infinitezimalnosti funkcija. Najveći autoriteti su po ovom pitanju podeljeni: Diboa-Remon, Štolc i mnogi drugi koji tvrde da ti redovi formiraju posebnu klasu veličina u kojima se javljaju aktualne infinitezimale, dok Kantor strogo tvrdi da je cela ta teorija pogrešna[1]. Postavimo stvar što je moguće jednostavnije, razmotrimo funkciju $f(x)$ čija je granica kako se x približava nuli nula. Može se desiti da za neki konačan realan broj α odnos $f(x)/x^\alpha$ ima konačnu granicu kako se x približava nuli. Može da postoji samo jedan takav broj, ali može da ne postoji nijedan. Onda α, ako postoji takav broj, može da se nazove redom u kojem $f(x)$ postaje infinitezimalno ili pak redom malenosti od $f(x)$ kako se x približava nuli. Ali za neke funkcije, na primer $1/\log x$ ne postoji takav broj α. Ako je α bilo koji konačni realan broj, granica od $1/x^\alpha \log x$ kako se x približava nuli jeste beskonačna. Znači, kada je x dovoljno malo, $1/x^\alpha \log x$ vrlo je veliko i može se učiniti većim od bilo kog datog broja kojim se x čini dovoljno malim – i to ma koji konačan broj da je α. Stoga, da bi se izrazio red malenosti $1/x^\alpha \log x$, neophodno je smisliti novi infinitezimalni broj koji može da se označi sa $1/g$. Slično tome, biće nam potrebni beskonačno veliki brojevi da bismo izrazili red malenosti od (recimo) $e^{-1/x}$ kako se x približava nuli. I ne postoji kraj nizanju ovih redova malenosti: red malenosti od $1/\log(\log x)$, na primer, beskonačno je manji od reda malenosti od $1/\log x$ itd. Tako imamo celu hijerarhiju

[1] Vidi Du Bois Reymond, *Allgemeine Functionentheorie* (1882), str. 279ff; Stolz, *Allgemeine Arithmetik*, deo I (Leipzig, 1885), odeljak IX, Anhang; Kantor, *Rivista di Matematica*, V, str. 104–8.

veličina od kojih su sve u bilo kojoj klasi infinitezimalne s obzirom na sve u nekoj višoj klasi, a od kojih je samo jedna klasa formirana od svih konačnih realnih brojeva.

U ovom postupanju Kantor nalazi začarani krug; i premda je pitanje teško, izgleda da je Kantor u pravu. On primećuje (*loc. cit.)* da takve veličine ne mogu da se uvedu, osim ukoliko nemamo razlog da mislimo da postoje takve veličine. Ovaj problem je sličan onom koji se odnosi na granice, a Kantor tvrdi da u ovom slučaju izvesne protivrečnosti mogu da se dokažu u vezi sa pretpostavljenim infinitezimalama. Ako bi postojali infinitezimalni brojevi j, onda bi i za njih važilo

$\mathrm{Lim}_{x=0}\ 1/(\log x \cdot x^{j}) = 0$

pošto x^{j} mora da premaši ½. On pokazuje da i kontinuirane, diferencijabilne i uniformno rastuće funkcije mogu da imaju sasvim neodređen red malenosti ili beskonačnosti: da, u stvari, za neke takve funkcije ovaj red osciluje između beskonačnih i infinitezimalnih vrednosti u zavisnosti od toga na koji način se približava granici. Stoga mislim da možemo da zaključimo da su ove infinitezimale matematičke fikcije. To može da se pojača uviđanjem da, ako bi postojali infinitezimalni brojevi, onda bi postojali infinitezimalni segmenti brojevnog kontinuuma što je, kao što smo upravo videli, nemoguće.

314. Stoga, da rezimiramo ono što je rečeno u vezi sa infinitezimalama, mi pre svega vidimo da je infinitezamala relativan termin i da u pogledu veličina različitih od deljivosti ili deljivosti celina koje su beskonačne u apsolutnom smislu, ne može da bude drugačiji do relativan termin. Ali, u slučajevima u kojima ima apsolutno značenje, to značenje je nerazalučivo od konačnosti. Videli smo da se infinitezimale, iako potpuno beskorisne u matematici, javljaju u izvesnim primerima – na primer, dužine ograničenih pravih linija su infinitezimale kada se uporede sa površinama poligona, a ovi opet kada se uporede sa zapreminama poliedara. Ali, kao što smo videli, takve istinske primere infinitezimala su matematičari uvek tretirali kao veličine drugačije vrste, zato što nikakvo numeričko upoređivanje nije bilo moguće, čak ni pomoću transfinitnih brojeva, između površine i dužine ili zapremine i površine. Numeričko merenje zapravo potpuno zavisi od Arhimedovog aksioma i ne može da se proširi kao što je Kantor proširio brojeve. I, naposletku, videli smo da ne postoje infinitezimalni segmenti u kompaktnim nizovima, i – ono što je sa tim usko povezano – redovi malenosti funkcija ne mogu da se smatraju istinskim infinitezimalama. Infinitezimale su, prema tome – možemo zaključiti – veoma ograničen i matematički krajnje nevažan pojam, od kojeg su i beskonačnost i kontinuitet podjednako nezavisni.

Glava XLI

FILOZOFSKI ARGUMENTI KOJI SE ODNOSE NA INFINITEZIMALE

315. Prethodnim razmatranjima smo završili naš sumarni pregled onoga što matematičari imaju da kažu u vezi sa kontinuiranim, beskonačnim i infinitezimalnim. E sad, ako već niko od prethodnih filozofa nije tretirao ove teme, mogli bismo da ostavimo ovu diskusiju i da naše rezultate primenimo na prostor i vreme. Jer, ja zastupam paradoksalno mišljenje da je ono što može matematički da se dokaže i istinito. Međutim, pošto se skoro niko od filozofa ne slaže sa ovim mišljenjem i pošto su mnogi navodili elaborirane argumente u prilog gledišta koje se razlikuje od gore izloženog, biće neophodno da kontroverzno ispitamo glavne tipove suprotnih teorija i da odbranimo, ukoliko je to moguće, mesta u kojima se moje mišljenje razlikuje od standardnih. Za tu svrhu će Koenovo delo na koje smo se već pozivali biti naročito korisno, ne samo zbog njegovih eksplicitnih radova koji se odnose na temu koju sada razmatramo, već i zbog prevashodno istorijskom izvrsnošću prouzrokovanih izvesnih vrlo značajnih matematičkih grešaka, za koje mi izgleda da ti radovi sadrže, koje su odvele na stranputicu druge filozofe koji nisu upoznati sa modernom matematikom iz prve ruke[1].

[1] Na primer, gospodin Lata, u svom članku „On the Relations of the Philosophy of Spinoza and that of Leibniz“, *Mind*, N. S., broj 31.

316. U gorenavedenom izlaganju, diferencijal se ispostavio kao filozofski nevažna primena učenja o granicama. Zaista, da nije njegovog tradicionalnog značaja, jedva bi zasluživao i da bude pomenut. Videli smo da se u definiciji diferencijala nigde ne pojavljuju infinitezimale. Kod diferencijala u kojima figuriraju *dx* i *dy*, *dx* i *dy* sami po sebi nisu ništa, a *dy/dx* nije razlomak. Stoga je u modernim radovoma o kalkulusu notacija $f'(x)$ zamenila *dy*/*dx*, pošto ova druga sugeriše pogrešne pojmove. Možemo primetiti da je notacija $f'(x)$ mnogo sličnija Njutnovom $\dot{y}$, a ta sličnost počiva na činjenici da je na ovom mestu moderna matematika više u harmoniji sa Njutnom nego sa Lajbnicom. Lajbnic je upotrebljavao oblik *dy*/*dx* zato što je verovao u infinitezimale; sa druge strane, Njutn definitivno tvrdi da njegova fluksija nije razlomak. „Ovi poslednji odnosi", kaže Njutn, „sa kojima kvantiteti iščezavaju, uistinu nisu odnosi poslednjih kvantiteta, nego granice prema kojima odnosi kvantiteta koji se smanjuju bez granice uvek konvergiraju, i kojima se približavaju bliže nego bilo kojom datom razlikom"[1].

Ali, kada se osvrnemo na radove kao što je Koenov, nailazimo na *dx* i *dy* koji se tretiraju kao odvojeni, kao realne infintezimale, kao intenzivno realni elementi od kojih je sastavljen kontinuum (str. 14, 28, 144, 147). Očigledno je da se gledište prema kojem kalkulus zahteva infinitezimale ne dovodi u pitanje; u svakom slučaju, nikakvi argumeni uopšte nisu pruženi u prilog tom gledištu. Ono je za većinu filozofa koji su razmatrali kalkulus pretpostavljeno kao samoočigledno. Pogledajmo radi nas samih koje vrste razloga mogu da se iznesu njemu u prilog.

317. Mnogi argumenti u prilog gledištu o kojem je reč potiču od većine onih koji se bave prostorom i kretanjem – argumenti koje Koen u nekoj meri odobrava (str. 34, 37), iako prihvata da

---

[1] *Principia*, knjiga I, odeljak I, lema XI, Scholium. Ceo Scholium je od izvanrednog značaja iako njegovi delovi pate od više grešaka od pasusa koji sam citirao.

diferencijal može da se dobije isključivo pomoću brojeva koje, međutim, sledeći Kanta, on uzima kao da impliciraju vreme (str. 20, 21). Pošto analiza prostora i kretanja tek treba da usledi, za sada ću se ograničiti na argumente koji mogu da se izvedu iz čisto numeričkih primera. U cilju potpune određenosti, nastojaću da u najvećoj mogućoj meri izvodim iz samog Koena mišljenja koja treba osporiti.

318. Koen počinje (str. 1) tvrđenjem da problem infinitezimala nije čisto logički: on pripada pre epistemologiji, koja se, pretpostavljam, odlikuje time što zavisi od čistih opažaja kao i od kategorija. Ovo kantovsko mišljenje je potpuno suprotno filozofiji koju implicira ova moja knjiga, ali bi nas isuviše udaljilo od teme ako bismo o tome ovde diskutovali, a pominjem ga uglavnom radi objašnjenja frazeologije Koenove knjige koju sada ispitujemo. Koen nastavlja time što odmah odbacuje gledište da infinitezimalni račun može nezavisno da se izvede matematikom iz metoda granica. Ovaj metod, kaže on (str. 1), „sastoji se u zamisli da elementarna koncepcija jednakosti mora da bude upotpunjena tačnim pojmom granice. Tako se, na prvom mestu, koncepcija jednakosti pretpostavlja… Zatim, na drugom mestu, metod granica pretpostavlja koncepciju veličine… Ali, u pretpostavljenoj koncepciji veličine istovremeno se pretpostavlja i granična veličina. Jednakost koja je definisana u elementarnom učenju o veličini nezavisna je od tih graničnih veličina. S obzirom na ovu jednakost, veličine se računaju kao jednake ako se njihova razlika sastoji u graničnoj veličini, i uprkos tome. Stoga, elementarna koncepcija jednakosti mora da bude – ovo je pojam metode granica – ne toliko *upotpunjena* koliko *ispravljena* tačnom koncepcijom granice. Jednakost mora da se smatra *pred-stupnjem* graničnog odnosa (*Vorstufe des Grenz-Verhältnises*[*])“.

[*] Radi veće jasnoće, citiramo celu frazu i na nemačkom (prim. stručnih redaktora prevoda).

319. Citirao sam ovaj pasus u celosti zbog grešaka kojima su tipično podložni nematematičari koji se bave ovim pitanjem. Prvo, jednakost uopšte nije relevantna za granice. Pretpostavljam da Koen ima na umu slučajeve poput kruga i upisanih poligona, gde ne možemo da kažemo da je krug jednak nekom od poligona, već samo da predstavlja njihovu granicu; ili, da uzmemo primer iz aritmetike, konvergentni niz čiji je zbir π ili $\sqrt{2}$. Ali, u svim ovim primerima ima nečeg irelevantnog i spoljašnjeg, a ima i mnogih nepotrebnih komplikacija. Apsolutno najprostiji primer granice je ω, uzeto kao granica ordinalnih brojeva. Ovde sigurno nema nikakve vrste jednakosti. Ipak, u svim slučajevima u kojima su granice definisane progresijama – a to su uobičajeni slučajevi – imamo niz tipa koji je predstavljen konačnim ordinalima zajedno sa ω. Razmotrimo, na primer, niz $2-\frac{1}{n}$ zajedno sa 2, pri čemu n može da uzme sve pozitivne konačne celobrojne vrednosti. Ovde je niz istog tipa kao i ranije, a 2 je, kao i ranije, granica niza. Ali ovde – a to je ono što je zavelo Koena – razlika između 2 i sukcesivnih termina niza postaje manja od bilo koje pripisane veličine, i tako izgleda da imamo jednu vrstu proširenog kvaliteta između 2 i poslednjih termina niza $2-\frac{1}{n}$. Ali, ispitajmo ovo. Na prvom mestu, ovo zavisi od činjenice da racionalni brojevi predstavljaju niz u kojem ima rastojanja koja su i sama racionalni brojevi. Ali, znamo da su rastojanja nepotrebna za granice, i da su prostiranja podjednako delotvorna. Sada, imajući u vidu prostiranja, 2 je granica od $2-\frac{1}{n}$ zato što nijedan racionalni broj ne dolazi između 2 i svih termina niza $2-\frac{1}{n}$ – upravo to je smisao u kojem je ω granica konačnih celih brojeva. I, samo zbog toga što niz $2-\frac{1}{n}$ formira progresiju, to jest zato što je sličan nizu konačnih celih brojeva, znamo da je 2 njegova granica. Činjenica da se ovi termini, kako odmičemo, malo razlikuju od 2, zavisi ili od toga što u našem nizu postoji rastojanje, što je slučajna i irelevantna okolnost, ili od činjenice da sukcesivna prostiranja do 2 mogu da se učine manjim od svakog pripisanog prostiranja do 2, a što sledi iz pojma granice, ali nema nikakve veze sa jednakošću. I uvek kada je naš niz koji treba da ima granicu deo niza koji predstavlja funkciju od ω, prostiranje od bilo kog termina do granice uvek je beskonačno u jedinom smislu u kojem takvi nizovi imaju beskonačna prostiranja, i u jednom vrlo realnom smislu prostiranje se ne smanjuje kako se približavamo granici, zato što i ordinalni i kardinalni brojevi termina tog prostiranja ostaju konstantni.

Već smo sasvim dovoljno videli u kojem se smislu i koliko veličina pretpostavlja u granicama da izgleda nepotrebno da ovde kažemo nešto više o tom predmetu. Veličina sigurno *nije* pretpostavljena u onom smislu na koji je nesumnjivo mislivo Koen, da granica i granični termini moraju da budu veličine. Svaka progresija koja formira deo niza koji je funkcija od ω, i u kojem postoje termini posle progresije, ima granicu, ma kakva da je priroda tih termina. Svaki beskrajni niz segmenata kompaktnog niza ima granicu, bilo kakva da je priroda kompaktnog niza. Sada, naravno, u svim nizovima imamo veličine, naime, deljivosti prostiranja, ali one nisu takve da bismo mogli da im pronađemo granicu. Čak i u slučaju segmenata, granica je aktualni segment, a ne veličina segmenta, a ono što je relevantno je samo to da su segmenti klase, a ne da su kvantiteti. Ali, naravno, distinkcija između kvantiteta i veličina sasvim je strana Koenovom poimanju stvari.

320. Ali, sada prelazimo na ono što predstavlja veću grešku. Pojam veličine, kaže Koen, koji se pretpostavlja u granicama, sa svoje strane pretpostavlja granične veličine. Pod graničnim veličinama, kako se nazire iz konteksta, pretpostavljam da on misli na infinitezimale, na poslednje razlike između termina niza i njegove granice. Izgleda da je ono na šta on misli to da su vrste veličine koje vode granicama kompaktni nizovi, i da, u kompaktnim nizovima, mora da bude infinitezimala. Svaka stvar u vezi sa ovim pitanjem je pogrešna. Granice, to smo upravo videli, ne moraju da budu granice veličina; segmenti kompaktnog niza, kao što smo videli u prethodnoj glavi, ne mogu da budu infinitezimalne, a granice ni na koji način ne impliciraju da su nizovi u kojima se javljaju kompaktni. Ove poente su tako iscrpno već dokazane da je nepotrebno da se na njima zadržavamo.

321. Ali, vrhunska je greška pretpostaviti da granice uvode novo značenje jednakosti. Među veličinama, jednakost, kao što smo videli u Trećem delu, ima jedno apsolutno rigidno i jedinstveno značenje: primenjuje se samo na kvantitete i znači da oni imaju *istu* veličinu. Ovde nema govora o aproksimaciji: ono na šta se misli je naprosto apsolutno logički identitet veličine. U pogledu brojeva (koje Koen verovatno smatra veličinama) nema takve stvari kao što je jednakost. Postoji identitet i postoji relacija koja se uobičajeno izražava znakom jednakosti, kao u jednačini $2\times3=6$. Ova relacija je zbunjivala one koji su nastojali da filozofiraju o aritmetici, sve dok je nije objasnio profesor Peano[1]. Kada je neki termin jednakosti pojedinačan broj, a drugi izraz koji je sastavljen od dva ili više brojeva, ta jednakost izražava činjenicu da klasa definisana tim izrazom sadrži samo jedan termin koji je pojedinačan broj sa druge strane jednakosti. I ova definicija je takođe sasvim stroga: u njoj nema ničega što bi bilo aproksimativno, i ona ne može da se modifikuje infinitezimalama. Pretpostavljam da ono što Koen ima u vidu može da se izrazi na sledeći način. U formiranju diferencijalnog količnika, uzimamo dva broja x i $x + dx$, i dva druga y i $y + dy$. U elementarnoj aritmetici, x i $x + dx$ bi se računali kao jednaki, ali ne i u kalkulusu. Zapravo, imamo dva načina definisanja jednakosti. Dva termina mogu da se računaju kao da su jednaki kada je njihov odnos jedinstvo ili kada je njihova razlika 0. Ali, kada priznajemo realne infinitezimale, dx, x i $x + dx$ biće u odnosu jedinstva, ali 0 neće biti njihova razlika, pošto se dx razlikuje od apsolutne nule. Ovo gledište, koje ja predlažem kao ekvivalentno Koenovom, počiva na pogrešnom razumevanju granica i kalkulusa. U kalkulusu ne postoje takve veličine kao što su dx i dy. Postoje konačne razlike Δx i Δy, ali nijedno gledište, ma koliko elementarno, neće učiniti x jednakim $x + \Delta x$. Postoje odnosi konačnih razlika, $\Delta y/$

[1] Vidi, na primer, *Riv. di Mat.* VII, str. 35.

Δx, i u slučaju gde postoji izvod od y, postoji i jedan realan broj kojim $\Delta y/\Delta x$ mogu da se učine bliskim toliko koliko želimo, smanjivanjem Δx i Δy. Ovaj pojedinačan realni broj smo izabrali kako bismo označili dy/dx, ali ovo nije razlomak i dx i dy nisu ništa drugo do tipografski delovi jednog simbola. Pojam jednakosti ni na koji način ne može da se koriguje pomoću učenja o granicama; jedini novi element koji se uvodi je uzimanje u obzir beskonačnih klasa termina izabranih iz nekog niza.

322. U pogledu prirode infinitezimala, kaže nam se (na str. 15) da diferencijal ili *ono* neekstenzivno treba da bude poistovećeno sa intenzivnim, a diferencijal se smatra otelovljenjem Kantove kategorije realnosti. Ovo gledište je (u meri u kojoj je nezavisno od Kanta) citirano iz Lajbnca; ali, moram priznati, ono meni izgleda lišeno svakog opravdanja. Treba primetiti da dx i dy, ako uopšte prihvatimo da su entiteti, ne treba poistoveti sa pojedinačnim terminima našeg niza, niti pak sa razlikom između uzastopnih termina, već uvek mora biti prostiranja koja sadrže beskonačan broj termina, ili rastojanja koja odgovaraju takvim prostiranjima. Ovde moramo da napravimo razliku između niza brojeva i niza u kojem imamo samo merljiva rastojanja ili prostiranja. Ovo drugo je slučaj prostora i vremena. Ovde dx i dy nisu tačke ili trenuci koji bi jedino bili istinski neekstenzivni, oni su primarno brojevi i stoga moraju da odgovaraju infinitezimalnim prostiranjima ili rastojanjima – jer bilo bi sumanuto pripisati numerički odnos dvema tačkama, ili – kao u slučaju brzine – tački i trenutku. Ali, dx i dy ne mogu da predstavljaju rastojanja uzastopnih tačaka, niti pak prostiranja formirana od dve uzastopne tačke. Protiv ovoga, pre svega, govori opšti razlog da se naš niz mora smatrati kompaktnim, što unapred isključuje ideju uzastopnih termina. Ovo bi bilo nemoguće izbeći ako se bavimo nizom u kojem ima samo prostiranja a ne i rastojanja: jer, reći da uvek postoji beskonačan broj posrednih tačaka, osim kada se *prostiranje* sastoji od konačnog broja termina, bila bi puka tautologija. Ali, kada postoji rastojanje, moglo bi se reći da rastojanje dva termina može da bude konačno ili infinitezimalno, i da, u pogledu infinitezimalnih rastojanja, prostiranje nije kompaktno nego se sastoji od konačnog broja termina. Ako se ovo za trenutak prizna, naši *dx* i *dy* mogu da se učine rastojanjima uzastopnih tačaka ili još prostiranjima sastavljenim od uzastopnih tačaka. Ali, sada bi rastojanje uzastopnih tačaka, pretpostavljajući, na primer, da su one na jednoj pravoj, izgledalo kao da je konstanta koja bi dala $dy/dx = \pm 1$. Ne možemo pretpostaviti da su u slučajevima u kojima su x i y oba kontinuirani, a funkcija y jednovrednosna kao što kalkulus zahteva, x i $x + dx$ uzastopni, ali ne i y i $y + dy$, zato što će svaka vrednost od y biti korelirana sa jednom i samo jednom vrednošću od x i obratno, tako da y ne može da preskoči ikoju pretpostavljenu intermedijarnu vrednost između y i $y + dy$. Stoga, ako su date vrednosti x i y, i čak i uz pretpostavku da se rastojanja uzastopnih termina razlikuju od mesta do mesta, vrednost od dy/dx biće određena; a bilo koja druga funkcija y' koja je za neku vrednost od x jednaka y, imaće, za tu vrednost, isti izvod, što je apsurdan zaključak. Ostavljajući ove matematičke argumente po strani, iz činjenice da *d*y i *dx* treba da imaju numerički odnos, očigledno je da, ako su intenzivne veličine, kao što je sugerisano, onda moraju da budu numerički merljive veličine: ali nije nimalo lako uvideti kako bi ovo merenje moglo da se izvrši. Ovo može da se učini jasnijim ako se oganičimo na osnovni slučaj u kojem su i x i y brojevi. Ako x i $x + dx$ tretiramo kao uzastopne, moramo da pretpostavimo ili da su y i $y + dy$ uzastopni, ili da su identični, ili da ima konačan broj termina između njih, ili ih ima beskonačno. Ako uzmemo da prostiranja mere *dx* i *dy*, slediće da dy/dx mora uvek biti ili nula, ili integral, ili besklonačno, što je apsurdno. I slediće, takođe, da, ako y nije konstanta, dy/dx mora biti ± 1. Uzmimo, na primer, $y = x^2$ gde su x i y pozitivni realni brojevi. Ako x prelazi od jednog broja do sledećeg, y mora da to isto čini jer svakoj vrednosti od y odgovara vrednost od x, a y raste kako i x raste. Stoga, ako bi y preskočilo broj koji sledi za bilo kojom od njegovih vrednosti, nikada ne bi moglo da se vrati da ga pokupi; ali, mi znamo da je svaki realni broj među vrednostima od y. Stoga y i $y + dy$ moraju da budu uzastopni, a $dy/dx = 1$. Ako merimo rastojanjima a ne prostiranjima, rastojanje dy mora da se fiksira kada je y dato, kao i rastojanje dx, kada je x dato. Sada, ako $x = 1$, $y = 1$; $dy/dx = 2$; ali, pošto su x i y isti broj, dx i dy moraju biti jednaki, pošto svaki predstavlja rastojanje do sledećeg broja: prema tome, $dy/dx = 1$, što je apsurdno. Slično tome, ako uzmemo da je y opadajuća funkcija, naći ćemo $dy/dx = -1$. Stoga je priznavanje uzastopnih brojeva fatalno po kalkulus, a pošto kalkulus mora da se održi, kalkulus je fatalan po uzastopne brojeve.

323. Mišljenje da mora biti uzastopnih brojeva pojačano je idejom kontinuirane promene koja je otelovljena nazivanjem x i y „promenljivama". Promena u vremenu je tema koju ćemo morati da razmatramo u jednoj kasnijoj fazi ovog rada, ali ona nesumnjivo ima veliki uticaj na filozofiju kalkulusa. Ljudi sebi predstavljaju promenljivu – često i nesvesno – kao sukcesivno uzimanje niza vrednosti, kao što bi moglo da se desi u nekom dinamičkom problemu. Tako oni mogu da kažu: kako x može da pređe od x_1 na x_2 a da ne prođe kroz sve intermedijarne vrednosti? I u ovom prelaženju, ne mora li da postoji sledeća vrednost koju x uzima kao prvu pošto je napustilo vrednost x_1? Sve je zamišljeno analogno kretanju u kome se pretpostavlja da tačka prolazi kroz sve intermedijarne položaje na svom putu. Da li je ovo gledište o kretanju tačno ili ne, sada o tome ne donosim odluku: u svakom slučaju, irelevantno je tamo gde je u pitanju fundamentalno mesto u teoriji kontinuiranih nizova, pošto i vreme i put kretanja moraju da budu kontinuirani nizovi, a o svojstvima takvih nizova mora se odlučiti pre pozivanja na kretanje, u skladu sa našim gledištima. Što se mene tiče, odgovarajući Koenu, moram da priznam da mi izgleda očigledno da je intenzivna veličina nešto što se sasvim razlikuje od infinitezimalne ekstenzivne veličine: ova druga uvek mora da bude manja od konačne ekstenzivne veličine, i, prema tome, mora da bude iste vrste kao i ona; dok, s druge strane, izgleda da intenzivne veličine nikada ni u kojem smislu nisu manje od ekstenzivnih veličina. Stoga, izgleda da je metafizička teorija kojom je trebalo spasiti infinitezimale i matematički i filozofski lišena razloga u njenu korist.

324. Ne možemo, dakle, da se složimo sa sledećim sumarnim zaključkom Koenove teorije (str. 28): „Postuliranje nekog elementa *po sebi i za sebe* predstavlja deziderratum kojem odgovara realnost *instrumenta mišljenja*. Ovaj instrument mišljenja najpre mora da se postavi kako bismo bili u stanju da uđemo u onu kombinaciju sa opažajem, *sa svešću o datom* koja je upotpunjena *principom intenzivne veličine*. Ova pretpostavka intenzivne realnosti latentna je u svim principima i, prema tome, mora se učiniti nezavisnom. *Ova pretpostavka daje značenje realnosti i tajni pojma diferencijala*". Ono sa čime možemo da se složimo, i za šta verujem da zbrkano leži u osnovi gorenavedenog iskaza, jeste da se svaki kontinuum mora sastojati od elemenata ili termina; ali oni, kao što smo upravo vdeli, neće ispuniti funkciju *dx* i *dy* koji se javljaju u staromodnim objašnjenjima kalkulusa. Ne možemo se složiti niti da je „ovo konačno" (to jest ono što je objekat fizičke nauke) „može biti mišljeno kao zbir onih infinitezimalnih intenzivnih realnosti, kao *određeni integral*" (str. 144). Definicija integrala nije zbir elemenata kontinuuma, mada postoje takvi elementi: na primer, dužina krive, onako kako je dobijena integraljenjem, nije zbir tačaka već strogo i samo granica dužina upisanih poligona. Jedini smisao koji može da se dâ zbiru tačaka krive jeste da se on posmatra kao logička klasa kojoj one sve pripadaju, što će reći, sâma kriva, a ne njena dužina. Sve dužine su veličine deljivosti prostiranja, a sva prostiranja sastoje se od beskonačno mnogo tačaka, a bilo koja dva ograničena prostiranja stoje u konačnom odnosu jedan prema drugom. Ne postoji nikakva takva stvar kao što je infinitezimalno prostiranje; ako bi postojala, ne bi bila element kontinuuma; kalkulus je ne zahteva, a pretpostavka da postoji vodi protivrečnostima. A što se tiče mišljenja da u svakom nizu mora da bude uzastopnih termina, u poslednjoj glavi Trećeg dela pokazano je da ono nelegitimno pretpostavlja upotrebu matematičke indukcije. Stoga se infinitezimale kao objašnjenje kontinuiteta moraju smatrati nepotrebnim, pogešnim i samoprotivrečnim.

Glava XLII

FILOZOFIJA KONTINUUMA

325. Među filozofima, reč *kontinuitet* je, naročito od Hegelovog vremena, dobila jedno značenje koje je sasvim neslično značenju koje joj je dao Kantor. Tako, Hegel kaže[1]: „Kvantitet, kao što smo videli, ima dva izvora: isključujuću jedinicu i identifikaciju ili izjednačavanje ovih jedinica. Kada, prema tome, pogledamo na neposrednu relaciju kvantiteta prema njemu samom ili na karakteristiku samoistosti učinjenu eksplicitnom apstrakcijom, kvantitet je *kontinuirana* veličina, ali kada pogledamo na drugu, u njemu impliciranu karakteristiku, kvantitet je onda *diskretna* veličina". Kada se prisetimo da kod Hegela i kvantitet i veličina znače „kardinalni broj", možemo da pretpostavimo da ova tvrdnja znači sledeće: „Mnogi termini za koje se smatra da imaju kardinalni broj, moraju svi odreda da budu članovi jedne klase, a ukoliko su svi oni samo neka instanca klasnog pojma, oni se ne mogu razlikovati jedan od drugog i u tom pogledu se za celinu koju sačinjavaju kaže da je *kontinuirana*; ali, s obzirom na njihovu mnogost, oni moraju biti *različite* instance klasnog pojma, i u ovom pogledu se za celinu koju oni sačinjavaju kaže da je *diskretna*". E sada, ja sam daleko od toga da osporavam

---

[1] *Smaller Logic*, §100, Volasov prevod, str. 188.

– zapravo odlučno zastupam – da ova suprotnost identiteta i razlike u jednoj kolekciji konstituiše fundamentalan problem logike, možda čak i najfundamentalniji problem filozofije. I, pošto je fundamentalan, jednako je relevantan za izučavanje matematičkog kontinuuma kao i za sve drugo. Ali, izvan ove opšte veze, ovaj problem nije ni u kakvom posebnom odnosu prema matematičkom značenju kontinuiteta, što je neposredno jasno iz činjenice da se ni na koji način ne poziva poredak. U ovoj glavi će biti razmatrano matematičko značenje kontinuiteta. Citirao sam filozofsko značenje samo da bih definitivno ustvrdio da se ovde *ne* radi o njemu; a pošto su rasprave o rečima isprazne, moram pozvati filozofe da se za trenutak odreknu njihovih uobičajenih asocijacija na ovu reč i da joj ne priznaju nikakvo drugo značenje do onog koje se dobija iz Kantorove definicije.

326. Ograničavajući se na aritmetički kontinuum, ulazimo u sukob na drugi način sa uobičajenim predrasudama. O aritmetičkom kontinuumu Poenkare s pravom primećuje[1]: „Tako shvaćen kontinuum nije ništa drugo do kolekcija individua uređenih u izvestan poredak kojih je, istina, beskonačno po broju, ali koje su spoljašnje jedna u odnosu na drugu. Ovo nije uobičajena koncepcija u kojoj se pretpostavlja da između elemenata kontinuuma postoji neka vrsta bliske veze koja od njih čini celinu, u kojoj tačka nema prioritet u odnosu na liniju, već je linija ta koja ima prioritet u odnosu na tačku. Po čuvenoj formuli, kontinuum je jedinstvo u mnoštvu, jedino postoji mnoštvo, jedinstvo je iščezlo".

Oduvek je smatrano da je otvoreno pitanje da li je kontinuum sastavljen od elemenata, a čak i kada je dopušteno da sadrži elemente, često je izjavljivano da nije *sastavljen* od njih. Ovo poslednje gledište podržavano je i od strane tako snažnih zastupnika elemenata u svemu kao što je bio Lajbnic[2]. Ali sva ova gledišta su samo moguća u pogledu takvih kontinuuma kao što su prostor i vreme. Aritmetički

---

[1] *Revue de Métaphysique et de Morale*, Vol. I, str. 26.

[2] Vidi moju *The Philosophy of Leibniz* , Glava IX.

kontinuum predstavlja objekat izdvojen definicijom, koji se sastoji od elemanata na osnovu te definicije, i poznato je da je otelovljen u barem jednoj instanci, naime, u segmentima racionalnih brojeva. U Šestom delu ću tvrditi da prostori pružaju druge instance aritmetičkog kontinuuma. Glavni razlog za elaborirane i paradoksalne teorije prostora i vremena i njihovih kontinuiteta koje su konstruisali filozofi bile su pretpostavljene protivrečnosti kontinuuma sastavljenog od elemenata. Teza ove glave je da je Kantorov kontinuum slobodan od protivrečnosti. Ova teza, očigledno, mora biti čvrsto ustanovljena pre nego što budemo mogli da dopustimo mogućnost da prostorno-vremenski kontinuitet može da bude Kantorove vrste. U ovom argumentu ću uzeti kao dokazanu tezu prethodne glave, da kontinuitet mora da se tretira kao da ne pretpostavlja priznavanje aktualnih infinitezimala.

327. U ovom kapricioznom svetu, ništa nije kapricioznije od posmrtne slave. Jedna od najznamenitijih žrtava lošeg prosuđivanja tradicije jeste Zenon iz Eleje. Pošto je smislio četiri argumenta koji su svi neizmerno suptilni i duboki, grubost filozofa ga je proglasila pukim dovitljivim žonglerom, a njegove argumente sve odreda sofizmima. Nakon dve hiljade godina neprekidnog pobijanja, ovi sofizmi su obnovljeni, stavljeni na svoje mesto i učinjeni osnovom za matematičku renesansu, od strane jednog nemačkog profesora koji verovatno nikada nije ni sanjao o nekoj vezi između sebe samog i Zenona. Vajerštras, strogo odstranjujući sve infinitezimale, najzad je pokazao da živimo u nepromenljivom svetu, i da strela, u svakom trenutku njenog leta, uistinu miruje. Jedino mesto gde je Zenon verovatno skrenuo s pravog puta bilo je zaključivanje (ako ga je on napravio) da, zato što ne postoji promena, svet mora da bude u istom stanju u neko vreme kao i u neko drugo. Ova posledica nipošto ne sledi, i na ovom mestu nemački profesor je kontsruktivniji od genijalnog Grka. Pošto je Vajerštras mogao da konkretizuje svoje mišljenje u matematici gde bliskost sa istinom eliminiše vulgarne predrasude zdravog razuma, on je mogao da svojim iskazima da respektabilan izgled plitkosti; a ako je rezultat manje oduševljavajući za ljubitelja razuma od Zenonovog smelog prkosa, u svakom slučaju više smera da udovolji masi akademskog sveta.

Zenonovi argumenti se, pre svega, odnose na kretanje, te stoga kao takvi nisu relevantni za našu sadašnju svrhu. Ali je svakako preporučljivo da ih u najvećoj mogućoj meri prevedemo na aritmetički jezik[1].

328. Prvi argument, dihotomija, tvrdi: „Ne postoji kretanje, jer ono što se kreće mora da dosegne sredinu puta pre nego što dosegne kraj". Drugim rečima, bilo koje kretanje da smo pretpostavili, ono pretpostavlja neko drugo kretanje, a ono pak neko treće, i tako dalje *ad infinitum*. Stoga postoji beskonačni regres u pukoj ideji bilo kog datog kretanja. Ovaj argument može da se iskaže u aritmetčkom obliku, ali onda izgleda daleko manje plauzibilan. Razmotrimo promenljivu x koja može da uzima sve realne (ili racionalne) vrednosti između dve date granice, recimo 0 i 1. Klasa njenih vrednosti je beskonačna celina čiji delovi njoj logički prethode: ona ima delove, i ne može da postoji ako neki od njenih delova nedostaje. Stoga, brojevi od 0 do 1 pretpostavljaju brojeve od 0 do 1/2, a oni pak pretpostavljaju brojeve od 0 do 1/4 i tako dalje. Stoga bi izgledalo da postoji beskonačni regres u pojmu neke beskonačne celine, ali bez takvih beskonačnih celina realni brojevi ne mogu da se definišu, a aritmetički kontinuitet koji se primenjuje na beskonačni niz propada.

Na ovaj argument može da se odgovori na dva načina, od kojih bi, na prvi pogled, svaki mogao da izgleda dovoljan, ali su u stvari oba nužna. Prvo, možemo da razlikujemo dve vrste beskonačnih

---

[1] Budući da nisam klasičar, ne pretendujem da sam pouzdan autoritet u pogledu onoga što je Zenon stvarno rekao ili mislio. Formulacija njegova četiri argumenta koju ću upotrebiti izvedena je iz interesantnog Noelovog članka „Le mouvement et les arguments de Zenon d'Elée", *Revue de Métaphysique et de Morale*, Vol. I, str. 107–125. Ovi argumenti u svakom slučaju zaslužuju detaljno razmatranje, a pošto su za mene samo tekst koji treba razmatrati, njihova istorijska tačnost biće od malog značaja.

nizova, od kojih je jedna bezopasna. Drugo, možemo da razlikujemo dve vrste celine, kolektivnu i distributivnu, i možemo da tvrdimo da u ovoj drugoj vrsti celine delovi jednake složenosti kao i celina njoj logički ne prethode. Ove dve stvari moraju odvojeno da se objasne.

329. Beskonačni regres može biti dvojake vrste. U spornoj vrsti, dva ili više iskaza se spajaju tako da konstituišu *značenje* nekog iskaza; od ovih konstituenata, značenje barem jednog od njih je na sličan način sastavljeno, itd. *ad infinitum*. Ova forma regresa uglavnom proizlazi iz cirkularnih definicija. Takve definicije mogu da se prošire na način analogan onom na koji su kontinuirani razlomci razvijeni iz kvadratnih jednačina. Ali na svakom koraku termin koji treba definisati ponovo će se pojaviti i nikakva definicija neće odatle proizaći. Uzmimo sledeći primer: „Za dve osobe se kaže da imaju *istu* ideju, kada imaju ideje koje su slične; a ideje su slične kada sadrže neki identičan deo". Ako ideja može da ima deo koji nije ideja, takva definicija nije logički sporna; ali ako je deo ideje ideja, onda, na drugom mestu gde se javlja identitet ideja, definicija mora da se zameni itd. Stoga, svuda gde se radi o *značenju* iskaza, beskonačni regres je sporan, pošto nikada ne dolazimo do iskaza koji ima određeno značenje. Ali mnogi beskonačni regresi nisu ovog oblika. Ako je *A* iskaz čije je značenje savršeno određeno, i ako *A* implicira *B*, a *B* implicira *C* itd., onda je tu reč o beskonačnom regresu sasvim neosporne vrste. Ovo počiva na činjenici da je implikacija sintetička relacija i da, mada, ako je *A* agregat iskaza i ako *A* implicira neki iskaz koji je deo od *A*, nikako ne sledi da je svaki iskaz koji *A* implicira deo od *A*. Stoga ne postoji logička nužnost kakva je postojala u prethodnom slučaju da se dovrši beskonačni regres pre nego što *A* stekne značenje. Onda, ako može da se pokaže da je implikacija delova u celini ove druge vrste kada je ta celina beskonačna klasa brojeva, regres na koji ukazuje Zenonova dihotomija gubi svoju žaoku.

330. Da bismo pokazali da je ovo zaista slučaj, moramo da razlikujemo celine koje su definisane ekstenzionalno, to jest nabrajanjem njihovih termina, od celina koje su definisane intenzionalno, to jest kao klasa termina koji stoje u nekoj datoj relaciji prema nekom datom terminu; ili, jednostavnije, kao klasa termina. (Jer, klasa termina, kada formira celinu, nije ništa drugo do svi termini koji stoje u klasnoj relaciji prema klasnom pojmu[1]). E sada, ekstenzionalna celina je – barem onoliko koliko ljudske moći to mogu da pojme – nužno konačna: ne možemo nabrojati više od konačnog broja delova koji pripadaju celini, a ako je broj delova beskonačan, to mora da se spozna drugačije nego nabrajanjem. Ali ovo je tačno ono što pruža klasni pojam: celina čiji delovi su termini jedne klase, potpuno je definisana kada je klasni pojam specifikovan, a neka određena individua ili pripada ili ne pripada klasi o kojoj je reč. Individua klase predstavlja deo cele ekstenzije klase i logički prethodi ekstenziji, uzetoj kolektivno; ali, sama ekstenzija je definljiva bez pozivanja na neku specifikovanu individuu, i postoji kao pravi entitet čak i kada klasa ne sadrži termine. Reći za takvu klasu da je beskonačna, znači reći da, iako ima termine, broj tih termina nije ikoji konačan broj – što je iskaz koji, ponovo, može da se tvrdi bez nemogućeg procesa nabrajanja *svih* konačnih brojeva. A upravo to je slučaj realnih brojeva između 0 i 1. Oni formiraju određenu klasu čije značenje je poznato čim znamo ono na šta se misli pod *realnim brojem*, 0, 1 i *između.* Pojedinačni brojevi klase i manje klase koje su u njoj sadržane logički ne prethode klasi. Stoga, beskonačni regres se sastoji jedino u činjenici da svaki segment realnih ili racionalnih brojeva ima delove koji su i sami segmenti; ali ovi delovi njemu logički ne prethode, a beskonačni regres je savršeno bezopasan. Stoga, rešenje teškoće leži u teoriji označavanja i u intenzionalnoj definiciji klase. Ovim odgovorom je prikazan Zenonov argument u obliku u kojem se javlja u aritmetici.

331. Drugi Zenonov argument je najčuveniji, a to je onaj koji se odnosi na Ahila i kornjaču. „Sporiji“, kaže se, „nikada neće biti prestignut od strane bržeg zato što ovaj drugi mora prvo da dosegne

[1] Za precizne formulacije, *vide supra*, Prvi deo, Glave VI i X.

tačku od koje je onaj prvi pošao, tako da sporiji nužno uvek mora da bude ispred“. Kada se ovaj argument prevede u aritmetički jezik, vidi se da se tiče jedan-jedan korelacije dve beskonačne klase. Ako bi Ahil sustigao kornjaču, onda bi put kornjače bio deo Ahilovog puta; ali pošto je svaki u svakom trenutku u nekoj tački svog puta, istovremenost ustanovljava jedan-jedan korelaciju između Ahilovog i kornjačinog položaja. Odatle sledi da kornjača, u bilo kom datom vremenu, biva u isto onoliko mesta koliko i Ahil; stoga je – a nada je da ćemo to zaključiti – nemoguće da kornjačin put bude deo Ahilovog puta. Ova poenta je čisto ordinalna i može da se ilustruje aritmetikom. Razmotrimo, na primer, $1 + 2x$ i $2 + x$, i neka x leži između 0 i 1, uključujiući i 0 i 1. Za svaku vrednost od $1 + 2x$ postoji jedna i samo jedna vrednost od $2 + x$ i obratno. Stoga, ako x raste od 0 do 1, broj vrednosti koju uzima $1 + 2x$ biće isti kao i broj vrednosti koje uzima $2 + x$. Ali, $1 + 2x$ počinje od 1 i zavšava sa 3, dok $2 + x$ počinje od 2 i završava sa 3. Stoga bi trebalo da bude upola manje vrednosti od $2 + x$ nego od $1 + 2x$. Kao što smo videli, Kantor je rešio ovu vrlo ozbiljnu teškoću; ali pošto ona više pripada filozofiji beskonačnog nego filozofiji kontnuuma, njeno dalje razmatranje ostavljam za sledeću glavu.

332. Treći argument je o letećoj streli. „Ako je sve, bilo da je u mirovanju ili u kretanju, u prostoru koji je njemu jednak, i ako je ono što se kreće uvek u trenutku, strela u letu je nepokretna“. Ovo se obično smatralo toliko monstruoznim paradoksom da bi jedva zasluživalo ozbiljnu diskusiju. Po mom mišljenju, moram priznati, ovaj argument izgleda kao vrlo jednostavan iskaz o jednoj vrlo elementarnoj činjenici, čije je zanemarivanje, smatram, proizvelo glib u kojem je filozofija promene veoma dugo bila zaglavljena. U Sedmom delu ću prikazati teoriju promene koja može da se nazove *statičkom*, pošto daje za pravo Zenonovom zapažanju. Za sada želim da oslobodim ovo zapažanje od svakog pozivanja na promenu. Onda ćemo uvideti da ono predstavlja vrlo značajnu i vrlo široko primenljivu plitkost, naime: „Svaka moguća vrednost promenljive je konstanta“. Ako je *x* promenljiva koja može da uzme sve vrednosti između 0 i 1, vrednosti koje može da uzme su određeni brojevi, kao što su 1/2 ili 1/3 koji svi predstavljaju apsolutne konstante. Ovde bismo mogli da kažemo ponešto o promenljivima. Promenljiva je fundamentalan pojam logike kao i svakodnevnog života. Iako je uvek povezana sa nekom klasom, ona sama nije klasa, niti pojedinačni broj klase, niti pak cela klasa, već *bilo koji* član klase. Sa druge strane, ona nije *pojam* „bilo koji član klase“ već ono (ili oni) što ovaj pojam označava. O logičkim teškoćama ove koncepcije neću sada opširno da govorim; o tome je dovoljno rečeno u Prvom delu. Uobičajeno *x* u algebri, na primer, ne označava neki pojedinačni broj, niti sve brojeve, niti pak klasu *broj*. Ovo može lako da se vidi na osnovu razmatranja nekog identiteta, recimo

$$(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1.$$

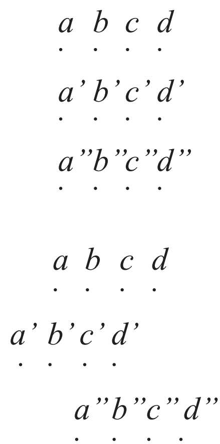
Ovo sigurno ne znači ono što bi postalo ako bi, recimo, *x* bilo zamenjeno sa 391, mada implicira da bi rezultat takve zamene bio istinit iskaz. Ono ne znači ni ono što bi proizašlo iz zamene *x* klasnim pojmom *broj* zato što ne možemo da dodamo 1 ovom pojmu. Iz istog razloga, *x* ne označava pojam *bilo koji broj*: ni njemu takođe ne može da se doda 1. Promenljiva označava disjunkciju formiranu od različitih brojeva, ili bi barem ovo gledište moglo da se uzme kao približno tačno[1]. Vrednosti od *x* su, dakle, termini disjunkcije, i svaki od njih je konstanta. Izgleda da ova jednostavna logička činjenica konstituiše suštinu Zenonove tvrdnje da strela uvek miruje.

333. Ali, Zenonov argument sadrži element koji je posebno primenljiv na kontinuume. U slučaju kretanja, njime se negira da postoji takva stvar kao što je *stanje* kretanja. U opštem slučaju jedne kontinuirane promenljive, argument se može uzeti kao poricanje aktualnih infinitezimala. Jer, infinitezimale predstavljaju pokušaj širenja *vrednosti* promenljive na promenljivost koja pripada njoj samoj. Kada se jednom definitivno shvati da su sve vrednosti promenljive

[1] Vidi Glavu VIII, naročito §93.

konstante, uzimanjem *bilo koje* dve takve vrednosti može se lako videti da je njihova razlika uvek konačna, i da stoga ne postoje infinitezimalne razlike. Ako je x promenljiva koja može da uzima sve realne vrednosti od 0 do 1, onda, ako uzmemo bilo koje dve od tih vrednosti, vidimo da je njihova razlika konačna, iako je x kontinuirana promenljiva. Tačno je da je razlika mogla da bude manja od one koju smo izabrali, ali i kada bi bila, bila bi ipak konačna. Najmanja granica mogućih razlika je nula, ali sve moguće razlike su konačne; u tome nema ni senke protivrečnosti. Ovu statičku teoriju promenljive dugujemo matematičarima, a njeno odsustvo u Zenonovo vreme odvelo ga je pretpostavci da je kontinuirana promena nemoguća bez stanja promene koje podrazumeva infinitezimale i protivrečnost da se telo nalazi tamo gde nije.

334. Poslednji Zenonov argument je onaj o meri. To je blisko analogno argumentu koji sam upotrebio u prethodnoj glavi protiv onih koji smatraju *dx* i *dy* rastojanjima uzastopnih termina. On je primenljiv, kao što je istakao gospodin Noel (*loc. cit*., str. 116), samo protiv onih koji smatraju da ima nedeljivosti među prostiranjima, pri čemu se uzima da su prethodni argumenti u dovoljnoj meri pobili pristalice beskonačne deljivosti. Sada treba da pretpostavimo skup diskretnih trenutaka i diskretnih mesta, pri čemu se kretanje sastoji u činjenici da je u jednom trenutku telo u jednom od diskretnih mesta, a u drugom trenutku na nekom drugom mestu.



Zamislimo tri paralelne linije sastavljene od tačaka *a*, *b*, *c*, *d; a’*, *b’*, *c’*, *d’*; *a”*, *b”*, *c”*, *d”*. Pretpostavimo drugu liniju čije se sve tačke u jednom trenutku pomere nalevo za jedno mesto, dok se tačke treće linije pomere za jedno mesto nadesno. Onda, iako je trenutak nedeljiv, *c’* koje je bilo iznad *c”*, a sada je iznad *a”* mora da je prešlo *b”* u jednom trenutku; otuda je trenutak deljiv, suprotno hipotezi. Ovaj argument je u suštini onaj na osnovu kog sam u prethodnoj glavi dokazao da, ako postoje uzastopni termini, onda je $dy/dx = \pm 1$; ili bolje, to je pokazano ovim argumentom zajedno sa primerom u kojem je $dy/dx = 2$. Ovo može da se kaže i ovako: Neka su y i z dve funkcije od x, i neka $dy/dx = 1$, $dz/dx = -1$. Onda $\frac{d}{dx}(y - z) = 2$, što protivreči principu da vrednost svakog izvoda mora da bude ± 1. Na argument u Zenonovom obliku, gospodin Evelin (Evellin), koji zastupa nedeljiva prostiranja, odgovara da se *a''* i *b'* uopšte ne ukrštaju[1]. Jer, ako su trenuci nedeljivi – a to je hipoteza – sve što možemo reći jeste da je u jednom trenutku *a'* iznad *a''*, a u sledećem *c'* je iznad *a''*. Ništa se nije desilo između trenutaka, a pretpostavka da su se *a''* i *b'* ukrstili predstavlja *petitio principii* zbog prikrivenog pozivanja na kontinuitet kretanja. Mislim da je ovaj odgovor validan u slučaju kretanja; može se tvrditi bez protivrečnosti da su prostor i vreme diskretni, strogo se pridržavajući ne samo prostiranja već ujedno i rastojanja. Geometrija, kinematika i dinamika postaju lažne, ali nema nikakvog dobrog razloga da se misli da su one istinite. U slučaju aritmetike, stvar je drugačija, pošto se u aritmetici ne pretpostavlja nijedno empirijsko pitanje. I u ovom slučaju, kao što možemo da vidimo iz gorenavedenog argumenta koji se tiče izvoda, Zenonov argument je apsolutno zdrav. Brojevi su entiteti čija priroda može nesumnjivo da se ustanovi; a među brojevima, različiti oblici kontinuiteta koji se javljaju ne mogu da se poreknu bez protivrečnosti. Iz tog razloga problem kontinuiteta je bolje razmatrati u vezi sa brojevima, nego u vezi sa prostorom, vremenom ili kretanjem.

335. Do sada smo videli da Zenonovi argumenti, iako dokazuju mnogo toga, ne dokazuju da kontinuum, onakav sa kakvim smo se upoznali, sadrži bilo kakvu protivrečnost. Koliko mi je poznato, od Zenonovih dana napadi na kontinuum nisu vršeni nekim novim ili snažnijim oružjem. Dakle, jedino što preostaje jeste da načinimo nekoliko opštih primedbi.

---

1 *Revue de Métaphysique et de Morale*, Vol. I, str. 386.

Pojam kojem Kantor daje ime *kontinuum* može se, naravno, nazvati bilo kojim drugim imenom koje se nalazi ili ne nalazi u rečniku i svakome je dopušteno da kaže da on sam pod kontinuumom podrazumeva nešto sasvim drugačije. Ali, ova verbalna pitanja su sasvim frivolna. Kantorova zasluga leži ne u analiziranju toga šta misle drugi, već u tome što nam kaže ono što on sam misli – što predstavlja jednu gotovo jedinstvenu zaslugu kada je reč o kontinuumu. On je definisao, kao što sada vidimo, precizno i opšte, jedan čisto ordinalni pojam oslobođen od svih protivrečnosti koji je dovoljan za celokupnu analizu, geometriju i dinamiku. Postojeća matematika je pretpostavljala takav pojam, mada nije bilo tačno poznato šta je to što se pretpostavlja. Kantor je zahvaljujući svojoj skoro besprimernoj lucidnosti uspešno analizirao krajnje složenu prirodu prostornih nizova, čime je, kao što ćemo videti u Šestom delu, učinio mogućom revoluciju u filozofiji prostora i kretanja. Glavni aspekti u definiciji kontinuuma su (1) veza sa učenjem o granicama, (2) osporavanje infinitezimalnih segmenata. Ako se ova dva aspekta imaju u vidu, cela filozofija kontinuuma postaje transparentna.

336. Poricanje infinitezimalnih segmenata otklanja antinomiju koja je dugo predstavljala otvoreni skandal, pri čemu mislim na antinomiju da se kontinuum i sastoji i ne sastoji od elemenata. Sada vidimo da i jedno i drugo može da se tvrdi, premda u različitom smislu. Svaki kontinuum je niz koji se sastoji od termina, a ti termini, ako nisu nedeljivi, u svakom slučaju nisu deljivi na nove termine kontinuuma. U ovom smislu postoje elementi. Ali, ako uzastopne termine, zajedno sa njihovom asimetričnom relacijom koja konstituiše ono što se može nazvati *ordinalnim* elementom (mada ne u smislu iz Četvrtog dela), onda, u ovom smislu, naš kontinuum nema elemente. Ako pretpostavimo da je prostiranje suštinski serijalno, tako da mora da se sastoji od barem dva termina, onda ne postoje elementarna prostiranja; a ako je naš kontinuum onaj u kojem ima rastojanja, onda, isto tako, ne postoje elementarna rastojanja. Ali, ni u jednom od ovih slučajeva ne postoji ni najmanji logički razlog u prilog elemenata.

Zahtev za uzastopnim terminima nastaje, kao što smo videli u Trećem delu, iz jedne nelegitimne upotrebe matematičke indukcije. A u pogledu rastojanja, mala rastojanja nisu prostija od velikih, već su sva rastojanja, kao što smo videli u Trećem delu, podjednako prosta. I velika rastojanja ne pretpostavljaju mala: pošto su intenzivne veličine, ona mogu da postoje samo tamo gde manjih rastojanja uopšte nema. Tako je beskonačni regres od većih ka manjim rastojanjima ili prostiranjima bezopasne vrste, a nedostatak elemenata nije nužno uzrok bilo kakvoj logičkoj nelagodnosti. Time je antinomija uklonjena, a kontinuum je, barem u onoj meri u kojoj ja to mogu da utvrdim, potpuno lišen protivrečnosti.

Ostaje samo da se istraži da li isti zaključak važi i u pogledu beskonačnog, sa čime ćemo i završiti istraživanje u Petom Delu.

Glava XLIII

FILOZOFIJA BESKONAČNOG

337. U prethodnoj raspravi o beskonačnom bili smo primorani da ulazimo u matematičke pojedinosti u tolikoj meri da nije bilo mesta za čisto filozofsko tretiranje ovog pitanja. U ovoj glavi ću matematiku ostaviti po strani i istražiću da li mogu da se pronađu neke protivrečnosti u pojmu beskonačnog.

Oni koji su upućivali primedbe beskonačnosti, po pravilu nisu smatrali da je vredno trošiti vreme na to da se tačno prikažu protivrečnosti koje su u njoj sadržane. Da je to uopšte učinjeno predstavlja veliku Kantovu zaslugu. Od matematičkih antinomija, ona druga koja se suštinski odnosi na pitanje da li kontinuum ima elemente ili ne, otklonjena je u prethodnoj glavi na osnovu pretpostavke da može da postoji aktualno beskonačno – dakle, ta antinomija je svedena na pitanje o beskonačnom broju. Prva antinomija se odnosi na beskonačno ali u suštinski vremenskom obliku; za aritmetiku je, prema tome, ova antinomija irelevantna, osim po kantovskom gledištu da brojevi moraju da budu shematizovani u vremenu. Ovo gledište je poduprto argumentom da brojanje zahteva vreme, i da stoga bez vremena ne bismo mogli da znamo broj bilo čega. Ovim argumentom možemo da dokažemo da se bitke dešavaju uvek u blizini telegrafskih žica, jer ukoliko ne bi, onda ne bismo čuli ništa o njima. U stvari, generalno možemo da dokažemo da znamo ono što znamo. Ali, ostaje zamislivo da ne znamo ono što ne znamo; stoga nužnost vremena ostaje nedokazana.

Od ostalih filozofa, već smo se bavili Zenonom u vezi sa kontinuumom, a paradoks koji leži u osnovi Ahila i kornjače biće ubrzo ispitan. Platonov *Parmenid* – koji je možda najbolja zbirka antinomija ikada sačinjena – jedva da je ovde relevantan, zato što se odnosi na teškoće koje su fundamentalnije od bilo koje koja ima veze sa beskonačnošću. A što se tiče Hegela, on pominje *vuka* toliko često da kada poziva na uzbunu zbog protivrečnosti, mi se na kraju zbog toga više ni ne uzrujavamo. Lajbnic, kao što smo videli, navodi kao protivrečnost jedan-jedan korelaciju celine i dela koja je u osnovi Ahila. Ovo je zapravo jedina tačka oko koje se većina argumenata protiv beskonačnosti vrti. U nastavku ću da stavim argumente u formu koja je prilagođena našem sadašnjem matematičkom znanju, a to će preduprediti citiranje tih argumenata prema klasičnim protivnicima beskonačnosti.

338. Ponovimo, najpre, ukratko pozitivnu teoriju beskonačnog do koje smo došli. Prihvatajući kao nedefinljive pojam *iskaz* i pojam *konstituent iskaza*, možemo sa $\phi(a)$ označiti iskaz kojeg je a konstituent. Onda možemo da transformišemo a u promenljivu x i da razmotrimo $\phi(x)$, pri čemu je $\phi(x)$ bilo koji iskaz koji se razlikuje, ako uopšte, od $\phi(a)$ jedino time što se neki drugi objekat pojavljuje umesto a; $\phi(x)$ je ono što nazivamo *iskaznom funkcijom*. Uopšte uzev će važiti da je $\phi(x)$ istinito za neke vrednosti od x, a lažno za neke druge. Sve vrednosti od x za koje je $\phi(x)$ istinito formiraju ono što se naziva *klasom* koja je definisana sa $\phi(x)$; tako svaka iskazna funkcija definiše klasu, te stvarno nabrajanje članova klase nije neophodno za njenu definiciju. Isto tako, bez nabrajanja možemo da definišemo sličnost dve klase: dve klase u i v su slične kada postoji jedan-jedan relacija R takva da „x je jedno u“ uvek implicira „postoji jedno v sa kojim x stoji u relaciji R“ i „y je jedno v“ uvek implicira „postoji jedno u koje je u relaciji R sa y“. Dalje, R je jedan-jedan relacija ako xRy

i *xRz* zajedno uvek impliciraju da je *y* identično sa *z*, a *xRz* i *yRz* zajedno uvek impliciraju da je *x* identično sa *y*; a „*x* je identično sa *y*" je definisano tako da znači „svaka iskazna funkcija koja važi za *x*, takođe važi i za *y*". Sada definišemo kardinalni broj klase *u* kao klasu svih klasa koje su slične klasi *u*, a svaka klasa ima kardinalni broj pošto je „*u* je slično *v*" iskazna funkcija od *v*, ako je *v* promenljiva. Štaviše, sama klasa *u* predstavlja član njenog kardinalnog broja pošto je svaka klasa slična samoj sebi. Gorenavedena definicija kardinalnog broja je, treba primetiti, zasnovana na pojmu iskaznih funkcija i nigde ne pretpostavlja nabrajanje; sledstveno, nema razloga da se pretpostavi da će biti bilo kakve teškoće u pogledu brojeva klasa čiji termini ne mogu da se broje na uobičajen elementarni način. Klase mogu da se podele na dve vrste u zavisnosti od toga da li jesu ili nisu slične pravim delovima njih samih. U prvom slučaju se nazivaju *beskonačnim,* u drugom *konačnim*. Dalje, broj klase koja je definisana iskaznom funkcijom koja je uvek lažna zove se 0; 1 je definisano kao broj klase *u* koja je takva da postoji termin *x* koji pripada klasi *u* takav da je „*y* je jedno *u* i *y* se razlikuje od *x*" uvek lažno; a ako je *n* bilo koji broj, *n* + 1 je definisano kao broj klase *u* koja ima član *x* takav da iskazna funkcija „*y* je jedno *u* i *y* se razlikuje od *x*" definiše klasu čiji je broj *n*. Ako je *n* konačno, *n* + 1 se razlikuje od *n*; a ako nije, ne. Na ovaj način, polazeći od 0, dobijamo progresiju brojeva pošto bilo koji broj *n* vodi novom broju *n* + 1. Lako je dokazati da su svi brojevi koji pripadaju progresiji koja polazi od 1 i koja je generisana na ovaj način različiti; to će reći, ako *n* pripada progresiji, a *m* je bilo koji od njegovih prethodnika, klasa sa *n* termina ne može da stoji u jedan-jedan korelaciji sa jednim od *m* termina. Tako definisana progresija predstavlja niz *konačnih brojeva*. Ali, nema razloga da se misli da svi brojevi mogu tako da se dobiju; i zaista, moguće je formalno dokazati da broj samih konačnih brojeva ne može da bude termin u progresiji konačnih brojeva. Broj koji ne pripada ovoj prrogresiji naziva se *beskonačnim*. Dokaz da su *n* i *n* + 1 različiti brojevi proizlazi iz činjenice da su 0 i 1, ili 1 i 2 različiti brojevi, na osnovu matematičke indukcije; ako *n* i *n* + 1 nisu termini ove progresije, dokaz propada; štaviše, postoji direktan dokaz kojim se utvrđuje suprotno. Ali, pošto prethodni dokaz zavisi od matematičke indukcije, nema ni najmanjeg razloga zašto bi ova teorema trebalo da se proširi i na beskonačne brojeve. Beskonačni brojevi ne mogu da se izraze, kao što konačni mogu, decimalnim notacionim sistemom, ali mogu da se razlikuju na osnovu klasa na koje se primenjuju. Pošto su svi konačni brojevi definisani gorenavedenom progresijom kada klasa *u* ima termine, ali ne bilo koji konačan broj termina, onda ih ima beskonačno. Ovo predstavlja pozitivnu teoriju beskonačnosti.

339. Toliko je očigledno da postoje beskonačne klase da je uopšte teško to negirati. Međutim, pošto to može formalno da se dokaže, dokažimo to. Jedan vrlo prost dokaz naveden je u *Parmenidu*. Uzmimo da postoji broj 1. Onda 1 jeste ili 1 ima Biće, te prema tome postoji Biće. Ali 1 i Biće su dva: stoga postoji broj 2 itd. Formalno, dokazali smo da 1 nije broj brojeva; dokazujemo da je *n* broj brojeva od 1 do *n*, i da ti brojevi zajedno sa Bićem formiraju klasu koja onda ima jedan novi konačan broj, tako da *n* nije broj konačnih brojeva. Dakle, 1 nije broj konačnih brojeva; a ako *n* – 1 nije broj konačnih brojeva, onda to nije ni *n*. Stoga su svi konačni brojevi, na osnovu matematičke indukcije, sadržani u klasi stvari koje nisu broj konačnih brojeva. Pošto je za klase relacija sličnost refleksivna, svaka klasa ima broj; prema tome, klasa konačnih brojeva ima broj koji je, pošto nije konačan, beskonačan. Jedan bolji dokaz, analogan prethodnom, izveden je iz činjenice da, ako je *n* neki konačan broj, broj brojeva od 0 do *n* uključujući *n*, jeste *n* + 1, odakle sledi da *n* nije broj brojeva. Dalje, može biti direktno dokazano na osnovu korelacije celine i dela da je broj iskaza ili pojmova beskonačan[1]. Za svaki termin ili pojam postoji ideja koja je različita od onoga čega je to ideja, ali koja je ipak termin ili pojam. Sa druge strane, nije svaki

[1] Cf. Bolzano, *Paradoxien des Unendlichen*, §13; Dedekind, *Was sind und was sollen die Zahlen?* br. 66.

termin ili pojam ideja. Postoje stolovi i ideje stolova, brojevi i ideje brojeva, itd. Dakle, postoji jedan-jedan relacija između termina i ideja, ali ideje su samo neki među terminima. Otuda postoji beskonačan broj termina i ideja[1].

340. Mora se priznati da je mogućnost da celina i deo mogu da imaju isti broj termina šokantna za zdravi razum. Zenonov Ahil na ingeniozan način pokazuje da suprotno gledište takođe ima šokantne posledice; jer, ako celina i deo ne mogu da se koreliraju termin sa terminom, onda strogo sledi da, ako dve materijalne tačke putuju duž iste putanje i jedna sledi drugu, ona koja je iza nikada neće moći da dostigne onu ispred: a ako bi i uspela, morali bismo da imamo korelirajuće simultane položaje, biunivoku korespondenciju svih termina celine sa svim terminima dela. Zdrav razum je stoga ovde u vrlo nezavidnom položaju; on mora da bira između Zenonovog paradoksa i Kantorovog paradoksa. Ne preporučujem da mu se pritekne u pomoć pošto smatram da bi, nasuprot dokazima, morao u očaju da izvrši samoubistvo. Ali, daću Kantorovom paradoksu oblik koji je sličan Zenonovom. Kao što znamo, Tristram Šendi (Tristram Shandy[*]) je proveo dve godine u pisanju istorije prva dva dana svog života i lamentirao je nad tim što se materijal tako brzo gomila da on ne može da se njime bavi, tako da nikada ne uspeva da stigne do kraja. Sada, smatram da čak i ako bi živeo zauvek i ako ne bi posustajao, onda, čak i da se njegov život nastavio onako kako je započeo, nijedan deo njegove biografije ne bi ostao nenapisan. Ovaj paradoks je, kao što ću pokazati, u strogoj korelaciji sa Ahilom i može se jednostavno nazvati Tristram Šendi.

---

[1] Nije nužno pretpostaviti da ideje svih termina postoje ili da formiraju deo nekog duha; dovoljno je da su one nekakvi entiteti.

[*] Rasel ovde ima u vidu glavnog junaka devetotomnog romana Lorensa Sterna, *The Life and Opinions of Tristram Shandy, Gentleman* (1759-1767) (prim. stručnih redaktora prevoda).

U slučajevima ove vrste, nijedan napor nije suvišan kako bi se naši argumenti učinili formalnim. Prema tome, prihvatiću se posla da stavim i Ahila i Tristrama Šendija u strogo logičku formu.

I. (1) Za svaki kornjačin položaj postoji jedan i samo jedan Ahilov: za svaki Ahilov položaj, postoji jedan i samo jedan kornjačin.

(2) Stoga niz položaja koje zauzima Ahil ima isti broj termina kao i niz položaja koje zauzima kornjača.

(3) Deo ima manje termina od celine u kojoj je sadržan i sa kojom nije koekstenzivan.

(4) Stoga niz položaja koje zauzima kornjača nije pravi deo niza položaja koje zauzima Ahil.

II. (1) Tristram Šendi godinu dana piše o događajima jednog dana.

Niz dana i niz godina nemaju poslednji termin.

Događaji n-tog dana opisani su tokom n-te godine.

Bilo koji određeni dan je n-ti, za odgovarajuću vrednost n.

Stoga će bilo koji određeni dan biti opisan.

Stoga, nijedan deo biografije neće ostati nenapisan.

Pošto postoji jedan-jedan korelacija između vremenâ dešavanja i vremenâ pisanja, i pošto su ranija deo kasnijih, celina i deo imaju isti broj termina.

Izrazimo oba ova paradoksa što je moguće apstraktnije. U tu svrhu, neka je u kompaktni niz bilo koje vrste, a x promenljiva koja može da uzme sve vrednosti u nizu u nakon izvesne vrednosti koju ćemo nazvati 0. Neka je $f(x)$ jednovrednosna funkcija od x, a x jednovrednosna funkcija od $f(x)$; neka takođe sve vrednosti od $f(x)$ pripadaju nizu u. Onda naši argumenti glase:

I. Neka je $f(0)$ termin koji prethodi 0; neka $f(x)$ raste kako raste x to jest ako xPx' (gde P predstavlja generišuću relaciju), neka je $f(x)$ $Pf(x')$. Dalje, neka $f(x)$ uzima sve intermedijarne vrednosti u nizu u između bilo koje dve vrednosti od $f(x)$. Onda, ako za neku vrednost a od x takvu da $0Pa$ imamo $f(a) = a$, onda će niz vrednosti od $f(x)$ biti svi termini od $f(0)$ do a, dok će niz vrednosti od x biti samo termini od 0 do *a* koji su deo termina od *f*(0) do *a*. Tako, pretpostaviti *f*(*a*) = *a* znači pretpostaviti jedan-jedan korelaciju, termin sa terminom, celine i dela koju i Zenon i zdrav razum proglašavaju nemogućom.

II. Neka je *f*(*x*) funkcija koja je 0 kada *x* je 0, i koja uniformno raste kako *x* raste, a neka je naš niz onaj u kojem postoji merenje. Onda, ako *x* uzme sve vrednosti posle 0, to isto čini i *f*(*x*); a ako *f*(*x*) uzima sve takve vrednosti, to isto čini i *x*. Prema tome, klasa vrednosti jedne je identična sa klasom vrednosti one druge. Ali, ako je u bilo koje vreme vrednost *x* veća od vrednosti *f*(*x*), pošto *f*(*x*) uniformno raste, *x* će uvek biti veće od *f*(*x*). Stoga za bilo koju datu vrednost od *x*, klasa vrednosti *f*(*x*) od 0 do *f*(*x*) predstavlja pravi deo vrednosti *x* od 0 do x. Stoga bismo mogli da zaključimo da su sve vrednosti od *f*(*x*) bile pravi deo svih vrednosti od *x*; ali, kao što smo videli, to je greška.

Ova dva paradoksa su korelativna. Oba mogu da se iskažu pomoću granica pozivanjem na segmente. Ahil dokazuje da dve promenljive u kontinuiranom nizu koje se približavaju jednakosti sa iste strane nikada ne mogu da imaju zajedničku granicu; Tristram Šendi dokazuje da dve promenljive koje počinju od jednog zajedničkog termina i koje nastavljaju u istom pravcu ali se sve više i više razilaze, ipak mogu da odrede istu graničnu klasu (koja, međutim, nije nužno segment, zato što su segmenti definisani tako da imaju termine izvan sebe). Ahil podrazumeva da celina i deo ne mogu da budu slični odakle se izvodi paradoks; u drugom se polazeći od jedne trivijalnosti izvodi da celina i deo mogu da budu slični. Mora se priznati da je to za zdrav razum najnesrećnije stanje stvari.

341. Nema sumnje u pogledu toga koji put je ispravan. Ahil mora da se odbaci pošto direktno protivreči aritmetici. Tristram Šendi mora da se prihvati pošto ne pretpostavlja aksiom da celina ne može da bude slična delu. Kao što smo videli, ovaj aksiom je suštinski za dokaz Ahila i bez sumnje je vrlo prihvatljiv zdravom razumu. Ali, nema drugog dokaza za ovaj aksiom osim pretpostavljene samoočiglednosti, i njegovo prtihvatanje sasvim sigurno vodi protivrečnostima. Ovaj aksiom ne samo da je nepotreban, već je sasvim sigurno destruktivan u matematici, i protiv njegovog odbacivanja ne stoji ništa osim predrasude. Jedna od najvećih zasluga dokaza jeste to što proizvode izvestan skepticizam u pogledu dokazanog rezultata. Čim je otkriveno da može da se *dokaže* da sličnost između celine i dela nije moguća za svaku *konačnu* celinu[1], postalo je plauzibilno pretpostaviti za beskonačne celine da, u slučajevima u kojima nemogućnost nije mogla da se dokaže, takve nemogućnosti zapravo ni nema. Zapravo, u pogledu brojeva sa kojima imamo posla u svakodnevnom životu – u inženjerstvu, astronomiji ili računovodstvu, čak i u slučaju Rokfelera i ministra finansija Ujedinjenog Kraljevstva – sličnost celine i dela je nemoguća; lako je objašnjivo otkud pretpostavka da je to uvek nemoguće. Ali, ova pretpostavka nije ništa bolje zasnovana od one koju su podržavali induktivni filozofi Centralne Afrike, naime, da su svi ljudi crni.

342. Možda je vredno truda, kako bi objašnjenje razlike između konačnih i beskonačnih celina postalo jasnije, istaći da su celina i deo termini koji mogu da se definišu na dva načina u sučaju kada je celina konačna, ali samo na jedan način, barem praktično, kada je celina beskonačna[2]. Konačna celina može da se uzme kolektivno, kao takve i takve individue kao, na primer, *A*, *B*, *C*, *D*, *E*. Deo ove celine može da se dobije nabrajanjem nekih, ali ne i svih, termina koji čine ovu celinu; na ovaj način jedna individua predstavlja deo celine. Nijednu celinu niti njene delove nije potrebno uzeti kao klase, već sve može da se definiše ekstenzijom, to jest nabrajanjem individua. Sa druge strane, celina i delovi mogu da se definišu intenzijom, to jest klasnim pojmovima. Tako bez nabrajanja znamo da su Englezi deo Evropljana zato što je bilo koji pojedinačni Englez jedan Evropljanin, ali ne i obratno. Premda bi ovo *moglo* da se ustanovi

[1] Pri čemu je konačno ovde definisano pomoću matematičke indukcije, da bi se izbegla tautologičnost.

[2] Cf. §330.

nabrajanjem, nije potrebno da se tako ustanovljava. Kada je reč o beskonačnim celinama, ova dvojaka definicija nestaje i imamo samo definiciju pomoću intenzije. I celina i deo moraju biti klase, a definicija celine i dela se izvodi pomoću pojmova promenljive i logičke implikacije. Ako je *a* klasni pojam, individua od *a* je termin koji sa *a* stoji u specifičnoj relaciji koju zovemo klasnom relacijom. Ako je *b* neka druga klasa, takva da za sve vrednosti *x*, „*x* je jedno *a*" implicira „*x* je jedno *b*", onda se za ekstenziju od *a* (to jest za promenljivu *x*) kaže da je *deo* ekstenzije od *b*[1]. Ovde se ne zahteva nikakvo nabrajanje individua, a relacija celine i dela nema više ono prosto značenje koje je imala kada je bilo reči o konačnim delovima. Sada, reći da su *a* i *b* slični znači reći da postoji neka jedan-jedan relacija *R* koja ispunjava sledeće uslove: ako je *x* jedno *a*, onda postoji termin *y* klase *b* takav da *xRy*; ako je *y*' jedno *b*, onda postoji termin *x*' klase *a* takav da *x*'*Ry*. Iako je *a* deo *b*, ne može da se dokaže da je takvo stanje stvari nemoguće, zato što bi nemogućnost morala da se dokaže samo nabrajanjem, a nema razloga da se pretpostavi da je nabrajanje moguće. Definicija celine i dela bez nabrajanja je ključ za celu misteriju. Prethodna definicija koju dugujemo profesoru Peanu prirodno i nužno se primenjuje na beskonačne celine. Na primer, prosti brojevi su pravi deo celih brojeva, ali to ne može da se dokaže nabrajanjem. To je izvedeno iz „ako je *x* prost broj, *x* je broj" i „ako je *x* broj, ne sledi da je *x* prost broj". To da bi klasa prostih brojeva trebalo da bude slična klasi brojeva samo izgleda nemoguće zato što mi zamišljamo celinu i deo kao definisane nabrajanjem. Čim se oslobodimo ove ideje, pretpostavljena protivrečnost nestaje.

343. Što se tiče ω ili α_0, vrlo je važno shvatiti da ni jednom ni drugom neposredno ne prethodi nijedan drugi broj. Oni dele ovu karakteristiku sa svim ganicama zato što granici niza nikada neposredno ne prethodi termin niza koji ona ograničava. Ali, ω u nekom smislu logički prethodi drugim granicama zato što konačni ordinalni

---

[1] Vidi Peano, *Rivista di Matematica*, VII, ili *Formulaire*, Vol. II, Deo I.

brojevi zajedno sa ω predstavljaju formalni tip progresije zajedno sa njenom granicom. Kada se zaboravi da ω nema neposrednog prethodnika, nastaju najrazličitije protivrečnosti. Jer, pretpostavimo da je n poslednji broj pre ω; onda je n konačan broj, a broj konačnih brojeva je $n + 1$. Zapravo, reći da ω nema prethodnika samo znači reći da konačni brojevi nemaju poslednji termin. Iako svi konačni brojevi prethode ω, nijedan od tih brojeva ne prethodi mu neposredno: nema ničega što je najbliže ω. Kantorovi transfinitni brojevi imaju tu osobenost da, iako za bilo koji određeni broj uvek postoji broj koji za njim neposredno sledi, ne postoji uvek broj koji mu neposredno prethodi. Stoga, izgleda da mora da bude praznina u nizu. Imamo niz 1, 2, 3,... v, ... koji je beskonačan i koji nema poslednji termin. Imamo i drugi niz ω, $\omega + 1$, $\omega + 2$, ..., $\omega + v$, ... koji je isto tako beskonačan i nema poslednji termin. Ovaj drugi niz u celini dolazi posle prvog, mada ne postoji nijedan termin prvog koji neposredno prethodi ω. Međutim, ovo stanje stvari može da se uporedi sa vrlo elementarnim nizovima kao što je niz čiji su opšti termini $1 - 1/v$ i $2 - 1/v$, gde v može biti bilo koji konačan ceo broj. Drugi niz u celosti dolazi posle prvog i ima određeni prvi termin, naime, 1. Ali, ne postoji termin prvog niza koji neposredno prethodi 1. Ono što je neophodno kako bi drugi niz mogao da dođe posle prvog jeste da mora da postoji neki niz u kome su oba sadržana. Ako nazovemo *ordinalnim delom* niza bilo koje nizove koji mogu da se dobiju izostavljanjem nekih od termina tog niza bez promene poretka termina koji preostaju, onda konačni i transfinitni ordinali svi skupa formiraju niz čija je generišuća relacija relacija ordinalne celine i dela između nizova na koje se različiti ordinali primenjuju. Ako je v bilo koji konačni ordinal, nizovi tipa v su ordinalni delovi progresija; slično tome, svaki niz tipa $\omega + 1$ sadrži progresiju kao ordinalni deo. Relacija *biti ordinalni deo* tranzitivna je i asimetrična, i tako, konačni i transfinitni ordinali svi pripadaju jednom nizu. Egzistencija ω (u matematičkom smislu egzistencije) ne dovodi se u pitanje pošto je ω tip poretka predstavljen samim prirodnim brojevima.

Negirati ω značilo bi tvrditi da postoji poslednji konačan broj – što je gledište koje, kao što smo videli, direktno vodi određenim protivrečnostima. Kada se ovo usvoji, $\omega + 1$ predstavlja tip niza ordinala, uključujući i ω, to jest niz čiji su svi termini nizovi celih brojeva od 1 naviše do bilo kojeg konačnog broja zajedno sa celim nizom celih brojeva. Odatle lako sledi celokupna beskonačna hijerarhija transfinitnih brojeva.

344. Stoga, uobičajene primedbe na beskonačne brojeve, klase, nizove, i na pojam da je beskonačnost kao takva samoprotivrečna, mogu da se odbace kao neosnovane. Međutim, ipak ostaje jedna vrlo ozbiljna teškoća povezana sa protivrečnošću koju smo razmatrali u Glavi X. Ova teškoća se ne odnosi na beskonačnost kao takvu već samo na određene veoma velike beskonačne klase. Ova teškoća može ukratko da se izloži na sledeći način. Kantor je dao dokaz[1] da ne može da postoji najveći kardinalni broj i, kada se taj dokaz ispita, uviđa se da se njime tvrdi da je, ako je u klasa, broj klasa sadržanih u u veći od broja termina u u ili (što je isto) ako je α neki broj, 2^{α} je veće od α. Ali, postoje izvesne klase u pogledu kojih je lako pružiti naizgled valjan dokaz da one imaju onoliko termina koliko je moguće. Takve su klasa svih termina, klasa svih klasa ili klasa svih iskaza. Tako, izgleda da bi Kantorov dokaz morao da sadrži neku pretpostavku koja nije potvrđena u slučaju takvih klasa. Ali, kada primenimo rasuđivanje iz Kantorovog dokaza na te slučajeve, nailazimo na određene protivrečnosti poput one o kojoj smo raspravljali u Glavi X[2]. Ova teškoća nastaje uvek kada pokušavamo da postupamo sa klasom apsolutno svih entiteta ili sa bilo kojom isto tako velikom klasom. Da nije ove teškoće u takvom gledištu, čovek bi došao u iskušenje da kaže da je koncepcija totaliteta stvari i celog

---

[1] On je zapravo izneo dva dokaza, ali ćemo videti da jedan od njih nije ubedljiv.

[2] Na taj način sam i otkrio ovu protivrečnost; jedna slična može da se nađe na kraju Apendiksa B.

univerzuma entiteta i svega postojećeg uopšte na neki način nelegitimna i inherentno suprotstavljena logici. Ali, nije poželjno prihvatiti jednu tako očajničku meru sve dok postoji nada u neko manje herojsko rešenje.

Pre svega se može primetiti da klasa brojeva nije, kao što bi moglo da se pretpostavi, jedna od onih u pogledu koje se javljaju teškoće. Među konačnim brojevima, ako bi n bio broj brojeva, morali bismo da zaključimo da bi $n - 1$ bio najveći od brojeva, tako da tu uopšte ne bi bilo broja n. Ali to je osobenost konačnih brojeva. Broj brojeva do i uključujući α_0 jeste α_0, ali ovo je takođe broj brojeva do i uključujući α_β, gde je β neki konačan ordinal ili neki ordinal primenljiv na prebrojiv dobro uređeni niz. Stoga, broj brojeva do i uključujući α, gde je α beskonačno, uobičajeno je manji od α i nema nikakvog razloga da se pretpostavi da je broj svih brojeva najveći broj. Broj brojeva može da bude manji od najvećeg broja i nikakva protivrečnost ne nastaje iz činjenice (ako je to uopšte činjenica) da je broj individua veći od broja brojeva.

Ali, iako klasa brojeva ne prouzrokuje teškoću, postoje druge klase sa kojima je vrlo teško postupati. Ispitajmo najpre Kantorove dokaze da ne postoji najveći kardinalni broj, a potom razmotrimo slučajeve u kojima nastaju protivrečnosti.

345. U prvom od Kantorovih dokaza[1] argument zavisi od pretpostavljene činjenice da postoji jedan-jedan korespondencija između ordinala i kardinala[2]. Videli smo da kada razmatramo kardinalni broj niza tipa predstavljenog bilo kojim ordinalom, beskonačan broj ordinala odgovara jednom kardinalu – na primer, svi ordinali druge klase koji formiraju neprebrojivu kolekciju odgovaraju samo jednom kardinalu α_0. Ali, postoji drugi metod korelacije u kojem samo jedan ordinal odgovara svakom kardinalu. Ovaj metod proizlazi iz razmatranja samog niza kardinala. U ovom nizu, α_0 odgovara ω, α_1

[1] *Mannichfaltigkeitslehre,* str. 44.

[2] Cf. *supra*, Glava XXXVIII, §300.

odgovara ω+1 itd.: uvek postoji jedan i samo jedan ordinal koji opisuje tip niza predstavljen kardinalima od 0 naviše do bilo kojeg od njih. Izgleda da mora da se pretpostavi da postoji kardinal za svaki ordinal, i da nijedna klasa ne može da ima toliko termina da nijedan dobro uređen niz ne može da ima veći broj termina. Što se mene tiče, ne vidim nikakve razloge za bilo koju od ovih pretpostavki, ali vidim određene razloge protiv one druge. Jer, svaki termin niza mora biti individua i mora biti individua koja se razlikuje (što je detalj koji se često previđa) od svakog drugog termina niza. Mora da bude različit zato što ne postoje instance individue: svaka individua je apsolutno jedinstvena i po prirodi stvari je samo jedna. Ali, dva termina u nizu su dva i stoga ne predstavljaju jednu istu individuu. Ova najvažnija poenta zamagljena je činjenicom da mi po pravilu ne opisujemo u potpunosti termine naših nizova. Kada kažemo: razmotrimo niz *a*, *b*, *c*, *d*, *b*, *d*, *e*, *a*, …, gde se termini ponavljaju u intervalima – takav niz, na primer, predstavljen je decimalama u decimalnoj ekspanziji – zaboravljamo na teoremu da u slučajevima u kojima postoji ponavljanje, naš niz može da se dobije jedino korelacijom; to će reći, sami termini nemaju poredak, ali stoje u jedan-mnogo (a ne jedan-jedan) relaciji prema terminima koji imaju poredak[1]. Stoga, ako želimo jedan pravi niz moramo ili da idemo unazad ka nizu sa kojim su naši termini korelirani ili moramo da formiramo kompleksne termine sastavljene od parova termina prvobitnog niza i termina koreliranog niza. Ali, ni u jednom od ova dva niza nema ponavljanja. Stoga svaki ordinalni broj mora da odgovara nizu individua od kojih se svaka razlikuje od svake druge. Može biti sumnjivo da li uopšte sve individue formiraju niz: što se mene tiče, ne mogu da otkrijem neku tranzitivnu asimetričnu relaciju koja stoji između *svakog* para termina. Istina, Kantor tretira kao zakon mišljenja to da svaki određeni agregat može da se dobro uredi; ali, ne vidim razlog za takvo mišljenje. Ali odobravanjem ovog gledišta ordinali će imati sasvim određeni

[1] Vidi Glavu XXXII *supra*.

maksimum, naime, onaj ordinal koji predstavlja tip niza koji je formiran od svih termina, bez izuzetka[1]. Ako kolekcija svih termina ne formira niz, nemoguće je dokazati da mora da postoji maksimalni ordinal, za koji, u svakom slučaju, ima razloga da mu se postojanje porekne[2]. Ali u tom slučaju možemo legitimno da sumnjamo da postoji isto toliko ordinala koliko i kardinala. Naravno, ako svi kardinali formiraju dobro uređen niz, onda mora da postoji jedan ordinal za svaki kardinal. Ali, iako Kantor izjavljuje da ima dokaz da od dva različita kardinala jedan mora da bude veći (*Math. Annalen*, XLVI, §2), ne mogu sebe da ubedim da on čini išta više nego što dokazuje da postoji niz čiji termini su kardinali od kojih je bilo koji veći ili manji od nekog drugog. Ne vidim razlog zašto bih mislio da su svi kardinali u tom nizu. Tu bi mogle da postoje dve klase takve da nije moguće korelirati bilo koju od njih sa nekim delom druge; u tom slučaju, kardinalni broj jedne neće biti ni jednak, ni veći, ni manji od kardinalnog broja one druge. Ako svi termini pripadaju jednom jedinom dobro uređenom nizu, ovo je nemoguće; ali ako ne pripadaju, onda ne vidim nikakav način kako bih pokazao da takav slučaj ne može da nastane. Stoga, izgleda da pada prvi dokaz da ne postoji kardinal koji ne može da se poveća.

346. Drugi dokaz koji smo gore pomenuli[3] sasvim je različit i daleko je određeniji. Ovaj dokaz je zanimljiv i značajan sam po sebi i skiciraćemo ga. Članak u kojem se on nalazi sastoji se od tri poente: (1) prost dokaz da postoje moći više od prve, (2) primedba da ovaj metod dokaza može da se primeni na bilo koju moć i (3) primena metoda kako bi se dokazalo da postoje moći više od moći

---

[1] O maksimalnom ordinalu, vidi Burali-Forti, „Una questione sui numeri transfiniti“, *Rendiconti del circolo matematico di Palermo*, 1897. Takođe vidi moj članak u *RdM*, Vol. VIII, str. 43, fusnota.

[2] Cf. Glavu XXXVIII, §301.

[3] *Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung*, I, (1892), str. 77.

kontinuuma[1]. Ispitajmo najpre navedene poente, a onda pogledajmo da li je predloženi metod zaista generalan.

Neka su *m* i *w*, kaže Kantor, dva uzajamno isključiva karaktera, i uzmimo kolekciju *M* elemenata *E*, gde je svaki element *E* jedna prebrojiva kolekcija $x_1, x_2, ..., x_n, ...$, a svako *x* je ili *m* ili *w*. (Ova dva karaktera, *m* i *w*, mogu da se smatraju kao veći odnosno manji od nekog fiksiranog termina. Stoga *x*-evi mogu da budu racionalni brojevi od kojih je svaki *m* kada je veći od 1, a *w* kada je manji od 1. Ove primedbe su logički irelevantne, ali one olakšavaju praćenje argumenta). Dakle, kolekcija *M* se sastoji od svih mogućih gore opisanih elemenata *E*. Onda, *M* nije prebrojivo, to jest ono je moći više od prve. Jer, uzmimo neku prebrojivu kolekciju *E*-ova koji su određeni na sledeći način[*]:

$$E_1 = (a_{11}, a_{12}, ...\ a_{1n}, ..).$$
$$E_2 = (a_{21}, a_{22}, ...\ a_{2n}, ..).$$
$$..$$
$$E_p = (a_{p1}, a_{p2}, ...a_{pn}, ..).$$
$$..$$

gde je svaki od *a*-ova *m* ili *w* na neki određeni način. (Na primer, prvi *p* termini od E_p mogli bi da budu *m*-ovi, a ostali *w*-ovi. Ili bi mogao da se navede neki drugi zakon koji bi garantovao da su *E*-ovi našeg niza svi različiti). Onda, ma kako da je naš niz *E* izabran, uvek možemo da pronađemo termin E_0 koji pripada kolekciji *M,* ali ne i

---

[1] Moć je sinonim za pojam *kardinalni broj*; prva moć jeste ona konačnih celih brojeva, to jest α_0.

[*] Ovo je Kantorov čuveni metod *dijagonalizacije* to jest *dijagonalni argument* iz članka „Ueber eine elementare Frage der Mannigfaltigketislehre“ (*Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Zeitschriftenband* 1890/91, S. 75–78) kojim se utvrđuje da postoje skupovi koji ne mogu da se dovedu u 1-1 korespondenciju sa skupom prirodnih brojeva $\mathbb{N}$ čija je kardinalnost $\aleph_0$. Posredstvom ove tehnike može jednostavno da se pokaže da je kardinalnost skupa realnih brojeva $\mathbb{R}$ veća od kardinalnosti skupa racionalnih brojeva $\mathbb{Q}$ (prim. stručnih redaktora prevoda).

prebrojivom nizu E-ova. Jer, neka je E_0 niz (b_1, b_2, ..., b_n, ..)., gde je, za svako n, b_n različito od a_{nn} – to će reći, ako je a_{nn} m, b_n je w i obratno. Onda svaki od naših prebrojivih nizova E-ova sadrži barem jedan termin koji nije identičan sa odgovarajućim terminom od E_0, i stoga E_0 nije nijedan od termina našeg prebrojivog niza E-ova. Stoga, nijedan takav niz ne može da sadrži sve E-ove i stoga E-ovi nisu prebrojivi, to jest M ima moć koja je veća od prve.

Ne treba da prestanemo sa ispitivanjem dokaza da postoji moć viša od moći kontinuuma koji se lako dobija iz prethodnog dokaza. Odmah možemo da nastavimo sa ispitivanjem opšteg dokaza da, ako je data ma koja kolekcija, onda postoji kolekcija koja ima višu moć. Ovaj dokaz je sasvim prost kao i dokaz pojedinačnog slučaja. On se odvija na sledeći način. Neka je u bilo koja klasa, i neka je K klasa relacija takva da, ako je R relacija te klase, svaki termin klase u stoji u relaciji R ili prema 0 ili prema 1. (I neki drugi par termina bi mogao da posluži jednako dobro kao i 0 i 1). Tada klasa K ima višu moć od klase u. Kako bismo ovo dokazali, primetimo najpre da K sigurno nema manju moć; jer, ako je x neko u, onda će postojati relacija R klase K takva da svako u osim x stoji u relaciji R prema 0, dok x stoji u ovoj relaciji prema 1. Relacije ove vrste, za različite vrednosti x, formiraju klasu koja je jedan-jedan korelirana sa terminima od u i koja je sadržana u klasi K. Stoga, K ima barem istu moć kao i u. Da bi se dokazalo da K ima višu moć, razmotrimo neku klasu sadržanu u K koja je jedan-jedan korelirana sa u. Onda, bilo koja relacija ove klase može da se nazove R_x, gde je x neko u – pri čemu sufiks x označava korelaciju sa x. Definišimo sada relaciju R' sledećim uslovima: za svaki termin x od u za koji x stoji u relaciju R_z prema 0, neka x stoji u relaciji R' prema 1; a za svaki termin y od u za koji y stoji u relaciji R_y prema 1, neka y stoji u relaciji R' prema 0. Tada je relacija R' definisana za sve termine od u, i ona predstavlja relaciju klase K; no, ona nije nijedna od relacija R_x. Stoga, ma koju klasu sadržanu u K i iste moći kao u da uzmemo, uvek postoji termin od K koji ne pripada toj klasi; prema tome, K ima višu moć od u.

347. Najpre možemo da pojednostavimo ovaj argument eliminisanjem pominjanja 0 i 1 i relacija prema njima. Svaka relacija klase *K* je definisana kada znamo koji od termina iz *u* stoji u ovoj relaciji prema 0, to jest ona je definisana pomoću klase sadržane u *u* (uključujući i nultu klasu i samo *u*). Tako, postoji jedna relacija klase *K* za svaku klasu sadržanu u *u*, a broj od *K* je isti kao broj klasa koje su sadržane u *u*. Stoga, ako je *k* bilo koja klasa, logički proizvod *ku* je klasa sadržana u *u*, a broj od *K* je onaj od *ku*, gde je *k* promenljiva koja može da bude bilo koja klasa. Tako se argument svodi na ovo: broj klasa sadržanih u nekoj klasi premašuje broj termina koji pripadaju toj klasi[1].

Drugi oblik istog argumenta je sledeći. Uzmimo neku relaciju *R* koja ima dva svojstva: (1) njen domen, koji ćemo nazvati ρ, jednak je njenom konverznom domenu i (2) nikoja dva termina tog domena nemaju potpuno isti skup relata. Onda je posredstvom *R* bilo koji termin od ρ koreliran sa klasom sadržanom u ρ, naime, sa klasom relata čiji je termin o kojem je reč referencija i ova korelacija je jedan-jedan. Treba pokazati da je bar jedna klasa koja je sadržana u ρ izostavljena iz te korelacije. Izostavljena klasa je klasa *w* koja se sastoji od svih termina domena koji ne stoje u relaciji *R* sami prema sebi, to jest klasa *w* koja je domen logičkog proizvoda od *R* i različitosti. Jer, ako je *y* bilo koji termin tog domena te samim tim konverzni domen, *y* pripada *w* ako *w* ne pripada klasi koreliranoj sa *y*, a *y* ne pripada *w* u suprotnom slučaju. Stoga, *w* nije ista klasa kao korelat od *y*, a ovo važi koji god termin *y* da smo izabrali. Stoga je klasa *w* nužno izostavljena iz ove korelacije.

348. Izgleda da prethodni argument, mora se priznati, ne sadrži nikakvu sumnjivu pretpostavku. Ipak, postoje izvesne klase u kojima je ovaj zaključak očigledno lažan. Uzmimo najpre slučaj klase svih termina. Ako prihvatimo, kao što smo to učinili u §47, da je svaki konstituent svakog iskaza termin, onda će klase biti samo neki od

---

[1] Broj klasa sadržanih u klasi koja ima α članova je 2^α; tako argument pokazuje da je 2^α uvek veće od α.

termina. I obratno, pošto za svaki termin postoji klasa koja se sastoji samo od tog termina, postoji jedan-jedan korelacija svih termina sa nekim klasama. Stoga bi broj klasa trebalo da bude isti kao i broj termina[1]. Ovaj slučaj se adekvatno tretira pomoću učenja o tipovima[2] i tako je potpuno analogan slučaju klasa i klasa klasâ. Ali, ako prihvatimo pojam svih objekata[3] svake vrste, onda postaje očigledno da klase objekata moraju da budu samo neki od objekata, dok bi Kantorov argument pokazivao da ima više klasa objekata nego što je objekata. Ili, dalje, uzmimo klasu iskaza. Svaki objekat može da se javi u nekom iskazu, te izgleda nesumnjivo da postoji barem toliko iskaza koliko postoji objekata. Jer, ako je *u* fiksirana klasa, „*x* je jedno *u*" biće iskaz koji se razlikuje za svaku različitu vrednost od *x*; ako, shodno učenju o tipovima, smatramo da za dato *u*, *x* ima ograničen domen ako „*x* je jedno *u*" treba da zadrži značenje, treba samo prikladno varirati *u* kako bi se dobili iskazi ovog oblika za svako moguće *x*, te tako broj iskaza mora da bude barem onoliko veliki koliko i broj objekata. Ali, klase iskaza su samo neki od objekata, dok Kantorov argument pokazuje da ima više klasa iskaza nego što ima iskaza. I opet, možemo lako da dokažemo da ima više iskaznih funkcija nego što ima objekata. Jer, pretpostavimo da je korelacija svih objekata i nekih iskaznih funkcija ostvarena, i neka je ϕ_x korelat od *x*. Tada je „ne-$\phi_x(x)$" to jest „ϕ_x ne važi za *x*" iskazna funkcija koja nije sadržana u korelaciji zato što je ona istinita ili lažna za *x* u zavisnosti od lažnosti ili istinitosti ϕ_x od *x*, te se prema tome razlikuje od ϕ_x za svaku vrednost od *x*. Ali i ovaj slučaj možda može da se razreši manje ili više pomoću učenja o tipovima.

---

[1] Ovo proizlazi iz Šrederove i Bernštajnove teoreme prema kojoj, ako je *u* slično delu od *v* i *v* delu od *u*, onda *u* i *v* moraju biti slični. Vidi Borel, *Leçons sur la Théorie des Fonctions* (Paris, 1898), str. 102ff.

[2] Vidi Glavu X i Apendiks B.

[3] Za upotrebu reči *objekat* vidi §58, fusnota.

349. Bilo bi dobro da detaljno ispitamo primenu Kantorovog argumenta na takve slučajeve pomoću neke stvarne korelacije. U slučaju termina i klasa, na primer, ako *x* nije klasa, korelirajmo je sa *ιx*, to jest sa klasom čiji je jedini član *x*, ali ako je *x* klasa, korelirajmo je sa njom samom. (Ovo nije jedan-jedan već mnogo-jedan korelacija, jer su i *x* i *ιx* korelirani sa *ιx*, ali će poslužiti za ilustraciju ove poente). Onda je klasa koja bi bila izostavljena iz korelacije, shodno Kantorovom argumentu, klasa *w* onih klasa koje nisu članovi njih samih; ipak, i ona bi kao klasa bila korelirana sama sa sobom. Ali, *w* je, kao što smo videli u Glavi X, samoprotivrečna klasa koja i jeste i nije član sebe same. Protivrečnost u ovom slučaju može da se razreši pomoću učenja o tipovima; ali, slučaj iskaza je teži. U ovom slučaju, korelirajmo svaku klasu iskaza sa iskazom koji je njegov logički proizvod; na ovaj način izgleda da imamo jedan-jedan relaciju svih klasa iskaza prema nekim iskazima. Ali, primenjujući Kantorov argument, uviđamo da je izostavljena klasa *w* onih iskaza koji su logički proizvodi, ali koji nisu članovi klasa iskaza čiji su oni logički proizvodi. Ova klasa bi, shodno definiciji naše korelacije, bila korelirana sa njenim sopstvenim logičkim proizvodom, ali ispitivanjem tog logičkog proizvoda uviđamo da on i jeste i nije član klase *w* čiji je on logički proizvod.

Stoga primena Kantorovog argumenta na sumnjive sličajeve proizvodi protivrečnosti, mada nisam bio u stanju da pronađem bilo koju tačku u kojoj argument izgleda pogrešno. Jedino rešenje koje mogu da predložim jeste da se prihvati zaključak da ne postoji ni najveći broj ni učenje o tipovima, te da se negira da postoje ikoji istiniti iskazi koji bi važili za sve objekte ili za sve iskaze. Ali, ova druga opcija deluje očigledno lažno, pošto su svi iskazi u svakom slučaju ili istiniti ili lažni, čak i ako ne bi imali nikakva druga zajednička svojstva. U ovom nezadovoljavajućem stanju nerado prepuštam problem ingenioznosti čitaoca.

350. Rezimirajmo diskusije ovog dela: prvo, videli smo da iracionalni brojevi moraju da se definišu kao oni segmenti racionalnih brojeva koji nemaju granicu, te da na taj način analiza može da izostavi bilo koji specijalan aksiom kontinuiteta. Videli smo da je moguće čisto ordinalno definisati vrstu kontinuiteta koja pripada realnim brojevima, i da tako definisan kontinuitet nije samoprotivrečan. Videli smo da diferencijalni i integralni račun nemaju potrebe za infinitezimalama, i da, iako su neki oblici infinitezimala dopustivi, najuobičajeniji oblik, naime, infinitezimalni segmenti u kompaktnom nizu, nisu implicirani ni kompaktnošću ni kontinuitetom; taj oblik je zapravo samoprotivrečan. Naposletku smo razmatrali filozofska pitanja koja se tiču kontinuiteta i beskonačnosti, i uvideli smo da Zenonovi argumenti, iako su u velikoj meri valjani, ipak ne proizvode nikakvu vrstu ozbiljne teškoće. Nakon jasno shvaćene dvostruke definicije beskonačnosti, kao one koja ne može da se dosegne matematičkom indukcijom koja polazi od 1, i kao one koja ima delove koji imaju isti broj termina kao i ona sama – što su definicije koje mogu da se razlikuju kao ordinalna i kardinalna – videli smo da su svi uobičajeni argumenti i u pogledu beskonačnosti i u pogledu kontinuiteta lažni i da nijedna određena protivrečnost ne može da se dokaže ni u pogledu beskonačnosti ni u pogledu kontinuiteta, mada izvesne naročite beskonačne klase izazivaju do sada nerazrešene protivrečnosti.

Preostaje da se na prostor, vreme i kretanje primene glavni rezultati ovih razmatranja, a to su (1) nemogućnost infinitezimalnih segmenata, (2) definicija kontinuiteta i (3) definicija i konzistentnost učenja o beskonačnom. Nadam se da će ove primene uveriti čitaoca da prethodne donekle preopširne rasprave nisu bile suvišne.

Šesti deo

PROSTOR

Glava XLIV

DIMENZIJE I KOMPLEKSNI BROJEVI

351. Razmatranja u prethodnim delovima bila su posvećena dvema glavnim temama, logičkoj teoriji brojeva i teoriji jednodimenzionalnih nizova. U prva dva dela bilo je pokazano kako bi na osnovu neophodnog aparata opštih logičkih pojmova mogla da se razvije teorija konačnih celih i racionalnih brojeva bez predznaka. U Trećem delu, jedan pojedinačan slučaj poretka, naime, poredak veličina, bio je ispitan sam za sebe, i bilo je utvrđeno da su najveći problemi koji nastaju u teoriji kvantiteta isključivo ordinalni. U Četvrtom delu je izložena opšta priroda jednodimenzionalnih nizova, i pokazano je da bi svi aritmetički iskazi dobijeni pomoću logičke teorije konačnih brojeva, mogli takođe da se dokažu na osnovu pretpostavke da konačni celi brojevi formiraju niz vrste koji može da se nazove progresijom. U Petom delu ispitali smo probleme koje proizvode beskrajni nizovi i kompaktni nizovi – probleme koji su pod imenima beskonačnosti i kontinuiteta uvek prkosili filozofima još od početka apstraktnog mišljenja. Razmatranje ovih problema vodilo je kombinaciji logičke i ordinalne teorije aritmetike i odbacivanju, kao univerzalno valjanih, dva povezana principa koje smo, sledeći Kantora, tretirali kao definicije konačnog, a ne kao primenljive na sve kolekcije i nizove. Ta dva principa su bila: (1) ako je jedna klasa u celosti sadržana u ali ne i koekstenzivna sa drugom klasom, onda ona nema isti broj termina kao ta druga klasa; (2) matematička indukcija, koja je isključivo ordinalna, može da se izrazi na sledeći način: niz koji je generisan jedan-jedan relacijom, i koji ima prvi termin, takav je da bilo koje svojstvo koje pripada prvom i sledbeniku bilo kog termina koji poseduje to svojstvo, pripada i svakom terminu tog niza. Ova dva principa smo tretirali kao definicije konačnih klasa i progresija ili konačnih nizova, ali kao neprimenljive na neke klase i na neke nizove. Uvideli smo da ovo gledište rešava sve teškoće beskonačnosti i kontinuiteta, izuzev isključivo logičke teškoće u pogledu pojma *svih* klasa. Sa ovim rezultatom smo upotpunili filozofsku teoriju jednodimenzionalnih nizova.

352. Ali, u svim prethodnim diskusijama veliki delovi matematike ostali su nepomenuti. Jedna od generalizacija broja, naime, kompleksni brojevi, bila je potpuno isključena i ni na koji način nisu bili pominjani imaginarni brojevi. Takođe, celokupna geometrija do sada nije figurirala u našim razmatranjima. Ova dva izostavljanja bila su povezana. Nije reč o tome da treba da prihvatimo geometrijsku, to jest, prostornu teoriju kompleksnih brojeva: to bi bilo isto toliko neumesno kao i geometrijska teorija iracionalnih brojeva. Premda sam ovaj deo knjige nazvao *Prostor*, mi ipak ostajemo u oblasti čiste matematike: matematički entiteti će imati izvesne afinitete ka prostoru stvarnog sveta, ali će biti razmatrani kao da ni na koji način ne zavise od tih afiniteta. Geometrija može da se smatra jednom čisto *a priori* naukom ili istraživanjem stvarnog prostora. U ovom drugom smislu, tvrdim da je ona eksperimentalna nauka i da mora biti vođena posredstvom pažljivih merenja. Ali, to nije smisao u kojem ja želim da je razmatram. Kao grana čiste matematike, geometrija je strogo deduktivna, indiferentna prema izboru njenih premisa i prema pitanju da li postoje (u strogom smislu) takvi entiteti kakve njene premise definišu. Mnogi različiti, pa čak i inkonzistentni skupovi premisa vode iskazima koje bismo nazvali geometrijskim, ali svi takvi skupovi imaju jedan zajednički element. Taj element se pregnantno može sumirati tvrđenjem da se geometrija bavi nizovima od više od jedne dimenzije. Pitanje šta mogu biti stvarni termini takvih nizova je za geometriju irelevantno, pošto ona ispituje samo posledice relacija koje ona sama postulira među terminima. Ove relacije su uvek takve da generišu niz od više od jedne dimenzije, ali, koliko mogu da vidim, nemaju nijednu drugu zajedničku tačku. Niz od više od jedne dimenzije nazvaću *višestrukim* nizom: niz od jedne dimenzije biće nazvan *prostim*. Ono što podrazumevam pod dimenzijama, nastojaću da objasnim u toku ove glave. Za sada ću uz anticipaciju dati sledeću definiciju: *geometrija predstavlja izučavanje nizova od dve ili više dimenzija.* Kao što ćemo videti, ova definicija dovodi do toga da kompleksni brojevi formiraju deo predmeta geometrije, pošto oni konstituišu dvodimenzionalni niz, ali to ne pokazuje da kompleksni brojevi na ikoji način logički zavise od stvarnog prostora.

Prethodna definicija geometrije je, nema sumnje, donekle neobična i ostavlja utisak namerne zloupotrebe reči, posebno kod filozofa kantovaca. Međutim, verujem da ona odslikava tačnu sadašnju upotrebu matematičara, mada njima nije neophodno da daju eksplicitnu definiciju svog predmeta. Kako je došlo baš do ovog značenja, može se objasniti kratkom istorijskom retrospektivom koja će takođe ilustrovati razliku između čiste i primenjene matematike.

353. Do devetnaestog veka, geometrija je bila isto što i euklidska geometrija, to jest, izvestan sistem iskaza dedukovanih iz premisa za koje se pretpostavljalo da opisuju prostor u kome živimo. Bavljenje geometrijom bilo je široko rasprostranjeno zato što su rezultati geometrije bili praktično primenljivi u stvarnom svetu (što je, besumnje, značajno za inženjera) i zato što u sebi samima ovaploćuju naučne istine. Ali, kako bismo bili sigurni da je to slučaj, jedna od sledeće dve stvari je neophodna. Ili moramo da budemo sigurni u istinu samih premisa ili moramo da budemo u stanju da pokažemo da nijedan drugi skup premisa ne bi dao rezultate koji bi bili konzistentni sa iskustvom. Prvu od ovih alternativa prihvatili su idealisti, a posebno ju je zastupao Kant. Druga alternativa, grubo uzev, predstavlja poziciju empirista pre neeuklidskog perioda (među koje moramo da uključimo Mila). Ali, javile su se primedbe obema alternativama. Prema kantovskom gledištu, nužno je smatrati sve aksiome samoočiglednim – gledište koje bi pošten čovek teško mogao da proširi na aksiom o paralelama. Otuda je nastalo traganje za verodostojnijim aksiomima koji bi mogli da se proglase za *a priori* istine. Ali, iako su mnogi aksiomi bili predlagani, u sve njih se moglo razumno sumnjati, a traganje je samo vodilo skepticizmu. Druga alternativa – gledište da nikakvi drugi aksiomi ne bi dali rezultate konzistentne sa iskustvom – mogla bi da se testira samo većom matematičkom veštinom koja nedostaje većini filozofa. Prema tome, ovog testa nije bilo sve do Lobačevskog i Boljaja (Bolyai) i njihovog neeuklidskog sistema. Tada je dokazano, sa svom uverljivošću matematičkog dokaza, da bi premise različite od Euklidovih mogle da daju rezultate koji bi u granicama opažanja bili empirijski nerazlučivi od rezultata ortodoksnog sistema. Stoga su empirijski argumenti u prilog Euklidu takođe bili pobijeni. Ali, ovo ispitivanje je proizvelo nov polet među geometrima. Pošto je utvrđeno da poricanje Euklidovog aksioma o paralelama vodi drugačijem sistemu koji je samo-konzistentan i moguće istinit u stvarnom svetu, matematičari su postali zainteresovani za razvijanje posledica koje nastaju iz drugih skupova aksioma, više ili manje sličnih Euklidovim. Stoga je nastao veliki broj geometrija, po pravilu međusobno protivrečnih, ali unutrašnje samo-konzistentnih. Sličnost sa Euklidovom geometrijom koju je zahtevao neki predloženi skup aksioma, postepeno je postajala sve manja, a mogući deduktivni sistemi su sve više ispitivani sami za sebe. Na taj način geometrija je postala (ono što se nekada pogrešno nazivalo) granom čiste matematike, to jest predmet u kome su tvrdnje da takve i takve posledice slede iz takvih i takvih premisa, a ne da entiteti koje premise opisuju aktualno postoje. Drugim rečima, ako bismo Euklidove aksiome nazvali A i ako je P bilo koji iskaz koji A implicira, onda, u geometriji koju je razvio Lobačevski, samo P bi bilo tvrđeno pošto je A tvrđeno. Ali danas, geometar bi samo tvrdio da A implicira P, ostavljajući i A i P sumnjivim. On bi imao i druge skupove aksioma $A_1, A_2, \ldots$ koji impliciraju $P_1, P_2, \ldots$: ove *implikacije* pripadale bi geometriji, ali ne A_1 ili P_1 ili bilo koji drugi aktualni aksiomi i iskazi. Stoga geometrija ne rasvetljava direktno prirodu stvarnog prostora. Ali indirektno, potpunija analiza i znanje o mogućnostima koje proizlaze iz moderne geometrije, bacaju snažno svetlo na naš stvarni prostor. Pored toga, sada je dokazano (što je fatalno po kantovsku filozofiju) da je svaka geometrija strogo deduktivna i da ne upotrebljava bilo koje forme rasuđivanja osim onih koje se primenjuju i u aritmetici i u svim drugim deduktivnim naukama. Moja namera u nastavku će biti da najpre u kratkim crtama pokažem ono što je filozofski značajno u dedukcijama koje konstituišu modernu geometriju, a potom da nastavim sa onim pitanjima u filozofiji prostora koja rasvetljava matematika. Iako ću razmatrati geometrije kao grane čiste matematike, u prvom odeljku ovog dela ću odabrati za diskusiju samo one koje u najvećoj meri rasvetljavaju stvarni prostor ili prirodu matematičkog rasuđivanja. Rasprava o neeuklidskoj geometriji nije ni nužna ni poželjna u jednom opštem pristupu kao što je sadašnji, te stoga o njoj neće biti reči u sledećim glavama.

354. Rekli smo da je geometrija izučavanje nizova koji imaju više od jedne dimenzije. Sada je vreme da definišemo dimenzije i da objasnimo šta podrazumevamo pod višestrukim nizom. Relevantnost naše definicije za geometriju pokazaće se na osnovu činjenice da puka definicija dimenzija vodi dualitetu koji je blisko analogan onom u projektivnoj geometriji.

Uzmimo najpre dve dimenzije. Niz od dve dimenzije nastaje na sledeći način. Uzmimo ovde neku asimetričnu tranzitivnu relaciju P koja generiše niz u_1. Neka svaki termin od u_1 i sam bude jedna asimetrična tranzitivna relacija koja takođe generiše niz. Neka svako polje od P formira prost niz asimetričnih relacija, i neka svaka od njih ima prost niz termina za svoje polje. Onda je klasa u_2 termina koji formiraju polja svih relacija u nizu koji je generisan relacijom P

dvodimenzionalni niz. Drugim rečima, totalno polje klase asimetričnih tranzitivnih relacija koje formiraju prosti niz jeste dvostruki niz. Ali, umesto da polazimo od asimetrične relacije P, možemo da pođemo i od termina. Neka postoji klasa termina u_2 od kojih bilo koji dati termin (sa mogućim jednim izuzetkom) pripada polju jedne i samo jedne određene klase u_1 serijalnih relacija. To znači da ako je x termin od u_2, x je takođe i termin polja neke relacije klase u_1. Zatim, neka u_1 bude neki niz. Onda će u_2 biti dvostruki niz. Izgleda da ovo konstituiše definiciju dvodimenzionalnog niza.

Da bismo dobili tri dimenzije, treba samo pretpostaviti da se sâmo u_2 sastoji od nizova ili od asimetričnih tranzitivnih relacija. Ili, polazeći od termina trodimenzionalnog niza, neka svaki termin neke date klase u_3 pripada jednom i samo jednom nizu (opet sa jednim mogućim izuzetkom koji može da pripada mnogim nizovima) izvesne klase u_2. Neka svaki termin klase u_2 bude termin nekog niza koji pripada klasi nizova u_1, i neka je sama klasa u_1 prost niz. Onda je u_3 trostruki niz ili niz od tri dimenzije. Postupajući dalje, na ovaj način, dobijamo definiciju n dimenzija koja može da se odredi na sledeći način: uzmimo neki niz u_1 čiji su svi termini serijalne relacije. Ako je x_1 neki termin od u_1, a x_2 neki termin polja od x_1, neka x_2 ponovo bude serijalna relacija itd. Nastavljajući ka x_3, x_4 itd., neka je x_{n-1}, ma kako dobijen, uvek relacija koja generiše prost niz. Onda, svi termini x_n koji pripadaju polju neke serijalne relacije x_{n-1} formiraju n-dimenzionalni niz. Ili, da bismo dali definiciju koja polazi od termina: neka je u_n klasa termina od kojih jedan, recimo x_n, pripada polju neke serijalne relacije, recimo x_{n-1}, koja sama pripada određenoj klasi u_{n-1} serijalnih relacija. Neka svaki termin x_n uopšte pripada polju samo jedne serijalne relacije x_{n-1} (sa izuzetkom koji nije potrebno sada razmatrati). Neka u_{n-1} vodi novoj klasi u_n-$_2$ serijalnih relacija tačno na način na koji u_n vodi ka u_{n-1}. Neka se ovako nastavi sve dok ne dosegnemo klasu u_1, i neka je u_1 prost niz. Onda u_n predstavlja niz od n dimenzija.

355. Pre nego što nastavimo dalje, moglo bi biti korisno navesti neka zapažanja o prethodnoj definiciji. Prvo, upravo smo videli da se same nameću alternativne definicije dimenzija koje stoje u relaciji analognoj onome što se naziva dualnost u projektivnoj geometriji. Dokle se ova analogija proteže predstavlja pitanje o kojem ne možemo da raspravljamo sve dok ne ispitamo projektivnu geometriju. Drugo, svaki niz od n dimenzija podrazumeva nizove dimenzija svih manjih brojeva, ali niz od (n-1) dimenzija u opšem slučaju ne implicira niz od n dimenzija. U ovom drugom obliku definicije od n dimenzija, klasa u_{n-1} predstavlja niz od (n-1) dimenzija, i uopšte, ako je m manje od n, klasa u_{n-m} predstavlja niz od (n-m) dimenzija. I u ovom drugom metodu, svi mogući termini x_{n-1} zajedno formiraju niz od (n-1) dimenzija itd. Treće, ako je n konačno, klasa koja je n-dimenzionalna takođe je jednodimenzionalni niz. Ovo može da se ustanovi pomoću sledećih pravila: u klasi u_1 koja predstavlja jedan prost niz, uzmimo da je poredak nepromenjen. U u_2 zadržimo nepromenjenim unutrašnji poredak svakog niza i postavimo taj niz ispred onog koji dolazi pre u_1 i posle onog koji dolazi posle u_1. Tako je u_2 preobraćeno u jedan prost niz. Primenimo isti postupak na u_3 itd. Onda, matematičkom indukcijom, ako je n konačno ili ako je bilo koji beskonačni ordinalni broj, u_n može da se preobrati u prost niz. Ova značajna činjenica koju je Kantor[1] otkrio za konačne brojeve i za ω vrlo je značajna za zasnivanje geometrije. Četvrto, definicija za n dimenzija može da se proširi i na slučaj gde je n prvi transfinitni ordinal ω. Za ovu svrhu neophodno je samo da se pretpostavi da, ma koji konačan broj m da uzmemo, bilo koje u_m će pripadati nekom prostom nizu nizova u_{m+1}, i da tako dobijen niz klasa nizova podleže matematičkoj indukciji zbog čega predstavlja progresiju. Tada je

---

[1] Kantor je dokazao ne samo da prost niz može tako da se formira, već i da, ako n nije veće od ω, konstituenti niza svi imaju isti kardinalni broj, a to je takođe kardinalni broj rezultujućeg niza: to će reći, n-dimenzionalni prostor ima isti kardinalni broj tačaka kao i konačni deo linije. Vidi *Acta Math*., II, str. 314ff.

broj dimenzija ω. Ovaj slučaj pokazuje ono što ne proizlazi tako jasno iz slučaja kada je broj dimenzija konačan, a to je da je broj dimenzija ordinalni broj.

356. Postoji jako puno načina generisanja višestrukih nizova, kao što postoji i puno načina generisanja prostih nizova. Međutim, razmatranje ovih različitih načina nije od velikog značaja, pošto bi se time takoreći samo ponovila diskusija iz Glave XXIV Četvrtog dela. Sa primerima ćemo se sretati u toku našeg ispitivanja različitih geometrija, a ta ispitivanja će pružiti povoljne prilike za testiranje naše definicije dimenzije. Za sada je značajno samo da primetimo da su dimenzije, slično poretku i kontinuitetu, definisane u čisto apstraktnim terminima, bez ikakvog pozivanja na stvarni prostor. Stoga, kada kažemo da prostor ima tri dimenzije, mi mu ne pripisujemo neku ideju koja može da se dobije tek na osnovu prostora, već sprovodimo deo aktualne logičke analize prostora. Ovo će se jasnije pokazati kada budemo primenili dimenzije na kompleksne brojeve, čemu se sada moramo posvetiti.

357. Teorija imaginarnih brojeva ranije je smatrana vrlo značajnom granom matematičke filozofije, ali je izgubila svoj filozofski značaj time što je prestala da bude sporna. Ispitivanje imaginarnih brojeva je u kontinentalnoj Evropi vodilo teoriji funkcija – predmetu za koji uprkos izvanrednom matematičkom značaju, izgleda da nije preterano zanimljiv filozofima. Ali, izvan kontinentalne Evrope, ovo isto ispitivanje je krenulo u apstraktnijem pravcu: vodilo je ispitivanju principa simbolizma, formalnih zakona sabiranja i množenja i opšte prirode kalkulusa. Time se ispoljio slobodniji duh prema običnoj algebri i mogućnosti da se ona posmatra (kao i obična geometrija) kao jedna vrsta roda. To je bio *spiritus movens* za Ser Vilijama Hamiltona, De Morgana, Dževonsa (Jevons) i Persa – kojima, u pogledu rezultata, mada ne i u pogledu motiva, moramo da priključimo Bula i Grasmana. Stoga je filozofija imaginarnih brojeva uronila u daleko prostranije i interesantnije probleme univerzalne algebre[1]. Po mom mišljenju, ovi problemi ne mogu da se obrađuju polazeći od roda i od pitanja: koji su suštinski principi bilo kog kalkulusa? Neophodno je usvojiti induktivniji metod i ispitati različite vrste jednu po jednu. Matematički deo ovog posla je izvrsno obavio gospodin Vajthed: filozofski deo biće preduzet u ovom radu. Mogućnost deduktivne univerzalne algebre često je zasnivana na pretpostavljenom principu *permanencije forme*. Tako se na osnovu ovog principa, na primer, tvrdilo da kompleksni brojevi moraju da se pokoravaju istim zakonima sabiranja i množenja kojima se pokoravaju i realni brojevi. Ali, takav princip zapravo ne postoji. U univerzalnoj algebri naši simboli za operacije poput + ili × označavaju promenljive, pri čemu su hipoteze bilo koje algebre da ti simboli podležu izvesnim propisanim pravilima. Da bi takva algebra bila značajna, nužno je da postoji barem jedna instanca u kojoj su predložena pravila operacija verifikovana. Ali, čak ni ova restrikcija nam ne omogućava da sačinimo bilo koji opšti formalni izraz u pogledu svih mogućih pravila operacije. Stoga princip permanencije forme mora da se smatra naprosto jednom zabludom: operacije koje se razlikuju od aritmetičkog sabiranja mogu da imaju neke ili sve osobine aritmetičkog sabiranja, ali lako mogu da se predlože i operacije kojima nedostaju neka ili sva ta svojstva.

358. Kompleksni brojevi su se najpre pojavili u matematici zahvaljujući algebarskoj generalizaciji broja. Ovaj princip generalizacije glasi: ako je data neka klasa brojeva, potrebno je da se otkriju ili smisle brojevi koji će učiniti rešivom bilo koju jednačinu sa jednom promenljivom čiji koeficijenti su odabrani iz te klase brojeva. Polazeći od pozitivnih celih brojeva, ovaj metod samo pomoću prostih jednačina direktno vodi svim pozitivnim i negativnim racionalnim brojevima. Jednačine konačnih stepena će dati sve takozvane algebarske brojeve, ali da bismo dobili transcendentne brojeve kao što su e i π, potrebne su nam jednačine koje nisu nijednog

[1] Vidi Whitehead, *Universal Algebra*, Cambridge, 1898, posebno knjiga I.

konačnog stepena. U ovom pogledu je algebarska generalizacija inferiorna spram aritmetičke, pošto ova druga daje sve iracionalne brojeve posredstvom uniformne metode, dok ona prva, strogo govoreći, daje samo algebarske brojeve. Ali u pogledu kompleksnih brojeva, stvar stoji drugačije. Nijedan aritmetički problem ka njima ne vodi i oni su potpuno nepodložni aritmetičkoj definiciji. Ali, pokušaj rešavanja jednačina kao što su $x^2 + 1 = 0$ ili $x^2 + x + 1 = 0$ odmah zahteva novu klasu brojeva, pošto u celom domenu realnih brojeva ne može da se pronađe nijedan broj koji bi zadovoljio ove jednačine. Kako bi i ovakvi slučajevi bili pokriveni, algebarska generalizacija definiše nove brojeve pomoću jednačina čiji su oni onda koreni. Pokazano je da ako uzmemo da se ovi novi brojevi pokoravaju uobičajenim zakonima množenja, svaki od njih razvrstava se na dva dela, jedan realan i drugi koji predstavlja proizvod nekog realnog broja i nekog fiksiranog broja nove vrste. Ovaj fiksirani broj bi mogao da se odabere proizvoljno, i uvek se pretpostavljalo da je on jedan od kvadratnih korena od –1. Brojevi koji su tako sastavljeni od dva dela nazivaju se kompleksnim brojevima i pokazano je da nijedna algebarska operacija nad njima ne može da vodi nekoj novoj klasi brojeva. Što je još značajnije, bilo je dokazano da neka dalja generalizacija mora da vodi brojevima koji se ne pokoravaju nekom od formalnih zakona aritmetike[1]. Ali, algebarska generalizacija nije uopšte mogla (a što je zapravo bilo moguće u svakoj prethodnoj fazi) da dokaže da postoje takvi entiteti kao što su oni koji su postulirani. *Ako* jednačine o kojima je reč imaju korene, onda ti koreni imaju takva i takva svojstva; to je sve što nam algebarski metod omogućuje da zaključimo. Međutim, ne postoji nikakav zakon prirode koji čini da svaka jednačina *mora* da ima koren; naprotiv, bitno je da mogu da ukažem na stvarne entitete koji imaju svojstva koja zahteva algebarska generalizacija.

[1] Vidi Stolz, *Allgemeine Arithmetik*, II, odeljak 1, §10.

359. Otkrivanje ovakvih entiteta moglo je da se izvrši tek pomoću teorije dimenzija. Obični kompleksni brojevi formiraju niz od dve dimenzije izvesnog tipa koji se javlja kao koren jednačina u kojima su koeficijenti realni. Kompleksni brojevi višeg reda predstavljaju izvestan tip n-dimenzionalnog niza, ali ovde nema algebarskog problema koji se odnosi na realne brojeve a koji bi oni trebalo da reše. Međutim, činjenica je da nam algebarska generalizacija, kao što smo videli, ne kaže šta su naši novi entiteti niti da li su oni uopšte entiteti: štaviše, ona ohrabruje pogrešno gledište da su oni kompleksni brojevi čiji imaginarni deo nestaje, to će reći realni brojevi. Ova greška je analogna pretpostavci da su neki realni brojevi racionalni, da su neki racionalni brojevi celi, a da su pozitivni celi brojevi identični sa celim brojevima bez znaka. Pošto su sve navedene greške već potanko izložene, čitalac će verovatno biti voljan da prizna odgovarajuću grešku i u ovom slučaju. Onda, nijedan kompleksan broj nije realan broj, ali svaki kompleksan broj predstavlja termin u nekom višestrukom nizu. Ipak, nije vredno truda da posebno ispitujemo obične dvodimenzionalne kompleksne brojeve o kojima su tvrdnje, kao što smo videli, čisto tehničke. Prema tome, odmah ću pristupiti sistemu sa n jedinica. Najpre ću dati uobičajenu čisto formalnu definiciju[1] , potom logičke primedbe na tu definiciju, a zatim i definiciju koju predlažem kao zamenu.

Neka n predstavlja različite entitete, $e_1, e_2, ..., e_n$, koje možemo nazvati elementima ili jedinicama, i neka je svaki takav da može da se asocira sa bilo kojim realnim brojem ili, u posebnim slučajevima, sa bilo kojim racionalnim ili bilo kojim celim brojem. Neka na ovaj način nastaju entiteti $\alpha_r e_r$ pri čemu je α_r broj, a $\alpha_r e_r$ se razlikuje od $\alpha_s e_s$ osim ukolilko nije $r = s$ i $\alpha_r = \alpha_s$. To znači, ako se bilo numerički bilo nenumerički delovi od $\alpha_r e_r$ i $\alpha_s e_s$ razlikuju, onda su celine različite. Dalje, neka postoji način kombinovanja $\alpha_1 e_1, \alpha_2 e_2, ..., \alpha_n e_n$ za svaki skup vrednosti $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ tako da se dobije novi entitet.

---

[1] Vidi Stolz, *ibid.*, II, odeljak 1, §9.

(Klasa čiji su brojevi $\alpha_1 e_1$, $\alpha_2 e_2$, ..., $\alpha_n e_n$ biće jedan takav entitet). Onda je ova kombinacija, koja može da se napiše kao

$$a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 + ... + \alpha_n e_n,$$

kompleksan broj n-tog reda. Raspored sastavnih termina $\alpha_1 e_1$, $\alpha_2 e_2$, ..., $\alpha_n e_n$ može ali i ne mora da bude bitan za definiciju; ali, jedina stvar koja je uvek bitna jeste da bi kombinacija morala da bude takva da razlika u bilo kom broju ili u više brojeva α_1, α_2 ..., α_n osigurava razliku u rezultujućem kompleksnom broju.

360. Prethodna definicija pati od nedostatka da ne ukazuje ni na kakav entitet koji bi bio *jedinstveni* kompleksni broj definisan pomoću skupa realnih brojeva. Neka su data dva realna broja a i b, tada su dva kompleksna broja $a + ib$ i $b + ia$ određena i poželjno je da se takva određenost javi i u opštoj definiciji kompleksnih brojeva bilo kog reda. Ali, e-ovi iz prethodne definicije su promenljive i predloženi kompleksni broj je određen tek kada se specifikuje šta su e i α. Tamo gde, kao u metričkoj geometriji ili u dinamici konačnog sistema čestica, postoje važna značenja e-ova, možemo videti da su i kompleksni brojevi u prethodnom smislu važni. Ali, nijedna posebna interpretacija ne može da nam da onaj *jedinstveni* kompleksni broj koji je asociran sa datim skupom realnih brojeva. Mogli bismo uzeti da je taj jedinstveni kompleksan broj klasa svih takvih entiteta kao što su oni gorenavedeni, za sve moguće vrednosti e-ova. Ali, takva jedna klasa bila bi isuviše opšta da bi služila našim svrhama. Izgleda da je sledeći metod bolji.

Mi želimo da kompleksni broj n-tog reda bude specifikovan nabrajanjem n realnih brojeva u izvesnom poretku, to jest brojeva α_1, α_2, ..., α_n, gde sufiks ukazuje na poredak. Ali, ne možemo da definišemo kompleksan broj kao *niz* od n realnih brojeva zato što isti realni broj može da se ponavlja to jest α_r i α_s ne moraju da budu različiti kada god su r i s različiti. Tako ono što definiše realan broj jeste jedan-mnogo relacija čiji se domen sastoji od realnih brojeva i čiji se konverzni domen sastoji od prvih n celih brojeva (ili, u slučaju kompleksnog broja beskonačnog reda, od svih celih brojeva); jer, sufiks u α_r ukazuje na korelaciju sa celim brojem r. Takve jedan-mnogo relacije mogu da se definišu tako da *budu* kompleksni brojevi i na taj način dobijamo jednu čisto aritmetičku definiciju. Ovaj n-dimenzionalni niz kompleksnih brojeva reda n proizlazi iz raspoređivanja svih kompleksnih brojeva koji se razlikuju samo u pogledu (recimo) α_r u poretku realnih brojeva koji su α_r, od slučaja do slučaja.

Da bi kompleksni brojevi u smislu u kojem ih je definisao Štolc imali bilo kakav značaj mora da postoji neki motiv za uzimanje u obzir skupa termina izabranih iz kontinuuma. Takav jedan motiv može da se nađe u n-dimenzionalnom metričkom prostoru zahvaljujući okolnosti koja je suštinska za korisnost, ali ne i za definiciju kompleksnih brojeva. Neka je data kolekcija entiteta (tačaka) od kojih svaki entitet stoji prema svakom drugom od entiteta $e_1, e_2, ..., e_n$ u numerički merljivoj relaciji (odnosno rastojanju) i neka je svaki entitet definisan isključivo pomoću n relacija u kojima on stoji prema entitetima $e_1, e_2, ..., e_n$. Onda će kompleksni broj a predstavljati jednu od ovih kolekcija entiteta, a elementi $e_1, e_2, ..., e_n$ će sami biti termini te kolekcije[1]. Stoga postoji motiv za razmatranje brojeva poput a, iako je taj motiv u opštem slučaju praktično odsutan[2]. Ali, bitno je da se primeti, a to se podjednako primenjuje na uobičajene kompleksne brtojeve algebre, da naši brojevi nisu čisto aritmetički već da suštinski podrazumevaju pozivanje na pluralitet dimenzija. Tako smo konačno prešli preko domena aritmetike i to je bio moj razlog odlaganja razmatranja kompleksnih brojeva do ove kasne faze.

1 e_1 nije identično sa $1 \times e_1 + 0 \times e_2 + \dots$ Ono prvo je tačka, a ovo drugo je kompleksni broj.

2 U geometrijskim primenama uobičajeno je razmatrati samo *odnose* $\alpha_1 : \alpha_2 : \dots : \alpha_n$ kao relevantne. U ovom slučaju naš niz ima samo (n-1) dimenzija.

Glava XLV

PROJEKTIVNA GEOMETRIJA

361. Zasnivanje geometrije je u novije vreme bilo izloženo trostrukom ispitivanju. Najpre je došao rad neeuklidovaca koji je pokazao da su različiti aksiomi za koje je dugo vremena bilo poznato da su dovoljni za izvesne rezultate, takođe i nužni, to jest da rezultati koji protivreče uobičajenim rezultatima, ali ne protivreče jedni drugima, slede iz negacija tih aksioma. Zatim je došao rad Dedekinda i Kantora koji se ticao prirode kontinuiteta i koji je pokazao neophodnost pažljivog ispitivanja preduslova analitičke geometrije. Naposletku, velika promena je uvedena radom Italijana na zatvorenim nizovima koje smo razmatrali u Četvrtom delu, a na osnovu kojih možemo, ako je dat izvestan tip relacije između *četiri* tačke jedne linije, da uvedemo poredak svih tačaka linije. Rad neeuklidovaca je do danas proizveo verovatno skoro sve modifikacije koje je mogao da proizvede u pogledu zasnivanja, dok je rad Dedekinda i Kantora postao relevantan tek na jednom vrlo razvijenom stadijumu u razvoju geometrije. Nasuprot tome, rad na zatvorenim nizovima, pošto je sasvim nov, još nije univerzalno priznat iako je, kao što ćemo videti u ovoj glavi, u ogromnoj meri uvećao domet čiste projektivne geometrije.

362. U okviru razmatranja u ovom delu neću deliti geometrije, kao što se to po pravilu radi, na euklidsku, hiperboličku, eliptičku itd., mada ću, naravno, priznati ovu podelu i navodiću je kad god je relevantna. Ali, ovo nije tako fundamentalna podela kao ona druga koja se generalno primenjuje unutar svake gorenavedene vrste geometrije i koja odgovara jednoj većoj logičkoj razlici. Gorenavedene vrste se razlikuju ne u pogledu nedefinljivih od kojih polazimo, niti pak u pogledu većine aksioma, već samo u pogledu komparativno malog broja novijih aksioma. Tri vrste koje ću razmatrati razlikuju se u oba pogleda, i u pogledu nedefinljivih i u pogledu aksioma, ali za razliku od prethodne tri vrste, one su grubo govoreći uzajamno kompatibilne. To će reći, ako je data izvesna grupa geometrijskih iskaza koji se odnose na izvestan broj entiteta, više ili manje je proizvoljno koje entitete uzimamo kao nedefinljive, a koje iskaze kao nedokazive. Ali logičke razlike koje proizlaze iz razlika u ovim odabirima vrlo su velike, a sistemi dedukcija kojima različiti odabiri vode moraju da se razmatraju odvojeno.

Sve geometrije se u pogledu toga kako se uobičajeno razvijaju slažu u tome da treba početi od tačaka kao nedefinljivih. To znači da postoji izvestan klasni pojam *tačka* (koji ne mora da bude isti u različitim geometrijama) za koji pretpostavljamo da ima bar dve ili tri ili četiri istance, već prema okolnostima. Dalje istance, to jest druge tačke, proizlaze iz posebnih pretpostavki u tim različitim slučajevima. Tri velika tipa geometrije počinju da se razdvajaju u pogledu prave linije. *Projektivna* geometrija počinje od cele prave linije, to jest ona tvrdi da bilo koje dve tačke određuju izvesnu klasu tačaka koja je takođe određena na osnovu bilo koja druga dva člana te klase. Ako smatramo da je ta klasa određena na osnovu relacije između dve tačke, onda je ta relacija simetrična. S druge strane, ono što ću nazvati *deskriptivnom* geometrijom počinje od jedne asimetrične relacije ili od linije sa smerom koja može da se nazove zrakom; ili pak može da počne od tačaka koje uzimamo kao da određuju prostiranja tačaka između njih. Napsletku, *metrička* geometrija uzima pravu liniju u bilo kom od prethodna dva smisla i dodaje ili drugu relaciju između bilo koje dve tačke, naime, rastojanje koje je veličina, ili pak tretira prostiranja kao veličine. Stoga u odnosu na relacije između dve tačke, treća vrsta geometrije pretpostavlja različite nedefinljive, čemu odgovaraju razlike u pogledu aksioma. Bilo koja od ove tri geometrije, zgodnim izborom aksioma vodiće nekom intendiranom euklidskom ili neeuklidskom prostoru, ali ona prva, kao što ćemo videti, ne može da pruži onoliko iskaza koliko mogu druga ili treća. U ovoj glavi pretpostaviću onaj skup aksioma koji daje najjednostavniju formu projektivne geometrije, i nazvaću svaku kolekciju entiteta koja zadovoljava te aksiome *projektivnim prostorom*. U sledećoj glavi ćemo videti kako se dobija skup entiteta koji formira projektivni prostor od skupa koji formira euklidski ili hiperbolički prostor; sâm projektivni prostor je dotle nerazlučiv od polarne forme eliptičkog prostora. On je definisan, kao i svi matematički entiteti, isključivo na osnovu formalne prirode relacija između njegovih konstituenata, a ne na osnovu toga šta su ti konstituenti po sebi. Stoga ćemo u sledećoj glavi videti da svaka od „tačaka" projektivnog prostora može da bude beskonačna klasa pravih linija u neprojektivnom prostoru. Sve dok „tačke" stoje u odgovarajućem tipu uzajamnih odnosa, definicija je zadovoljena.

363. Projektivna geometrija pretpostavlja klasu entiteta koji su nazvani *tačke* kojima se pripisuju izvesna svojstva[1]. Prvo moraju da postoje barem dve razllčite tačke, recimo *a* i *b.* Ove dve tačke imaju ulogu da odrede izvesnu klasu tačaka, pravu liniju, koju ćemo nazvati *ab*. Ova klasa je određena sa *b* i *a* isto kao što je određena i sa *a* i *b*, to jest, nije relevantan poredak *a* i *b*; osim toga, *a* je (a stoga i *b*) sâmo član te klase. Dalje, ta klasa sadrži barem jednu tačku različitu od *a* i *b*; ako je *c* neka takva tačka, onda *b* pripada klasi *ac* i svaka

[1] U nastavku se uglavnom oslanjam na Pijerija, *I Principii della Geometria di Posizione*, Torino, 1898. Ovo je, prema mom mišljenju, najbolje delo o ovoj tematici.

tačka od *ac* pripada *ab*. Na osnovu ovih pretpostavki sledi[1] da, ako su *c* i *d* bilo koje tačke od *ab*, onda *cd* i *ab* koincidiraju – to će reći, bilo koje dve tačke jedne linije određuju tu liniju, ili dve linije koincidiraju ako imaju dve zajedničke tačke.

Pre nego što nastavimo dalje, razmotrimo za trenutak šta podrazumevamo kada kažemo da dve tačke određuju klasu tačaka. Često se smatralo da ovaj izraz ne zahteva objašnjenje, ali u suštini on nije savršeno precizan. Precizan izraz onoga što se pod njim misli jeste: postoji izvesna određena relacija (recimo *K*) koja važi između bilo kojeg para tačaka i jedne i samo jedne odgovarajuće klase tačaka. Bez neke takve određene relacije ne bi moglo da bude ni reči o tome da dve tačke određuju klasu. Ova relacija *K* može biti poslednja i nedefinljiva i tada su nam potrebna gorenavedena svojstva klase *ab*. Međutim, možemo da dobijemo izvedenu relaciju između dve tačke, recimo *b* i *c*, naime, relaciju kolinearnosti obe te tačke sa nekom datom tačkom *a*. Ova relacija će biti tranzitivna i simetrična, ali će uvek uključivati pozivanje na neki termin različit od termina koji su njeni termini (*b* i *c*). Ovo sugeriše, kada se simplifikuje, da bismo umesto relacije *K* između para tačaka i klase tačaka mogli da imamo relaciju *R* između dve tačke *a* i *b*. Ako je *R* simetrično aliorelativno i tranzitivno u meri u kojoj aliorelativnost to dopušta (to jest ako *aRb* i *bRc* impliciraju *aR*c, osim ako *a* i *c* nisu identični), gorenavedena svojstva prave linije će pripadati klasi termina koji prema *a* stoje u relaciji *R* zajedno sa samim *a.* Ovo gledište deluje jednostavnije od prethodnog, a vodi istim rezultatima. Pošto je gledište po kome je prava linija izvedena iz relacije dveju tačaka jednostavnije, ja ću ga generalno usvojiti. Bilo koje dve tačke *a* i *b* stoga stoje u relaciji R_{ab}; *a* i *c* stoje u relaciji R_{ac}. Ako su R_{ab} i R_{ac} identični, a *b* i *c* različiti, R_{bc} je identično i sa R_{ab} i sa R_{ac}, a ako nisu, nije. Treba primetiti da su prethodna svojstva bilo koje takve relacije *R* ona koja pripadaju disjunkciji asimetrične tranzitivne relacije i njenog konversa – na

[1] Pieri, *op. cit*., §1, prop. 25.

primer, veće ili manje, pre ili kasnije, itd. Sve ove relacije su simetrično aliorelativne i tranzitivne u onoj meri u kojoj njihova aliorelativnost to dopušta. Ali, nisu sve relacije tipa o kojem je reč analizabilne na tranzitivnu asimetričnu relaciju ili na njen konvers, zato što razlika gorenavedenog tipa nije analizabilna. Stoga je pretpostavka da prava linija može da se generiše posredstvom asimetrične relacije i njenog konversa jedna nova pretpostavka karakteristična za ono što ću zvati deskriptivnom geometrijom. Za sada, jedna takva pretpostavka ne bi bila na mestu. Stoga imamo dve nedefinljive, naime, *tačku* i relaciju *R* ili *K*[1]. Ništa drugo se ne zahteva za projektivni prostor.

364. Sledeće što treba razmotriti jeste definicija ravni. Jedna od zasluga projektivne geometrije sastoji se u tome što, za razliku od drugih prostora, prostor projektivne geometrije omogućava vrlo jednostavnu i laku definiciju ravni. Za ovu svrhu treba nam jedan novi aksiom, naime: ako su *a* i *b* dve različite tačke, onda postoji barem jedna tačka koja ne pripada *ab*. Neka to bude *c*. Tada je ravan klasa tačaka koje leže na bilo kojoj liniji određenoj tačkom *c* i bilo kojom tačkom *x* od *ab*. To znači da, ako je *x* bilo koja tačka od *ab*, a *y* bilo koja tačka od *cx*, onda je *y* tačka ravni *cab*; a ako je *y* tačka ravni *cab*, onda postoji neka tačka *x* u *ab* takva da je *y* tačka od *cx*. Treba primetiti da se ova definicija ne primenjuje u slučaju euklidske ili hiperboličke ravni, pošto u njima dve linije mogu da se ne seku. Izuzimanje euklidskog i hiperboličkog prostora proizlazi iz sledećeg aksioma[2]: „Ako su *a*, *b* i *c* tri nekolinearne tačke, a *a*’ tačka od *bc* različita od *b* i *c*, a *b*’ tačka od *ac* različita od *a* i *c*, onda postoji zajednička tačka *aa*’ i *bb*’“. Pomoću ovog aksioma možemo da dokažemo da je ravan *cab* ista kao ravan *abc* ili *bac*, i uopšte da, ako su *d*, *e* i *f* bilo koje tri

[1] U Glavi XLIX videćemo da su sami ovi pojmovi koje ovde privremeno ostavljamo nedefinisanim, promenljivi članovi definljivih klasa.

[2] Pieri, *op. cit*., §3, str. 9.

nekolinearne tačke od *abc*, ravan *def* koincidira sa ravni *abc*; takođe možemo da pokažemo da se bilo koje dve linije u ravni seku.

365. Sada možemo da pređemo na harmonijski red i na fon Štautovu kvadrilateralnu konstrukciju. Neka su date tri kolinearne tačke *a*, *b* i *c* i uzmimo bilo koje dve tačke *u* i *v* kolinearne sa *c*, ali ne takve da se nalaze na *ab*. Konstruišimo tačke preseka *au.bv* i *av.bu*; povežimo ove tačke i neka se linija koja ih spaja susreće sa *ab* u tački *d*. Ova konstrukcija se naziva kvadrilateralna konstrukcija. Ako sada pretpostavimo da izvan ravni *abu* postoji barem jedna tačka, možemo da dokažemo da je tačka *d* nezavisna od *u* i *v* i da je jedinstveno određena tačkama *a*, *b* i *c*. Tačka *d* se naziva harmonikom od *c* s obzirom na *a* i *b*, a za četiri tačke se kaže da formiraju harmonijski red. Jedinstvenost[1] ove konstrukcije – čiji dokaz, kao što se može primetiti, zahteva tačku izvan ravni konstrukcije[2] – predstavlja fundamentalni iskaz projektivne geometrije. To nam daje jednu relaciju koja može da važi između četiri tačke jedne linije i koja je, kada su dve date, jedan-jedan s obzirom na druge dve. Ako označimo „*c* i *d* su harmonici s obzirom na *a* i *b*“ sa $cH_{ab}d$, značajna su sledeća svojstva ove relacije: (1) $cH_{ab}d$ implicira $dH_{ab}c$ to jest H_{ab} je simetrično; (2) $cH_{ab}d$ implicira $aH_{cd}b$ to jest relacija parova *ab* i *cd* je simetrična; (3) $cH_{ab}d$ implicira da su *c* i *d* različite tačke, to jest da je H_{ab} aliorelativno. Ovo poslednje svojstvo je nezavisno od drugih i mora da se uvede aksiomom[3].

---

[1] Dokaz jedinstvenosti kvadrilateralne konstrukcije može se pronaći u svakom udžbeniku projektivne geometrije, na primer, u Kremoninom (L. Cremona, Oxford, 1893), glava VIII.

[2] Dokaz da ovaj iskaz zahteva tri dimenzije lako se izvodi iz Hilbertove teoreme iz *Grundlagen der Geometrie*, str. 51 (Gauss-Weber Festschrift, Leipzig, 1890).

[3] Vidi Fano, *Giornale di Matimatiche*, Vol. 30; Pieri, *op. cit.*, §4, str. 17 i Apendiks. Fano je dokazao nužnost ovog aksioma, na jedini konkluzivan način, konstrusanjem sistema koji zadovoljava sve prethodne aksiome ali ne i ovaj aksiom. Otkriće nužnosti ovog aksioma dugujemo Fanu. Jednostavniji ali ekviva-

Pošto je dobijen harmonijski red, možemo nastaviti u dva različita pravca. Možemo da posmatramo harmonijsku relaciju kao relaciju dva para tačaka: stoga, držeći jedan par fiksiranim, dobijamo ono što se naziva involucija. Ili, možemo da posmatramo harmonijsku relaciju kao u simbolu $cH_{ab}d$ kao relaciju između dve tačke koja pretpostavlja pozivanje na druge dve. Na ovaj način, držeći *a*, *b* i *c* fiksiranim, dobijamo tri nove tačke *d*, *e* i *f* na liniji *ab* posredstvom relacija $cH_{ab}d$, $aH_{bc}e$, $bH_{ac}f$. Svaka od njih može da se upotrebi sa dve prethodne tačke tako da određuje četvrtu itd. Ovo nas vodi onome što Mebijus (Möbius)[1] naziva *mrežom* i formira metod kojim Klajn (Klein)[2] uvodi projektivne koordinate. Ova konstrukcija nam takođe daje i metod definisanja harmonijskog odnosa. Ova dva pravca u kojima projektivna geometrija može da se razvija moraju odvojeno da se prate. Ja ću početi od prvog pravca.

Involuciju definišemo pomoću harmonijske relacije. Involucija se sastoji od svih parova tačaka koje su harmonijski konjugati s obzirom na dve fiksirane tačke[3]. Drugim rečima, ako su *a* i *b* dve fiksirane tačke, involucija je sastavljena od svih parova tačaka *x*, *y* takvih da $xH_{ab}y$. Ako su date četiri tačke, *x*, *y*, *x*' i *y*', može ali ne mora da se desi da postoje dve tačke *a* i *b* takve da $xH_{ab}y$ i $x'H_{ab}y'$. Mogućnost nalaženja takvih tačaka *a* i *b* konstituiše izvesnu relaciju *x*, *y* prema *x*', *y*'. Jasno je da ta relacija ponekad važi zato što ona važi kada su *x* i *y* identični sa *x*' odnosno *y*'. Takođe je jasno da ona ponekad ne važi; jer, ako su *x* i *y* identični ali ne i *x*' i *y*', onda relacija nije

---

lentan aksiom jeste da naš prostor sadrži barem jednu liniju na kojoj postoji više od tri tačke.

1 *Barycentrischer Calcul*, Odeljak II, Glava VI.

2 *Math. Annalen*, 4, 6, 7, 37; *Vorlesungen über nicht-Euklidische Geometrie*, Götingen, 1893, Vol. I, str. 308ff.

3 U nastavku će biti reči samo o involucijama sa realnim dvostrukim tačkama.

moguća. Pijeri[1] je pokazao kako pomoću izvesnih aksioma ova relacija sa četiri termina može da se upotrebi prilikom podele prave linije na segmente s obzirom na neke njene dve tačke i da generiše poredak svih tačaka na liniji. (Pre svega treba imati na umu da u projektivnoj geometriji tačke neke linije nemaju poredak). Ovaj projektivni poredak je dobijen na sledeći način.

367. Ako su date bilo koje tri različite tačke a, b i c na liniji, razmotrimo klasu tačaka x takvu da i a i c i b i x svi predstavljaju harmonijske konjugate s obzirom na neki par tačaka y i y' – drugim rečima, a i c i b i x predstavljaju parove u involuciji čije su dvostruke tačke y i y'. Ovde su pretpostavljene promenljive y i y': to će reći, ako bilo koje takve tačke mogu da se nađu, x mora da pripada klasi o kojoj je reč. Ta klasa sadrži tačku b, ali ne i tačke a ili c. Nazovimo je segmentom (*abc*). Označimo relaciju b prema x (pri čemu su a i c fiksirani) sa $bQ_{ac}x$. Tada je Q_{ac} simetrično, a $bQ_{ac}x$ implicira $aQ_{bx}c$. Ovde imamo relaciju četiri tačke iz koje će, kao što smo videli u Glavi XXIV Četvrtog dela, proizaći poredak ako su izvesni dodatni aksiomi zadovoljeni. Tri takva neophodna aksioma formulisao je Pijeri na sledeći način.

(1) Ako je d na liniji ab ali ne pripada segmentu (*abc*) i ne koincidira sa a ili sa c, onda d mora da pripada segmentu (*bca*). [Ako d koincidira sa c, onda već znamo da d pripada segmentu (*bca*). Ovaj slučaj je stoga izuzet iz aksioma da bi se izbegla suvišnost pretpostavki]. Na osnovu ovog aksioma, ako su a, b, c i d različite tačke na liniji, moramo da imamo ili $bQ_{ac}d$ ili $cQ_{ab}d$. Sledi da moramo da imamo ili $bQ_{ac}d$ ili $aQ_{bc}d$. Stoga, barem dve Q-relacije važe između bilo koje četiri različite kolinearne tačke. (2) Ako su a, b i c različite kolinearne tačke, a d tačka koja pripada i segmentu (*bca*) i segmentu (*cab)*, onda d ne može da pripada segmentu (*abc*). To će reći, od tri segmenta kojima d uopšte može da pripada, ono nikada ne može da

[1] *Op. cit.*, §§5, 6, 7. Pijerijev metod je po svoj prilici već predložio i fon Štaut. Cf. *Geometrie der Lage*, §16, naročito br. 216.

pripada više nego dvoma. Odavde i iz prethodnog aksioma proizlazi da, ako je *d* različito od *a*, *b* i *c*, onda *d* pripada dvoma i samo dvoma od tri segmenta definisanih sa *a*, *b* i *c*. (3) Ako su *a*, *b* i *c* različite kolinearne tačke, a *d* tačka različita od *b* segmenta (*abc*), a *e* tačka segmenta (*adc*), onda je *e* tačka segmenta (*abc*). (Ovde se uslov da *d* mora da bude drugačije od *b* ponovo zahteva samo kako bi se izbegla suvišnost, a ne radi istinitosti aksioma). Pomoću Q, ovaj aksiom izražava da $bQ_{ac}d$ i $dQ_{ac}e$ impliciraju $bQ_{ac}e$; to će reći, Q_{ac} je tranzitivno. Već znamo da je Q_{ac} simetrično. Sada pomoću ove relacije možemo da dokažemo da su sve tačke ove linije izuzev *a* i *c* podeljene u dve klase koje možemo da nazovemo $(ac)_1$ i $(ac)_2$. Svake dve tačke u istoj klasi stoje u relaciji Q_{ac} u kojoj svake dve tačke iz različitih klasa ne stoje. Ova podela na dve klase proizlazi iz činjenice da ako nemamo $bQ_{ac}d$ niti pak $dQ_{ac}e$ (pri čemu su *b*, *d* i *e* različite tačke od *a* i *c*), onda imamo $bQ_{ac}e$. Drugim rečima, Q_{ac} ima formalna svojstva istovetnosti znaka i deli liniju na dve klase, baš kao što istovetnost znaka deli brojeve na pozitivne i negativne.

Suprotnost od Q_{ac} koju ću označiti sa T_{ac} odgovara na sličan način razlici znaka. T_{ac} ne označava puku negaciju od Q_{ac} već samo ukazuje na pripadnost različitim segmentima. To će reći, $bT_{ac}d$ znači da *d* ne koincidira sa *a* ili *c* već da leži na liniji *ac* ali ne i na segmentu (*abc*). Tada $bT_{ac}d$ možemo uzeti kao da znači da su *b* i *d* razdvojeni sa *a* i *c*. To je relacija koja ima formalna svojstva razdvajanja parova koja su navedena u Glavi XXIV Četvrtog dela. Ako su *a*, *b*, *c*, *d* i *e* pet različitih tačaka na jednoj pravoj liniji, onda *T*-relacija ima sledeća svojstva. (1) $bT_{ac}d$ je ekvivalentno sa $dT_{ac}b$, $aT_{bd}c$, $cT_{bd}a$, $cT_{db}a$ itd. (2) Važi jedna i samo jedna od tri relacije $aT_{bc}d$, $aT_{bd}c$ i $aT_{cd}b$. (3) $dT_{ac}b$ implicira $dT_{ac}e$ ili $eT_{ac}b$[1].

---

[1] Ovo poslednje svojstvo pruža instancu (takoreći jedinu koja je meni poznata) gde se Persovo relativno sabiranje pojavljuje izvan algebre relativnih. „$dT_{ac}e$ ili $eT_{ac}b$“ predstavlja relativan zbir od T_{ac} i T_{ac} ako su *d*, *e* i *b* promenljive. Ovo svojstvo formalno proizlazi iz tretiranja T_{ac} kao negacije tranzitivne relacije Q_{ac}.

Upoređivanjem gorenavedenih svojstava T sa svojstvima razdvajanja parova može se videti da T vodi zatvorenom nizu (u smislu Glave IV), to jest nizu u kojem postoji prvi termin, ali je taj prvi termin proizvoljan. Definiciju generišuće relacije niza (koja pretpostavlja, kao i u opštem slučaju, tri fiksirane tačke) formulisao je Pijeri: s obzirom na prirodni poredak *abc*, *a* prethodi svakoj drugoj tački na toj liniji; *c* prethodi svakoj tački *d* koja ne pripada (*abc*) i koja ne koindicira sa *a* ili *c*, to jest svakoj tački *d* takvoj da $dT_{ac}b$; opšta tačka *d* prethodi opštoj tački *e* ako je $dQ_{ac}b$ i $eQ_{ad}c$ ili ako je $dT_{ac}b$ i $eT_{ad}c$, to jest ako *d* pripada segmentu (*abc*), a *e* segmentu (*acd*) ili ako su *b* i *d* razdvojeni sa *a* i *c* i ako su, slično tome, *c* i *e* razdvojeni sa *a* i *d*. Tada se može pokazati da od bilo koje dve tačke linije jedna prethodi drugoj i da je ta relacija tranzitivna i asimetrična, te otuda sve tačke na liniji stiču poredak.

Pošto smo sada dobili poredak među našim tačkama, možemo uvesti aksiom kontinuiteta kojem Pijeri[1] daje formu analognu onoj Dedekindovog aksioma, naime: ako je neki segment (*abc*) podeljen na dva dela *h* i *k* tako da s obzirom na poredak *abc* svaka tačka od *h* prethodi svakoj tački od *k*, dok i *h* i *k* sadrže barem jednu tačku, onda u (*abc*) mora da postoji barem jedna tačka *x* takva da svaka tačka od (*abc*) koja prethodi *x* pripada *h*, a svaka tačka od (*abc*) koja sledi iza *x* pripada *k*. Iz ovog aksioma sledi da svaka beskonačna klasa sadržana u (*abc*) i koja nema poslednji (ili prvi) termin ima granicu koja je ili tačka od (*abc*) ili tačka *c* (ili *a*); a lako je dokazati da, kada su *h* i *k* dati, onda mora da postoji samo jedna takva tačka kao što je *x* u ovom aksiomu.

Posredstvom projektivnog segmenta lako je definisati trouglove i četvorouglove. Tri tačke određuju četiri trougla koji među sobom sadrže sve tačke ravni i nemaju nijednu zajedničku tačku osim uglova. Možemo takođe da definišemo harmonijske transformacije i da

[1] *Op. cit.*, §9, str. 7.

dokažemo njihova svojstva bez nekog dodatnog aksioma[1]. Samo još jedan aksiom je potreban kako bismo upotpunili našu geometriju, naime: ravan i linija koja se ne nalazi u toj ravni uvek imaju zajedničku tačku. Ovo je jednako aksiomu o tri dimenzije. Ništa se ne menja u onom što prethodi negiranjem ovog aksioma i prelaženjem na prostor od n dimenzija ili od beskonačno dimenzija. Ovo drugo zapravo zahteva manje aksioma od prostora od tri dimenzije[2].

368. Ispitajmo sada drugi pravac u kojem projektivna geometrija može da se razvija, a u kojem se polazi od tri fiksirane tačke na liniji, i ispitajmo sve tačke koje mogu da se dobiju od te tri sukcesivnim kvadrilateralnim konstrukcijama. Ovde se ne zahteva, kao što se zahtevao u prethodnom pravcu, nikakav novi aksiom, ali javlja se jedno odgovarajuće ograničenje u pogledu dobijenih rezultata. Kako bismo najpotpunije razvili projektivnu geometriju, moramo da kombinujemo rezultate u oba pravca.

Ograničavajući se, za početak, na jednu pravu liniju, pogledajmo kako se konstruiše mreža i kako se uvode projektivne koordinate. Označavajući sa $aH_{bc}d$ kao i ranije iskaz „a i d su harmonijski konjugati s obzirom na b i c“, možemo pomoću kvadrilateralne konstrukcije, kada su date a, b i c, odrediti tačku d koja jedina zadovoljava ovaj iskaz. Zatim, konstruišemo tačku e za koju važi $bH_{cd}e$, a onda i tačku f za koju važi $dH_{ce}f$, tačku g za koju važi $eH_{cf}g$ itd. Na ovaj način dobijamo progresiju tačaka na liniji, takvu da svake tri uzastopne tačke zajedno sa c formiraju harmonijski red. Na osnovu naše prethodne definicije segmenta, sve ove tačke će pripadati segmentima (abc) i (bca). Možemo da pobrojimo ove tačke, počinjući sa a, 0, 1, 2, ..., n, ... Pošto c ne pripada progresiji, njoj možemo da pridodamo broj ∞[3]. Razmotrimo zatim, tačke dobijene na sledeći način.

---

[1] To može da se pronađe kod Pijerija, *loc. cit.,* §§8, 10.

[2] Pieri, §12.

[3] Ne smemo da pridodamo tački c određeni broj ω pošto ne možemo da pretpostavimo, bez dodatnih aksioma, da je c granica naše progresije. Zapravo,

Neka je *d*' takvo da važi $d'H_{ab}c$, neka je [*e*' takvo da važi] $e'H_{ad'}b$, [neka je *f*' takvo da važi] $f'H_{ae'}d'$ itd. Tako dobijamo novu progresiju tačaka, takvu da svake tri uzastopne tačke zajedno sa *a* formiraju harmonijski red, i sve pripadaju segmentima (*abc*) i (*cab*). Ovim tačkama pripišimo redom brojeve $1/n$. Slično možemo da konstruišemo i progresiju koja pripada dvama segmentima (*cab*) i (*bca*) i da im pripišemo negativne cele brojeve. Nastavljajući na sličan način sa bilo kojom tako dobijenom trijadom tačaka, možemo da dobijemo sve više tačaka. Princip koji smo usvojili za pripisivanje brojeva tačkama (što je princip koji, sa našeg sadašnjeg stanovišta, nema nikakav drugi motiv osim pogodnosti) sledeći je: ako su *p*, *q* i *r* brojevi pripisani trima već konstruisanim tačkama, a *s* broj koji mora da se pripiše harmonijskom konjugatu (koji je pretpostavljen a ne prethodno konstruisan) *q*-tačke s obzirom na *p*-tačku i *r*-tačku, onda važi $\frac{p-q}{r-q}\Big/\frac{p-s}{r-s}$ -1. Na ovaj način možemo da pronađemo jednu i samo jednu tačku naše linije za svaki racionalni broj, bilo pozitivan ili negativan[1]. Tako dobijamo jedan prebrojivi beskrajni kompaktni niz tačaka linije. Da li će to biti sve tačke naše linije ili ne, ne možemo da odlučimo bez nekog dodatnog aksioma. Ako naša linija treba da bude kontinuirani niz ili kolekcija moći kontinuuma, onda moramo da pretpostavimo tačke koje ne mogu da se dobiju kvadrilateralnim konstrukcijama, koliko god često da se ponavljaju, a koje polaze od tri data elementa. Ali, pošto je definicija našeg prostora opcionalna, onda možemo, ukoliko želimo, da se zadovoljimo sa racionalnim prostorom i da u tu svrhu uvedemo aksiom da sve tačke naše linije mogu da se dobiju od tri date tačke.

369. Pre nego što nastavimo dalje, bilo bi poželjno da ukažemo na jednu logičku grešku koja vrlo lako može da se počini, a koju je,

---

sve dok isključujemo Pijerijeva tri gore navedena aksioma ne znamo, za početak, da *c* stoji u nekoj ordinalnoj relaciji sa terminima naše progresije.

[1] O tome vidi Klein, *Vorlesungen über nicht-Euklidische Geometrie*, str. 338ff., gde mogu da se pronađu i dokazi.

mislim, počinio čak i sam Klajn[1]. Sve dok se Pijerijeva tri gorenavedena aksioma ne pretpostave, naše tačke nemaju poredak već nešto što proizlazi iz mreže čiju konstrukciju smo upravo izložili. Stoga, samo racionalne tačke (to jest one koje, polazeći od tri date tačke, imaju racionalne koordinate) mogu uopšte da imaju poredak. Ako postoje neke druge tačke, onda nema smisla u kojem one mogu da budu granice niza racionalnih tačaka, niti ikakvog razloga da im se pripišu iracionalne koordinate. Jer i granica i niz koji ona ograničava moraju da pripadaju nekom nizu, ali u tom slučaju racionalne tačke formiraju celinu niza. Stoga, druge tačke (ako ih uopšte ima) ne mogu da se pripišu kao granice nizu racionalnih tačaka. Zamisao da to može da se učini proističe iz puke navike zbog koje pretpostavljamo da sve tačke linije formiraju niz, a da se ne tvrdi eksplicitno bilo to bilo nešto tome ekvivalentno kao aksiom. I zaista, kao što je utvrđeno da nizovi racionalnih brojeva zapravo nemaju granicu osim kada se desi da je imaju, tako nizovi tačaka koje mogu da se dobiju kvadrilateralnom konstrukcijom neće imati granice *qua* termini niza dobijenog iz kvadrilateralne konstrukcije, osim kada se desi da imaju granicu unutar tog niza, to jest kada njihove koordinate imaju racionalnu granicu. Ovde je krajnje poželjno uvesti Pijerijeva tri aksioma na osnovu kojih *sve* tačke jedne linije stiču poredak. Videćemo da je u prirodnom poretku *cab*, poredak racionalnih tačaka koji proizlazi iz Pijerijevih aksioma isti kao i poredak njihovih koordinata pripisanih prema gorenavedenom principu[2]. Stoga treba samo da pretpostavimo da svi beskonačni nizovi racionalnih tačaka imaju granice kao delovi Pijerijevih nizova, i da su sve tačke ili racionalne ili da su granice racionalnih nizova, kako bi se pokazalo da je naša prava linija kontinuirana u Kantorovom smislu. U tom slučaju neracionalnim

---

1 Na primer, *op. cit*., str. 344.

2 Tu postoji jedan izuzetak da *c* dolazi poslednje u redu kvadrilateralnih konstrukcija, a prvo u Pijerijevom redu. Ovo može da se popravi jednostavnim postupkom, pridodavanjem tački *c* koordinate $-\infty$ umesto ∞.

tačkama pridodaćemo iracionalne brojeve koji odgovaraju nizu koji takve tačke ograničavaju.

370. Vraćajući se sada na kvadrilateralnu konstrukciju, definišemo *anharmonijski odnos* četiri tačke čije su koordinate p, q, r i s kao broj $\frac{p-q}{r-q}\Big/\frac{p-s}{r-s}$. Može se pokazati da je ovaj broj nezavisan od izbora naše tri prvobitne tačke a, b i c. On izražava niz kvadrilateralnih konstrukcija koji je neophodan kako bi se dobilo s kada su p, q i r dati, i tako izražava čisto projektivnu relaciju četiri tačke. Na osnovu uvođenja iracionalnih tačaka na upravo objašnjen način, sledi da *bilo koje* četiri tačke na liniji imaju anharmonijski odnos. (Ovo nije moguće dokazati bez Pijerijeva tri aksioma ili nekog njihovog ekvivalenta). Anharmonijski odnos ostaje nepromenjen bilo kakvom linearnom transformacijom; to će reći, zamenjivanjem svake tačke x tačkom čija je koordinata $(\alpha x + \beta)/(\gamma x + \delta)$, gde su α, β, γ i δ bilo koji fiksirani brojevi takvi da $\alpha\delta - \beta\gamma$ nije nula. Odavde napokon možemo da napredujemo ka onome što je ranije predstavljalo početak projektivne geometrije, naime, ka operaciji projekcije čemu sama ta geometrija duguje i ime.

Možemo pokazati da ako su p i r harmonijski konjugati s obzirom na q i s, a p, q, r i s priključeni nekoj tački o, i ako op, oq, or i os seku neku liniju u tačkama p', q', r' i s', onda su p' i r' harmonijski konjugati s obzirom na q' i s'. Stoga možemo da pokažemo da svi anharmonijski odnosi ostaju nepromenjeni ovom operacijom. Slično tome, ako je l neka prava linija nekoplanarna sa $pqrs$, a ravni lp, lq, lr i ls seku bilo koju liniju nekoplanarnu sa l u p', q', r' i s', onda će ove četiri tačke imati isti anharmonijski odnos kao i p, q, r i s. Ove činjenice mogu se izraziti tako što se kaže da anharmonijski odnos ostaje nepromenjen projekcijom. Odavde možemo da nastavimo sa dodeljivanjem koordinata bilo kojoj tački u prostoru[1].

371. Počnimo sa ravni i uzmimo tri tačke a, b i c, koje se ne nalaze na jednoj pravoj liniji i pridodajmo koordinate na gore opisani

---

[1] Vidi Pasch, *Neuere Geometrie*, §22; Klein, *Math. Annalen* 37.

način tačkama od *ab* i *ac*. Neka je p bilo koja tačka ravni *abc,* ali ne na liniji *bc*. Onda, ako *cp* seče *ab* u p_1 i *bp* seče *ac* u p_2, a x i y su koordinate od p_1 odnosno od p_2, neka su (x, y) dve koordinate od p. Na ovaj način sve tačke ravni koje nisu na *bc* stiču koordinate. Da bi se izbegla ova restrikcija, uvedimo tri homogene koordinate na sledeći način. Uzmimo bilo koje četiri tačke a, b, c i e u ravni gde nijedna od njih tri nisu kolinearne; neka *ae* seče *bc* u e_1, *be* seče *ca* u e_2, *ce* seče *ab* u e_3. Pripišimo koordinate tačkama pravih *bc*, *ca* i *ab*, kao i ranije, davanjem koordinate 1 svakoj od tačaka e_1, e_2, e_3, a u *ab* davanjem koordinate 0 tački a i koordinate ∞ tački b, i slično za druge strane. Umesto pojedinačne koordinate x bilo koje tačke od *bc* uvedimo homogene koordinate x_2, x_3 gde $x = x_2/x_3$. Ako je p bilo koja tačka ravni *abc*, neka *ap* seče *bc* u p_1, *bp* seče *ca* u p_2, a *cp* seče *ab* u p_3. Neka su x_2 i x_3 homogene koordinate od p_1, a x_3 i x_1 od p_2; onda će x_1 i x_2 biti koordinate od p_3[1]. Stoga možemo da prirpišemo x_1, x_2 i x_3 kao homogene koordinate tački p. Na sličan način možemo da pripišemo četiri homogene koordinate bilo kojoj tački prostora. Takođe možemo da pripišemo koordinate linijama kroz tačku ili ravnima kroz liniju, ili svim ravnima prostora posredstvom anharmonijskih odnosa linija i ravni[2]. Lako je pokazati da s obzirom na tačkaste koordinate ravan ima linearnu jednačinu, a linearna jednačina predstavlja ravan, a da s obzirom na ravanske koordinate tačka ima linearnu jednačinu, a linearna jednačina predstavlja tačku. Na taj način obezbeđujemo sve prednosti analitičke geometrije. Odavde nadalje ovaj predmet postaje čisto tehnički i prestaje da ima filozosfki značaj.

372. Sada je vreme da se zapitamo koji delovi geometrije na koju smo navikli nisu uključeni u projektivnu geometriju. Prvo, niz tačaka na liniji dobijen od četvoroterminske relacije zatvoren je u smislu koji smo imali u vidu u Četvrtom delu. To će reći, poredak tačaka

---

[1] Vidi Pasch, *loc. cit*.

[2] Anharmonijski odnos četiri linije kroz tačku ili četiri ravni kroz liniju jeste odnos četiri tačke u kojem one susreću bilo koju liniju.

zahteva da tri fiksirane tačke budu date pre nego što on bude definisan. To praktično znači da, ako su date samo tri tačke na liniji, nijedna od njih nije između druge dve. Ovo je definicija razlike između projektivnog prostora i euklidskog i hiperboličkog prostora. Ali, lako je preuveličati ovu razliku. U Četvrtom delu smo videli da svuda gde je niz generisan dvoterminskom relacijom, tamo takođe postoji i četvoro-terminska relacija razdvajanja parova pomoću koje možemo da generišemo zatvoreni niz koji se sastoji od istih termina. S obzirom na ovo, razlika ne prozivodi inkonzistenciju. Euklidski i hiperbolički prostori sadrže ono što sadrži i projektivni prostor, i još ponešto uz to. Videli smo da relacija kojom je projektivna prava linija definisana ima formalna svojstva od „P ili $\breve{P}$“, gde je P tranzitivno i asimetrično. Ako je data relacija zaista ovog oblika, imaćemo otvoreni niz s obzirom na P i jedna od tri kolinearne tačke će biti između druge dve. Treba primetiti da u slučajevima kada se prava linija uzme kao suštinski zatvorena, kao u eliptičkom prostoru, *između* mora da bude izuzeto u slučajevima kada su date samo tri tačke. Stoga eliptički prostor u ovom pogledu nije samo konzistentan sa projektivnim aksiomima već ne sadrži ništa više od onoga što ti aksiomi pružaju.

Prava inkonzistencija nastaje između projektivne i euklidske i hiperboličke geometrije onda kada pređemo na ravan. U projektivnom prostoru bilo koje dve linije u ravni se seku; u euklidskoj i hiperboličkoj geometriji to se ne dešava. U eliptičkoj geometriji bilo koje dve linije u ravni se seku, ali u antipodalnim formama one se dvaput seku. Stoga samo polarne forme u potpunosti zadovoljavaju projektivne aksiome. Analogna razmatranja se primenjuju i na preseke dve ravni, ili linije i ravni. Ove razlike čine projektivnu definiciju ravni neprimenljivom na euklidski i hiperbolički prostor i čini teoriju ovih prostora daleko komplikovanijom od teorije projektivnog prostora.

Naposletku, u metričkoj geometriji se pretpostavlja ili da dve tačke stoje u kvantitativnoj relaciji koja se zove rastojanje, koja je određena kada su te tačke date, ili da prostiranja zadovoljavaju aksiome na osnovu kojih njihova deljivost postaje numerički merljiva. Na ovom mestu se čak i eliptički prostor razlikuje od projektivnog prostora, mada se ta razlika tiče prirode sabiranja, a ne inkonzistencije. Ali, ova problematika ne može da se razmatra sve dok ne ispitamo metričku geometriju, jer ćemo tek tada biti u položaju da uvidimo i sve koristi ispitivanja projektivne teorije rastojanja.

373. Možemo reći još nešto o principu dualiteta. Ovim principom se tvrdi, za tri dimenzije, da klasa ravni takođe predstavlja jedan projektivni prostor, pri čemu je presek dve ravni kao i ranije prava linija, a presek tri nekolinearne ravni postaje tačka. Slično tome, za *n* dimenzija, projektivni prostor se dobija iz svih potklasa od (*n*-1) dimenzija. Takav dualitet, kao što smo videli u Glavi XLIV, uvek pripada *n*-dimenzionalnom nizu kao takvom. Moglo bi da deluje (mada je to samo pretpostavka) da projektivna geometrija koristi najmanje aksioma na osnovu kojih je moguće generisati niz od više od dve dimenzije, te da projektivna dualnost proizlazi iz dualiteta dimenzija uopšte. Drugi prostori imaju dodatna svojstva pored onih koja su potrebna kako bi se oni učinili *n*-dimenzionalnim nizovima, tako da je u takvim prostorima dualnost podložna različitim ograničenjima.

Glava XLVI

DESKRIPTIVNA GEOMETRIJA

374. Predmet koji sam nazvao deskriptivna geometrija po pravilu se ne razlikuje strogo od projektivne geometrije. Ova dva termina, kao i termin „geometrija položaja“, uobičajeno se koriste kao sinonimi. Ali deluje neprikladno uključiti u projektivnu geometriju bilo koje svojstvo koje se ne menja projekcijom, a uvođenjem jednog takvog svojstva želim da definišem predmet kojim ćemo se baviti u ovoj glavi. Videli smo da u prokjektivnom prostoru tri tačke na liniji nisu takve da je tačno određena jedna od njih *između* druge dve. Najprostiji mogući iskaz koji uključuje *između* u projektivnoj geometriji zahteva četiri tačke, i on glasi: „Ako su *a*, *b* i *c* različite kolinearne tačke, a *d* je na *ac* ali ne pripada segmentu (*abc*), niti pak koindicira sa *a* ili *c*, onda je *c* s obzirom na poredak *abc* između *b* i *d*“. Kada razmislimo o tome da definicija segmenta (*abc*) podrazumeva kvadrilateralnu konstrukciju – koja, da bi se dokazala, zahteva tačku izvan vlastite ravni i četiri para trouglova u perspektivi – prihvatićemo da je projektivni metod generisanja poretka nešto komplikovano. Ali, u svakom slučaju, ordinalni iskazi koji odatle proizlaze ostaju nepromenjeni projekcijom. Nasuprot tome, elementarni smisao i*zmeđu* koji treba da uvedemo u ovoj glavi generalno nije nepromenjen projekcijom[1].

U deskriptivnoj geometriji polazimo kao i ranije od tačaka i, kao i ranije, bilo koje dve tačke određuju klasu tačaka. Ali, ta klasa sada se sastoji samo od tačaka *između* neke dve date tačke. Ono na šta se misli pod *između* nije objasnio nijedan od autora koji je pisao o ovoj problematici, osim Vailatija koji je to učinio pomoću tranzitivne asimetrične relacije dve tačke, a to objašnjenje osudio je Peano[2] ukazujući na to da je *između* relacija *tri* a ne samo dve tačke. Ovaj razlog je, što znamo iz Glave IV, neadekvatan a čak i irelevantan. Ali, mislim da su čak i najbolji matematičari lutali kada je reč o relacijama i zato što nisu bili upoznati sa logikom relacija. U ovom slučaju, kao i u slučaju projektivne geometrije, možemo poći ili od relacije između dve tačke ili od relacije između jednog para tačaka i klase tačaka: oba metoda su legitimna i vode istim rezultatima, ali je prvi jednostavniji. Ispitajmo najpre metod Paša i Peana, a zatim i metod Vailatija.

375. U prvom metodu polazimo od dve nedefinljive, *tačka* i *između*. Ako su *a*, *b* i *c* tri račke, a *c* je između *a* i *b*, onda kažemo da je *c* jedno *ab* ili da pripada klasi tačaka *ab*. Profesor Peano je nabrojao, sa uobičajenom brižljivošću, neophodne postulate za klasu *ab*[3].

---

[1] Ovu problematiku izvrsno je obradio Paš (Pasch), *Neuere Geometrie*, Leipzig, 1882, sa čijim se empirijskim pseudo-filozofskim razlozima za preferiranje deskriptivne nad projektivnom geometrijom, međutim, nikako ne slažem (vidi *Einleitung* i §1). Deskriptivna geometrija je dalje razvijena, naročito u pogledu definicije ravni, kod Peana u *I Principii di Geometria logicamente esposti*, Torino, 1889. O definiciji cele linije posredstvom njenih različitih segmenata, vidi Peanovu fusnotu u *Rivista di Matematica*, II, str. 58–62. Vidi takođe njegov članak „Sui fondamenti della Geometria“, *ib*. IV, str. 51ff. i Vailati, „Sui Principi fondamentali della Geometria della retta“, *Riv. d. Mat.* II, str. 71–75. Što se nastavka sadašnjeg izlaganja tiče, sve ono što nije sporno može se pronaći u navedenim izvorima.

[2] *Riv. di Mat*. IV, str. 62.

[3] *Ib*. IV, str. 55ff.

Prvo, tačke *a* i *b* moraju da se razlikuju, a kada se razlikuju, onda uvek postoji jedna tačka između njih. Ako je *c* između *a* i *b*, onda je *c* takođe između *b* i *a*: samo *a* (a samim tim i b) nije između *a* i *b*. Sada uvodimo novu definiciju. Ako su *a* i *b* bilo koje dve različite tačke, onda je *a*'*b* klasa svih tačaka *c* takvih da se *b* nalazi između *a* i *c*. Slično tome, *b*'*a* će biti klasa tačaka *d* takvih da se *a* nalazi između *b* i *d*. Onda nastavljamo sa novim postulatima. Ako su *a* i *b* različite tačke, *a*'*b* mora da sadrži barem jednu tačku. Ako su *a*, *b*, *c* i *d* tačke, a *c* je između *a* i *d* i *b* između *a* i *c*, onda se *b* nalazi između *a* i *d*. Ako su *b* i *c* između *a* i *d*, *b* je između *a* i *c* ili je identično sa *c* ili je pak između *c* i *d*. Ako *c* i *d* pripadaju *a*'*b*, onda ili su tačke *c* i *d* identične, ili je *c* između *b* i *d*, ili je *d* između *b* i *c*. Ako se *b* nalazi između *a* i *c*, a *c* je između *b* i *d*, onda je *c* između *a* i d. Ovo nam, zajedno uzev, daje devet postulata koji se tiču *između*. Peano priznaje[1] da ne može da dokaže da je svaki od njih nezavisan; stoga pokazuje samo da su oni dovoljni, a ne i da su nužni. Potpuna prava linija (*ab*) definisana je kao *b*'*a* i *a* i *ab* i *b* i *a*'*b*, to jest kao (1) tačke između kojih i tačke *b* leži tačka *a*; (2) tačka *a*; (3) tačke između *a* i *b*; (4) tačka *b*; (5) tačke između kojih i tačke *a* leži tačka *b*.

Što se tiče ovog metoda, pre svega možemo primetiti da je on vrlo komplikovan. Drugo, kao i pre, moramo da napomenemo da izraz „dve tačke o*dređuju* klasu tačaka" mora da se proširi na sledeći način: „Postoji izvesna specifična relacija *K* čiji domen pripada svakom paru različitih tačaka. *K* je mnogo-jedan relacija, a relat koji odgovara paru tačaka kao referencija jeste klasa tačaka". Treće, možemo primetiti da tačke linije stiču poredak tek pomoću relacije prema onom segmentu koji ograničavaju, a ti segmenti stiču poredak pomoću relacije celine i dela ili relacije logičkog uključivanja. Neka su *a* i *b* bilo koje dve tačke i razmotrimo klasu tačaka *ab* ili *b* ili *a*'*b*. Neka su *c* i *d* bilo koje dve različite tačke ove klase. Onda je ili *ac* pravi deo *ad*, ili je *ad* pravi deo *ac*. Ovde se *ac* i *ad* mogu nazvati

1 *Ib*. str. 62.

segmentima, i vidimo da segmenti čiji je početak *a* i čije granice pripadaju *ab* ili *b* ili *a'b* formiraju niz zahvaljujući tranzitivnoj asimetričnoj relaciji celine i dela. Korelacijom sa ovim segmentima, njihovi krajevi takođe stiču poredak, a lako je dokazati da taj poredak ostaje nepromenjen kada *a* zamenimo bilo kojom tačkom od *ab*'. Ali poredak i dalje proizlazi, kao što uvek i mora, iz tranzitivne asimetrične relacije dva termina, i ništa se ne postiže time što se ta relacija ne priznaje kao da važi neposredno između tačaka.

376. Prelaskom na ono što sam nazvao Vailatijevom teorijom, nailazimo na jako veliko pojednostavljenje. Ovu teoriju (koja nije identična Vailatijevoj u pogledu svakog detalja) možemo da izrazimo na sledeći način. Postoji izvesna klasa tranzitivnih asimetričnih relacija koju ćemo nazvati *K*. Između bilo koje dve tačke postoji jedna i samo jedna relacija klase *K*. Ako je *R* relacija klase *K*, $\breve{R}$ je takođe, relacija ove klase. Svaka takva relacija *R* definiše pravu liniju; to će reći, ako su *a* i *b* dve tačke takve da *aRb*, onda *a* pripada pravoj liniji ρ. (Upotrebljavam odgovarajuće grčko slovo kako bih označio domen relacije; tako, ako je *S* relacija, σ je klasa termina koji stoje u relaciji *S* prema ovom ili onom terminu). Ako važi *aRb*, onda postoji neka tačka *c* takva da *aRc* i *cRb*; takođe postoji i tačka *d* takva da *bRd*. Dalje, ako su *a* i *b* bilo koje dve različite tačke koje pripadaju ρ, onda važi ili *aRb* ili *bRa.* Sa ovim aparatom imamo sve što nam treba.

Sada možemo formalno da nabrojimo postulate koji se tiču članova klase *K* – jer samo *K* nije definisano. Najpre treba napomenuti da ovde definišemo polje jedne klase relacija kao logički zbir polja konstituenata tih relacija; i da, ako je *K* klasa, označiću njeno polje sa *k*. Tada su nam potrebni sledeće aksiomi.

(1) Postoji klasa relacija *K* čije polje definišemo kao *tačku* klase.

(2) Postoji barem jedna tačka.

Ako je *R* bilo koji termin od *K* onda

(3) R je jedan aliorelativ.

(4) $\breve{R}$ je termin od K.

(5) $R^2 = R$.

(6) $\breve{\rho}$ (domen od $\breve{R}$) sadržan je u ρ.

(7) Između bilo koje dve tačke postoji jedna i samo jedna relacija klase K.

(8) Ako su a i b tačke od ρ, onda važi ili aRb ili bRa.

Uzajamnu nezavisnost ovih aksioma lako je uočiti. Ali izložimo najpre, u kratkim crtama, dokaz da oni daju sve zahtevane rezultate. Pošto s obzirom na (2) postoji bar jedna tačka i pošto s obzirom na (1) ta tačka stoji u nekoj relaciji klase K, i pošto su s obzirom na (3) sve relacije klase K aliorelativne, sledi da postoji neki termin različit od te jedne tačke prema kojem ta jedna tačka stoji u relaciji R klase K. Ali, pošto je prema (4) $\breve{R}$ relacija klase K, sledi da je termin prema kojem ta jedna tačka stoji u toj relaciji, takođe tačka. Postoje bar dve različite tačke. Neka su a i b dve različite tačke i neka je R ona jedna relacija klase K između a i b. Tako imamo aRb. Ali nemamo bRa. Jer, ako bismo imali, pošto je prema (5) $R^2 = R$, imali bismo i aRa, što protivreči (3). Tako su R i $\breve{R}$ uvek različite relacije, to jest obe su asimetrične. Pošto $R^2 = R$, aRb i bRc implicira aRc to jest R je tranzitivno. Stoga tačke koje prema a stoje u relaciji R ili $\breve{R}$ zajedno sa samim a formiraju niz. Pošto $R = R^2$, aRb implicira da postoji neka tačka c takva da aRc i cRb; to će reći, niz koji je generisan relacijom R je kompaktan. Pošto je prema (6) $\breve{\rho}$ sadržano u ρ, aRb implicira da postoji neka tačka c takva da bRc. Primenjujući isti argument na $\breve{R}$, postoji tačka d takva da dRa. Stoga imamo $\rho = \rho$, te polje od R nema početak ili kraj. Prema (8), polje od R je ono što smo u Četvrtom delu nazvali povezanim nizom, to jest ono se ne raspada na dva ili više odvojenih delova već od svaka dva njegova termina, jedan je pre, a drugi posle. Prema (7), ako postoji više od jedne relacije klase K, polja dve takve relacije ne mogu da imaju više od jedne zajedničke tačke, osim ukoliko je jedna od tih relacija konvers one druge. Polje jedne relacije klase *K* naziva se *prava linija*; tako nam (7) osigurava da dve prave linije imaju najviše jednu zajedničku tačku, dok nam (8) osigurava da, ako su *ab* i *cd* iste linije, takve su onda i *ac* i *bd.* Tako je dokazano da su naši aksiomi dovoljni za geometriju linije, dok (7) ide i dalje od jedne linije, ali je ovde uveden zato što ne imlicira *egzistenciju* tačaka izvan te jedne linije ili više od jedne relacije klase *K.* Najznačajnije je primetiti da u prethodnom nabrajanju fundamenata postoji samo jedna nedefinljiva, naime, *K*, a ne dve kao u Peanovom sistemu.

377. S obzirom na uzajamnu nezavisnost aksioma treba primetiti da (1) nije aksiom u pravom smislu reči već pretpostavka da je *K* nedefinljivo. Očigledno je moguće osporiti (2), a da se svi drugi aksiomi zadrže. Ako se (3) ospori a *R* uzme kao simetrična relacija projektivne geometrije, uz identitet sa nekim terminom od ρ, dobijamo projektivnu geometriju koja je različita od ovog sistema ali je samokonzistentna. Ako se (4) ospori, svi ostali aksiomi mogu da se zadrže; samo ostaje teškoća u pogledu (7), jer ako *aRb*, a $\breve{R}$ nije termin od *K*, *b* neće stajati prema *a* ni u jednoj relaciji klase *K* osim ako ne stoji u nekoj koja nije $\breve{R}$, što deluje da nije protivrečno. U pogledu (5) možemo da negiramo ili da je *R* sadržano u R^2 ili da je R^2 sadržano u *R*. Negiranje onog prvog čini naš niz nekompaktnim, na šta nema logičkih primedbi. Negiranje drugog ali ne i prvog pogrešno je u pogledu uglova[1] koji se mogu učiniti takvim da zadovoljavaju sve druge aksiome koje smo naveli. Ako naše linije imaju poslednji termin, (6) će postati lažno: tako će prostor levo od ravni, zajedno sa njom, zadovoljiti sve aksiome izuzev (6). Što se tiče (7), ono je sasvim nezavisno od svih ostalih aksioma; sastoji se iz dva dela, (*a*) tvrđenja da između bilo koje dve tačke postoji barem jedna relacija klase *K*, i (*b*) tvrđenja da ne postoji više od jedne takve relacija između dve date tačke. Ako uzmemo euklidski i hiperbolički prostor

[1] Vidi Deo IV, Glava XXIV.

zajedno, svi aksiomi će biti istiniti, izuzev (*a*). Ako kombinujemo dve različite klase K_1 i K_2 relacijâ gorenavedene vrste tako da $k_1 = k_2$, jedino će (*b*) biti lažno. Uprkos tome, izgleda jasno da se (*b*) ne može dedukovati iz drugih aksioma. Što se tiče (8), samo ono je lažno ako uzmemo da je *K* klasa pravaca u euklidskom prostoru u kojem skup paralelnih linija ima isti pravac. Tako je nužnost svih osim jednog od naših aksioma dokazana, a i taj jedan je veoma verovatan.

378. Videli smo da nam je prethodni metod omogućio da se zadovoljimo sa jednom nedefinljivom, naime, klasom relacija *K*. Ali, možemo ići dalje i potpuno se osloboditi nedefinljivih. Aksiomi koji se odnose na klasu *K* su svi mogli da se izraze pomoću logike relacija. Stoga možemo definisati klasu *C* klasama relacija takvih da je svaki član od *C* klasa relacija koje zadovoljavaju naše aksiome. Ovi aksiomi onda postaju delovi definicije i nemamo nikakve nedefinljive ni aksiome. Ako je *K* neki član klase *C*, a *k* polje od *K*, onda je *k* deskriptivni prostor, a svaki termin od *k* je deskriptivna tačka. Ovde je svaki pojam definisan pomoću opštih logičkih pojmova. Isti metod može da se primeni i na projektivni prostor, ili na neki drugi matematički entitet, osim nedefinljivih logike. Ovo je zaista, iako gramatički nezgodno, pravi put, filozofski govoreći, da se definišu matematički pojmovi. Izvan logike, čista matematika ne zahteva nedefinljive i primitivne iskaze, te ih stoga, strogo govoreći, ne bi trebalo uvoditi. Ovo ćemo rezimirati u Glavi XLIX.

379. Izgleda da su dva načina definisanja prave linije – Pašov i Peanov i onaj koji smo upravo izložili – podjednako legitimni i vode istim posledicama. Izbor između njih je stoga matematički nebitan. Ova dva metoda nam omogućavaju da samo pomoću dve tačke definišemo tri dela prave linije, naime, deo pre tačke *a* (*b*’*a*), deo između *a* i *b* (*ab*) i deo posle *b* (*a*’*b*). Ovo je mesto na kome se deskriptivna geometrija razlikuje od projektivne geometrije: tamo smo u pogledu *a* i *b* imali samo dva segmenta prave linije *ab* i oni nisu mogli da se definišu bez pozivanja na neku drugu tačku *c* te linije i kvadrilateralnu konstrukciju.

Prava linija može da se posmatra ili kao klasa tačaka koje formiraju polje relacije *R* ili kao sama ta relacija. Jer, radi razlikovanja biće dobro da ovu relaciju *R* nazovemo *zrakom*, pošto ta reč sugeriše smer; $\breve{A}$ će onda biti suprotan zrak. U razmatranju broja linija koje prolaze kroz jednu tačku *O*, biće takođe dobro da damo ime *zrak* klasi tačaka prema kojima *O* stoji u nekoj relaciji *R*, to jest onim tačkama linije kroz *O* koje leže na jednoj strani od *O*. One na drugoj starani od *O* će onda biti suprotan zrak. Kontekst će pokazati u kojem je smislu ova reč upotrebljena.

380. Sada prelazim na *ravan*. Premda je lako definisati ravan u projektivnom prostoru, definicija ravni je veoma teška kada linija nije zatvoreni niz, ili, još bolje, kada želimo da nazovemo koplanarnim neke delove linije koji se ne ukrštaju. Paš[1] uzima ravan ili, preciznije, jedan konačni deo ravni, kao novu nedefinljivu. Međutim, ona može da se definiše, kao što ću sledeći Peana sada ja to i pokazati.

Pre svega su nam potrebni neki novi aksiomi. Prvo, ako je ρ bilo koja prava linija, postoji barem jedna tačka koja ne pripada ρ. Zatim, ako su *a*, *b* i *c* tri tačke koje nisu na pravoj liniji, a *d* je tačka od *bc* između *b* i *c*, *e* tačka od *ad* između *a* i *d*, onda će *be* seći *ac* u tački *f*, a *e* će biti između *b* i *f*, a *f* između *a* i *c*. Dalje, ako su *a*, *b*, *c* i *d* kao pre i ako je *f* tačka između *a* i *c*, onda će se *ab* i *bf* ukrstiti u tački *e* između *a* i *d* i između *b* i *f*.[2] Sada definišemo ono što se može smatrati proizvodom (u geometrijskom smislu) tačke i figure. Ako je *a* bilo koja tačka, a *k* bilo koja figura, *ak* onda označava tačke koje leže na različitim segmentima između *a* i tačaka od *k*. To će reći, ako je *p* bilo koja tačka od *k*, a *x* bilo koja tačka segmenta *ap*, onda *x* pripada klasi *ak*. Ova definicija se može primeniti i kada je *a* tačka od *k*, a *k* prava linija ili njen deo. Figura *ak* će onda biti cela linija ili neki njen kontinuirani deo. Peano sada dokazuje pomoću čisto logičkih

---

[1] *Op. cit.,* §2

[2] *Riv. di Mat*. IV, str. 64.

transformacija da, ako su *a*, *b* i *c* različite nekolinearne tačke, onda *a* (*bc*) = *b* (*ac*). Ova figura se naziva trougao *abc* i potpuno je određena njegovim trima definišućim tačkama. Takođe je pokazano da, ako su *p* i *q* tačke segmenata *ab* odnosno *ac*, segment *pq* je potpuno određen u trouglu *abc*. Nakon više teorema dolazimo do nove definicije. Ako je *a* tačka, a *k* figura (to jest klasa tačaka), *a*'*k* označava sve tačke između kojih i tačke *a* leži neka tačka od *k* to jest, kako primećuje Peano, čitava senka od *k* ako je *a* osvetljena tačka**.** Tako, ako su *a*, *b* i *c* nekolinearne tačke, *a*'(*bc*) će predstavljati klasu tačaka izvan *bc* ograničenu sa proizvodima *ab* i *ac*. Ovo nam omogućava da definišemo ravan (*abc*) kao da se sastoji od pravih linija *bc*, *ca*, *ab*, trougla *abc* i figura *a*'*bc*, *b*'*ca*, *c*'*ab*, *b*'*c*'*a*, *c*'*a*'*b* i *a*'*b*'*c*[1]. Onda je lako pokazati da bilo koje druge tri tačke ravni definišu istu ravan i da linija koja spaja dve tačke ravni leži potpuno u ravni. Ali, umesto iskaza da se neke dve linije u ravni seku, sada imamo komplikovaniji iskaz, naime: ako su *a*, *b*, *c* i *d* koplanarne tačke od kojih nikoje tri nisu kolinearne, onda se ukrštaju ili linije *ab* i *cd* ili *ac* i *bd* ili *ad* i *bc*.

381. Pošto smo uspešno definisali ravan, sada možemo da pređemo na geometriju tela. Za ovo nam je najpre potreban aksiom: ako je data bilo koja ravan, onda postoji barem jedna tačka izvan te ravni. Onda možemo da definišemo tetraedar baš kao što smo definisali i trougao. Ali, da bismo znali da dve ravni koje imaju zajedničku tačku imaju i zajedničku liniju, treba nam jedan nov aksiom koji bi tvrdio da prostor kojim se bavimo ima tri dimenzije. U projektivnom prostoru ovaj aksiom je bio jednostavno takav da jedna linija i ravan uvek imaju barem jednu zajedničku tačku. Ali, ovde tako jednostavan aksiom ne važi. Ono što sledi, formulisao je Peano (*loc. cit.*, str. 74): ako je *p* ravan, a *a* tačka koja nije u *p* a *b* tačka od *a*'*p* (to jest, takva tačka da segment *ab* sadrži tačku od *p* ili, običnim jezikom rečeno, tačka na drugoj strani ravni od tačke *a*), onda, ako je *x* bilo

---

[1] Figura *b*'(*c*'*a*) ili *b*'*c*'*a* predstavlja ugao između proizvoda *ba* i *ca*, kao što se može videti iz definicije.

koja tačka, *x* ili leži u ravni ili segment *ax* sadrži tačku te ravni, ili pak segment *bx* sadrži tačku te ravni. Ako na kraju ovome dodamo aksiom kontinuiteta, onda imamo ceo aparat trodimenzionalne deskriptivne geometrije[1].

382. Deskriptivna geometrija, definisana na ovakav način, primenjuje se podjednako i na euklidski i na hiperbolički prostor: nijedan od pomenutih aksioma ne pravi razliku između ova dva prostora. S druge strane, eliptički prostor koji je uključen u projektivnu geometriju ovde je isključen. Nemoguće je ili, bolje rečeno, do sada se tako pokazalo, da se postavi opšti skup aksioma koji će voditi opštoj geometriji koja se primenjuje na sva tri prostora, jer u nekom trenutku naši aksiomi moraju da vode ili otvorenom ili zatvorenom nizu tačaka linije. Takva jedna geometrija može da se konstruiše simbolički, ali to proizlazi iz pridavanja različitih interpretacija našim simbolima, te će nedefinljive u jednoj interpretaciji postajati definljive u drugoj i obratno. Ovo će postati jasno ispitivanjem metoda pomoću kojeg projektivna geometrija postaje primenljiva na gore definisani prostor koji ću, zbog nedostatka boljeg imena, nazvati deskriptivnim prostorom.

383. Kada ispitujemo primenu projektivne geometrije na deskriptivni prostor, susrećemo se sa teškoćom da neke tačke koje zahteva konstrukcija mogu da ne postoje. Tako u kvadrilateralnoj konstrukciji, ako su date tri tačke *a*, *b* i *c*, četvrta tačka može da uopšte ne postoji. Možemo kao i ranije dokazati da, ako ta tačka postoji, onda je ona jedinstvena, i isto tako za druge iskaze projektivne geometrije: oni postaju hipotetički pošto protivrečnost na koju bi se moglo ukazati nije uvek moguća. To je vodilo uvođenju onoga što smo nazvali *idealnim* elementima (tačke, linije i ravni) na osnovu kojih postaje

---

[1] Ograničavam se na tri dimenzije pošto dalje proširivanje nije od teorijskog značaja. Tri dimenzije su mnogo zanimljivije od dve zato što, kao što smo videli, veći deo projektivne geometrije – to će reći sve što zavisi od kvadrilateralne konstrukcije – nije moguće dobiti sa manje od tri dimenzije, osim ukoliko se jedinstvenost kvadrilateralne konstrukcije ne uzme kao aksiom.

moguće tvrditi naše projektivne teoreme generalno. Ovi idealni elementi imaju izvesnu analogiju sa kompleksnim brojevima u algebri – analogiju koja je vrlo bliska onoj u analitičkoj geometriji. Pre detaljnog objašnjenja kako su ovi elementi uvedeni, bilo bi dobro da izložimo logičku prirodu tog procesa. Pomoću tačaka, linija i ravni deskriptivne geometrije definišemo novi skup entiteta od kojih neki odgovaraju a neki ne (to će reći, stoje u jedan-jedan relaciji sa) našim tačkama, linijama, ravnima. Ove nove entitete nazivamo idealnim tačkama, linijama i ravnima i uviđamo da oni imaju sva svojstva projektivnih tačaka, linija i ravni. Stoga oni konstituišu projektivni prostor i svi iskazi projektivne geometrije se primenjuju na njih. Pošto su naši idealni elementi definisani pomoću elemenata deskriptivnog prostora, iskazi projektivne geometrije koji se odnose na ove idealne elemente su teoreme koje se tiču deskriptivnog prostora iako se ne odnose na njegove stvarne tačke, linije i ravni. Paš, koji je dao najbolje objašnjenje načina na koji idealni elementi treba da se definišu[1], nije zapazio (ili barem nije izložio) da nijedna idealna tačka nije aktualna tačka baš tamo gde stoji u jedan-jedan relaciji prema aktualnoj tački i da isto važi i za linije i za ravni. Ovo je potpuno ista primedba koju smo morali da načinimo u vezi sa racionalnim brojevima, pozitivnim brojevima, realnim brojevima i kompleksnim brojevima, za koje su sve odreda matematičari pretpostavljali da sadrže kardinale ili ordinale, dok nijedan od njih ne može uvek da bude jedan od kardinala ili ordinala. Dakle, ovde idealni element nikada nije identičan sa aktualnom tačkom, linijom ili ravni. Ako se ovo ima u vidu, magična atmosfera koja okružuje uobičajeno izlaganje nestaje.

384. Idealna tačka se definiše na sledeći način. Uzmimo najpre klasu svih linija koje prolaze kroz neku tačku nazvanu vrh (*vertex*). Ova klasa linija naziva se snop (*Strahlenbündel*). Tako definisan snop ima izvesna svojstva koja mogu da se ustanove bez pozivanja

[1] *Op. cit*., §§ 6–8.

na vrh[1]. To su, na primer, sledeća: kroz bilo koju tačku (različitu od vrha) prolazi jedna i samo jedna linija snopa, a svake dve linije snopa su koplanarne. Sva svojstva snopa koja mogu da se ustanove bez pozivanja na vrh pripadaju izvesnim klasama linija koje nemaju vrh i koje su takve da se nikoje dve iz klase ne ukrštaju. Za ove može da se da jedna prosta konstrukcija na sledeći način[2]. Neka su *l* i *m* bilo koje dve linije u jednoj ravni, a *A* bilo koja tačka koja nije u toj ravni. Onda ravni *Al* i *Am* imaju zajedničku liniju. Klasa takvih linija, za sve moguće tačke *A* izvan ravni *lm,* ima svojstva na koja smo prethodno ukazali i reč snop se proširuje na sve klase linija koje su tako definisane. Jasno je da ako se *l* i *m* ukrštaju, snop ima vrh, a ako se ne ukrštaju, onda ga nema. Tako, u euklidskom prostoru, sve linije paralelne sa datom linijom formiraju snop koji nema vrh. Kada naš snop nema vrh onda definišemo *idealnu tačku* posredstvom snopa. Ali, ne sme se pretpostaviti da je ta tačka realna tačka: to je samo drugačije ime za sam snop, i tako, kada naš snop ima vrh, ako formulišemo iskaze u kojima se javljaju idealne tačke, onda moramo da zamenimo vrh snopom. To će reći, idealna tačka je naprosto snop, a nijedan snop nije stvarna tačka.

Razmatrajući snopove linija možemo da primetimo sledeće. Bilo koje dve prave linije u jednoj ravni jedinstveno određuju snop. Dva snopa koja oba imaju vrh uvek određuju liniju, naime, onu koja spaja vrhove i koja je zajednička tim snopovima. Tri snopa od kojih barem jedan ima vrh određuju ravan, osim ukoliko nisu kolinearni. Jedna linija i jedna ravan uvek imaju zajednički snop te određuju tri ravni od kojih barem dve imaju zajedničku tačku.

385. Tako snopovi linija imaju neka projektivna svojstva u odnosu prema linijama i ravnima koja tačke nemaju. Da bismo dobili entitete sa daljim projektivnim svojstvima, najpre moramo da

[1] Ta svojstva pobrojao je Kiling (Killing), *Grundlagen der Geometrie*, Vol. II (Paderborn, 1898), str. 82.

[2] Pasch, *op. cit*., §5.

zamenimo naše linije idealnim linijama. U tu svrhu najpre moramo da definišemo pramenove ravni (aksijalni pramenovi, *axial pencils*, *Ebenenbüschel*). Aksijalni pramen se pre svega sastoji od svih ravni koje prolaze kroz neku datu pravu liniju koja se zove osovina. Ali, kao i u slučaju snopova, i ovde uviđamo da takva figura ima mnoga svojstva nezavisno od osovine i sva ta svojstva pripadaju izvesnim drugim klasama ravni na koje se naziv pramen stoga proširuje. Ove figure se definišu na sledeći način[1]. Neka su *A* i *B* dva snopa linija. Neka je *D* tačka koja nije na liniji (ako je uopšte ima) koja je zajednička dvama snopovina *A* i *B*. Onda *A*, *B* i *D* jedinstveno određuju ravan koju možemo nazvati *ABD* ili (recimo) *P*. Ovo će biti ravan koja sadrži one linije iz *A* i *B* koje prolaze kroz *D*. Bilo koja druga tačka *E* koja nije u ravni *P* određivaće neku različitu ravan *ABE* ili *Q*. Tako dobijena klasa ravni na osnovu variranja *D* ili *E* jeste pramen ravni i ima sva svojstva pramena koja ima realna osovina, izuzev ona u kojima se osovina ekplicitno pominje. Bilo koje dve ravni *P* i *Q* koje pripadaju pramenu potpuno ga određuju. Pored toga, umesto *A* i *B* gore možemo da stavimo bilo koje druge snopove linija *A*' i *B*' koji pripadaju i *P* i *Q*. (Snop pripada ravni kada jedna od njegovih linija leži u toj ravni). Bilo koja dva snopa koja pripadaju i *P* i *Q* mogu da posluže za definisanje pramena ravni i pripadaće svakoj ravni pramena. Otuda, ako umesto aktualnih tačaka stavimo idealne tačke, to jest snopove linija, svaki pramen ravni imaće osovinu koja će se sastojati od izvesne kolekcije snopova linija od kojih bilo koje dve definišu pramen. Ova kolekcija snopova naziva se *idealna linija*[2].

---

[1] Pasch, *op. cit*., §7.

[2] Za logičke svrhe bolje je definisati idealnu liniju kao klasu idealnih tačaka asociranih sa nekim snopom ravni nego kao sam taj snop, zato što želimo da linija bude, kao u projektivnoj geometriji, klasa tačaka. (Rasel ovde prvi put govori o „snopu ravni“ dok je prethodno govorio uvek samo o „snopu linija“, a u slučaju ravni govorio je o „pramenu ravni“ – prim. stručnih redaktora prevoda).

386. Zamenjujući aktualne linije idealnim tačkama i linijama, uviđamo da sada imamo nov način daljeg napredovanja ka projektivnom prostoru. Dve idealne tačke određuju jednu i samo jednu idealnu liniju; data ravan je određena sa bilo koje tri njene idealne tačke koje ne pripadaju nekoj idealnoj liniji, ali tri idealne tačke ne određuju uvek ravan. Dve idealne linije u ravni uvek imaju zajedničku idealnu tačku, te tako određuju ravan i idealnu liniju. Takođe, dve ravni uvek imaju zajedničku idealnu liniju, a tri ravni uvek imaju ili zajedničku idealnu tačku ili zajedničku idealnu liniju. Naš prostor nije strogo projektivan jedino u pogledu ravni. Postoji ravan koja prolazi kroz bilo koje dve idealne tačke i jednu aktualnu tačku ili kroz jednu idealnu tačku i jednu aktualnu liniju. Ako uopšte postoji ravan koja prolazi kroz tri nekolinearne idealne tačke ili kroz jednu idealnu liniju i idealnu tačku koja nije na toj liniji, onda postoji samo jedna takva ravan, ali u nekim slučajevima uopšte ne postoji takva ravan. Kako se to ne bi desilo, moramo da uvedemo jednu novu klasu entiteta, naime, idealne ravni.

Definicija idealnih ravni[1] je relativno jednostavna. Ako su *A*, *B* i *C* neke tri idealne tačke, *D* idealna tačka na idealnoj liniji *AB* a *E* na *AC*, onda idealna linija *DE* ima idealnu tačku zajedničku sa *BC*, nezavisno od toga da li je aktualna ravan određena sa *A*, *B* i *C* ili nije. Tako, ako su *B*, *C* i *D* bilo koje tri idealne tačke, a *E* bilo koja druga idealna tačka takva da se *DB* i *CE* seku, onda se *BC* i *DE* seku, kao i *BE* i *CD*. Otuda, ako *B*, *C* i *D* nisu kolinearne tačke, definišemo idealnu ravan *BCD* kao onu klasu idealnih tačaka *E* koje su takve da se idealne linije *BD* i *CE* seku.

Radi jasnoće ponovimo ovu definiciju pomoću prvobitnih tačaka, linija i ravni, bez upoptrebljavanja reči *idealno*. Neka su data tri snopa linija *B*, *C* i *D* koje nisu sve sadržane u zajedničkom pramenu ravni, neka je *E* drugi snop linija takav da postoji snop linija

[1] Pasch, *op. cit.*, §8.

zajednički dvama pramenovima ravni *BD* i *CE*. Tada se klasa svih snopova *E* koji zadovoljavaju ovaj uslov naziva idealna ravan *BCD*.

Uobičajena svojstva ravni lako se dokazuju u vezi sa našim novim idealnim ravnima, kao na primer, da ih bilo koje tri njihove tačke određuju, da je idealna linija koja spaja dve od njihovih idealnih tačaka potpuno sadržana u njima itd. Zapravo, sada uviđamo da nove tačke, linije i ravni konstituišu projektivni prostor sa svim svojstvima koja smo opisali u prethodnoj glavi. Elementarni poredak tačaka na liniji od kojeg smo počeli je nestao, a jedan novi poredak sada treba da se generiše posredstvom razdvajanja parova[1]. Stoga nam celokupna projektivna geometrija postaje dostupna; a kada god naše idealne tačke, linije i ravni odgovaraju stvarnim, imamo odgovarajući iskaz projektivne geometrije koji se tiče ovih drugih.

387. Detaljno sam o ovome govorio delimično zbog toga da bih pokazao veoma široku primenu projektivne geometrije, a delimično zbog toga da bih pužio dobar primer značaja koji u matematici imaju relacije. Matematičaru je sasvim irelevantno šta su njegovi entiteti sve dok oni stoje u relacijama specifičnog tipa. Na primer, jasno je da se trenutak veoma razlikuje od tačke, ali za matematičara kao takvog ne postoji relevantna razlika između trenutaka vremena i tačaka na liniji. Tako u primeru kojim se trenutno bavimo, jedan krajnje složen pojam snopa linija – beskonačna klasa beskonačnih klasa – filozofski se posve razlikuje od prostog pojma tačke. Ali, pošto mogu da se formiraju klase snopova koje stoje u istim relacijama prema svojim konstituentnim snopovima u kojima projektivne linije i ravni stoje prema projektivnim tačkama, snop linija u deskriptivnom prostoru *jeste*, za matematičke svrhe, projektivna tačka. Međutim, čak ni za matematičke svrhe on nije tačka deskriptivnog prostora, a gorenavedena transformacija jasno pokazuje da deskriptivni prostor nije vrsta projektivnog prostora već radikalno različit entitet. A to je za filozofiju glavni rezultat ove glave.

---

[1] Vidi Paš, *op. cit*., §9.

Značajna je činjenica, na koju gorenavedeno generisanje projektivnog prostora ukazuje, da ako iz projektivnog prostora uklonimo sve tačke ravni ili sve tačke na jednoj strani zatvorenog kvadrika[1] preostale tačke formiraju deskriptivni prostor, euklidski u prvom slučaju, a hiperbolički u drugom. Ipak, u uobičajenom metričkom jeziku, projektivni prostor je konačan, dok je njegov deskriptivni deo beskonačan. Ovo ilustruje relativno površnu prirodu metričkih pojmova.

[1] Za projektivnu definiciju površine drugog reda (kvadrika) u projektivnom prostoru, vidi Reye, *Geometrie der Lage* (Hanover, 1868), deo II, predavanje V. Kvadrik je zatvoren ako postoje tačke koje se ne nalaze na njemu takve da sve prave linije koje prolaze kroz njih seku kvadrik. Takve tačke su *unutar* kvadrika.

Glava XLVII

METRIČKA GEOMETRIJA

388. Predmet ove glave je elementarna geometrija, onako kako su je shvatali Euklid i ostali autori pre devetnaestog veka. Ovaj predmet uključuje analitičku geometriju, bilo euklidsku ili neeuklidsku; ona se razlikuje od projektivne i deskriptivne geometrije ne po nekoj suprotnosti koja odgovara onoj između euklidske i neeuklidske, već po metodi i nedefinljivosti. Pitanje da li nedefinljive mogu ili ne mogu da se definišu pomoću nedefinljivih projektivne i deskriptivne geometrije, vrlo je teško pitanje i odlažem ga za sledeću glavu. Za sada ću da izložim ovaj predmet direktno na način onoliko sličan Euklidu koliko je to u skladu sa zahtevima opštosti i izbegavanjem grešaka. Metrička geometrija je logički sekundarna onim geometrijama koje smo ispitali zato što nužno pretpostavlja jednu ili drugu od ovih, dodajući im samo neke dalje specifikacije. Ja ću, po pravilu, pretpostavljati deskriptivnu geometriju, a pominjaću projektivnu geometriju samo u vezi sa aspektima u kojima ona ispoljava značajne metričke razlike od deskriptivne geometrije. U prvom slučaju, svih prvih dvadeset i šest Euklidovih stavova i dalje će da važi. U drugom, prvi, sedmi, šesnaesti i sedamnaesti zahtevaće modifikaciju zato što ti stavovi pretpostavljaju, u ovoj ili onoj formi, da prava linija nije zatvoreni niz. Stavovi posle dvadeset šestog – ili, uz podesnu definiciju paralela, posle dvadeset osmog – zavise od postulata o paralelama, te ih stoga ne treba generalno pretpostaviti.

389. Pošto Euklid još uvek ima visoku reputaciju zbog strogosti, čak i među matematičarima, zbog čega mu se i dalje praštaju okolišenje i opširnost, može biti vredno truda istaći, za početak nekoliko, grešaka u njegovih prvih dvadeset i šest stavova[1]. Počnimo od prvog stava. Nema nikakvog dokaza da se krugovi za koje nam se kaže da ih konstruišemo seku, a ako se ne seku, čitav stav pada. Euklidovi problemi se često smatraju teoremama o egzistenciji, i sa te tačke gledišta je jasno da je pretpostavka da se krugovi o kojima je reč seku potpuno ista kao pretpostavka da postoji jedan jednakostranični trougao nad nekom datom osnovom. I u eliptičkom prostoru gde prava linija jeste zatvoreni niz, ova konstrukcija pada kada dužina osnove prevazilazi polovinu dužine cele prave linije. U pogledu drugog i trećeg stava, nema šta da se kaže osim da ovi stavovi nisu teoreme o egzistenciji. Odgovarajuća teorema o egzistenciji – to će reći, na bilo kojoj pravoj liniji u oba smera od date tačke na liniji, postoji tačka čije je rastojanje od date tačke jednako datom rastojanju – ekvivalentna je postulatu koji se odnosi na krug, te tako prethodi drugom i trećem stavu. U pogledu četvrtog stava ima mnogo toga da se kaže: Euklidov dokaz je zapravo toliko loš da bi bilo bolje da je taj stav prosto uzeo kao aksiom[2]. Pošto su problemi koje ovaj dokaz proizvodi od velikog značaja i za matematiku i za filozofiju, najpre ću detaljno da objasnim greške u tom dokazu.

390. Četvrti stav je prvi u kojem Euklid primenjuje metod superpozicije – metod koji, pošto će ići svakim mogućim zaobilaznim putem da bi ga izbegao[3], on očigledno ne voli, i to s pravom, pošto

---

[1] Cf. Killing, *op. cit.*, Vol. II, odeljak 5.

[2] Ovakvo postupanje je u pogledu jednakosti preostajućih uglova usvojio Hilbert, *Grundlagen der Geometrie* (Festschrift zur Feier der Enthüllung des Gauss-Weber Denkmals, Leipzig, 1899), str. 12.

[3] Cf. Killing, *loc. cit.*, §2.

nije logički validan, a svakom inteligentnom detetu izgleda kao trik. Prvo, govoriti o kretanju implicira da naši trouglovi nisu prostorni već materijalni. Jer, tačka u prostoru *jeste* položaj i ne može da promeni taj položaj ništa više nego što leopard može da promeni svoje pege. Kretanje tačke prostora je fantom koji je direktno protivrečan zakonu identiteta: kretanje pretpostavlja da data tačka može da bude čas jedna tačka, čas druga. Stoga je kretanje u običnom smislu moguće samo materiji, a ne i prostoru. Ali u ovom slučaju superpozicija ne dokazuje nikakvo geometrijsko svojstvo. Pretpostavimo da je trougao *ABC* pored prozora i da se stranica *AB* sastoji od živinog stuba u termometru; pretpostavimo, takođe, da je *DEF* pored vatre. Postavimo *ABC* na *DEF*, prema Euklidovom uputstvu, i pustimo da *AB* taman pokriva *DE*. Onda zaključujemo da su *ABC* i *DEF* pre kretanja bili jednaki u svakom pogledu. Ali, ako bismo stavili *DEF* na *ABC*, taj rezultat ne bi sledio. Ali kakva je to budalaština! Biće mi rečeno, naravno, *ABC* i *DEF* moraju da budu kruta tela. Za sada u redu. Ali preostaju dve male teškoće. Prvo – a za mog protivnika koji je empirijski filozof ovo je važno – izvesno je koliko išta može da bude izvesno da nema krutih tela u univerzumu. Drugo, čak i ako moj protivnik ne bi bio empirista, on bi uvideo da je ova primedba daleko fatalnija – značenje krutosti pretpostavlja potpunu prostornu metričku jednakost, logički nezavisno od materije. Jer, šta mi podrazumevamo pod krutim telom? To je telo koje u toku celog kontinuiranog dela vremena održava sva svoja metrička svojstva nepromenjenim. Stoga rizikujemo zapadanje u najfatalniji začarani krug ako nastojimo da definišemo metrička svojstva pomoću krutosti. Ako je *αβγ* materijalni trougao koji zauzima u jedno vreme prostor *ABC*, a u drugo vreme prostor *A'B'C'*, reći da je *αβγ* kruto telo znači da ma kako ova dva vremena da su izabrana (unutar nekog datog perioda), uglovi *ABC* i *A'B'C'* su jednaki u svakom pogledu. Ako treba da izbegnemo ovaj zaključak, moramo da definišemo krutost na neki potpuno negeometrijski način. Na primer, možemo reći da kruto telo *znači* telo koje je načinjeno od čelika ili od mesinga. Ali, onda postaje logička greška smatrati mesing večnim robom gneva smrtnika*; a ako definišemo jednake prostore kao one koje može da zauzima jedno isto kruto telo, iskazi metričke geometrije će svi skupa biti lažni.

Činjenica je da kretanje, kako ga upotrebljavaju geometri, ima jedno značenje posve različito od onog koje ima u svakodnevnom životu, baš kao što promenljiva u matematici nije nešto što se menja, već upravo suprotno, nešto što ne može da se menja. Isto važi i za kretanje. Kretanje je izvesna klasa jedan-jedan relacija od kojih svaka ima svaku tačku prostora za svoju ekstenziju, i od kojih svaka ima konvers koji takođe pripada toj klasi. To će reći, kretanje je jedan-jedan relacija u kojoj su i referencija i relat tačke i u kojoj se svaka tačka može pojaviti i kao referencija i kao relat. Kretanje nije samo ovo: naprotiv, ono ima i jednu dalju karakteristiku – da su metrička svojstva svake klase referencija identična svojstvima odgovarajuće klase relata. Ova karakteristika zajedno sa drugima definiše kretanje onako kako se ono upotrebljava u geometriji, ili, još bolje, ona definiše kretanje ili refleksiju; ali, ovaj aspekt ne moramo sada da razjašnjavamo. Ono što je jasno, jeste to da kretanje u različitim delovima prostora pretpostavlja egzistenciju figura koje imaju ista metrička svojstva, i ne može da se koristi za definisanje tih svojstava. A ovaj smisao reči *kretanje*, a ne običan materijalni smisao, jeste relevantan za Euklidovu upotrebu superpozicije.

391. Vraćajući se na Euklidov četvrti stav, sada vidimo da superpozicija *ABC* na *DEF* podrazumeva sledeće pretpostavke. (1) Na liniji *DE* postoji tačka *E* na svakoj strani od *D* tako da *DE* = *AB*. Ovo garantuje postulat o krugu. (2) Na obe strane zraka *DE* postoji zrak *DF* takav da je ugao *EDF* jednak uglu *BAC*. Ovo se zahteva kako bi bio moguć trougao *DEF* kakav prethodni izraz zahteva, ali nijedan aksiom iz kojeg bi ovo sledilo ne može da se nađe kod Euklida.

---

* Stih „*brass eternal slave to mortal rage*“ Rasel preuzima iz Šekspirovog Soneta LXIV (prim. stručnih redaktora prevoda).

Problem konstruisanja ugla *EDF* jednakog uglu *BAC* ne javlja se sve do I.23, a tamo je I.4 upotrebljeno u dokazu. Stoga ova pretpostavka mora da se doda Euklidovim aksiomima. Sada sledi da na *DF* postoji tačka *F* takva da *DF* = *AC*. Time je obezbeđeno da su trouglovi koji su zahtevani i mogući. Ali, da bismo dokazali da je *DEF* u svakom pogledu jednako *ABC* treba nam još jedan aksiom, naime: postoji trougao sa jednim uglom na *D*, jedna stranica duž zraka *DE* i druga stranica desno (ili levo) od *DE* koji je u svakom pogledu jednak trouglu *ABC*[1]. Ovo je zapravo tačno ona pretpostavka koja se krije u metodi superpozicije. Sa ovom pretpostavkom postaje moguće dokazati da je *DEF* trougao koji zadovoljava navedene uslove i koji je u svakom pogledu jednak trouglu *ABC*.

Sledi primedba u vezi sa I.6. Ovde Euklid prvo upotrebljava aksiom kojeg uopšte nije svestan, mada je on suštinski za njegov sistem, naime: ako su *OA*, *OB* i *OC* tri zraka koji seku pravu liniju ne prolazeći kroz *O* u *A*, *B*, *C*, i ako se *B* nalazi između *A* i *C*, onda je ugao *AOB* manji od ugla *AOC*. Ovaj aksiom, kao što ćemo videti, nije primenljiv u projektivnom prostoru pošto pretpostavlja da linija nije zatvoreni niz. U I. 7, ako ovaj stav treba da bude primenljiv na hiperbolički prostor, neophodan je još jedan aksiom: ako tri linije koje se ne seku u jednoj ravni seku dve linije u *A*, *B*, *C, A*', *B*', *C*', i ako je *B* između *A* i *C*, onda je *B*' između *A*' i *C*'. Takođe, možemo primetiti da Euklid ne daje definiciju dve strane linije, što je pak pojam koji pretpostavlja da prava linija nije zatvoreni niz. A što se tiče uglova, stav I. 7 zahteva dovoljno aksioma kako bi se pokazalo da su uglovi nizovi one vrste koji su objašnjeni u Glavi XXIV Četvrtog dela; ili, još, moramo da pretpostavimo i aksiom deskriptivne geometrije iz prethodne glave da bismo imali da, ako su *A*, *B*, *C* i *D* koplanarne tačke od kojih nikoje tri nisu kolinearne, onda postoji zajednička tačka prostiranja *AB* i *CD* ili prostiranja

[1] Vidi Pasch, *op. cit*. §13, Grundsatz IX. Ceo ovaj paragraf je izvrstan.

AC i *BD*, ili prostiranja *AD* i *BC*. Sve ove pretpostavke su implicitne u I. 7, kao što se može videti ako pokušamo da napravimo simbolički dokaz u kojem se ne upotrebljava nijedna figura.

Slične primedbe odnose se i na I.16. U I.12 je pretpostavljeno da krug mora da seče liniju u dvema tačkama, ako je uopšte seče. Ali, već je dovoljno rečeno da bi se pokazalo da Euklid nije besprekoran i da su njegovi eksplicitno navedeni aksiomi uistinu nedovoljni. Pređimo onda na nezavisno ispitivanje metričke geometrije.

392. Za metričku geometriju se uobičajeno kaže da se odlikuje uvođenjem kvantiteta. Za karakterizaciju metričke geometrije je dovoljno da primetimo da ona između svakog para tačaka uvodi relaciju koja ima izvesna svojstva koja je čine numerički merljivom – to će reći, takva da brojevi mogu jedan-jedan da se korespondiraju sa različitim relacijama klase o kojoj je reč. Ova klasa relacija naziva se *rastojanje* i smatraćemo je, mada to nije strogo nužno, klasom veličina. Neke od osobina rastojanja su:

(1) Svaki par tačaka ima jedno i samo jedno rastojanje.

(2) Rastojanja su simetrične relacije.

(3) Na datoj pravoj liniji kroz datu tačku postoje dve i samo dve tačke koje se nalaze na datom rastojanju od date tačke.

(4) Ne postoji maksimalno rastojanje.

(5) Rastojanje tačke od nje same je 0[1].

(6) Ne postoji minimalno rastojanje između različitih tačaka.

(7) Ako su d i δ dva data rastojanja, a $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ različite tačke na pravoj liniji čija su međusobna rastojanja sva δ, onda za neku vrednost n, A_0A_n je veće od d.

(8) Ako su A_0 i A_n bilo koje dve tačke, onda postoji $n-1$ različitih tačaka (koji god ceo broj da je n) na pravoj liniji A_0A_n takvih da su

[1] Vidi Deo III, Glava XXII.

rastojanje svake od one sledeće, rastojanje A_0 od prve, i rastojanje A_n od poslednje, sve ta rastojanja jednaka[1].

393. Može se primetiti da ako prihvatimo aksiom da je celina veća od dela, svojstva (1), (4), (5) i (6) pripadaju prostiranjima, dok (2) postaje prihvatljivo apstrahovanjem od smera prostiranja. Što se tiče ostalih svojstava, (3), (7) i (8), nema ničeg u deskriptivnoj geometriji što bi ukazivalo na to da li pripadaju prostiranjima ili ne. Stoga ako hoćemo možemo da smatramo ova tri svojstva aksiomima koji se odnose na prostiranja i da u potpunosti izbacimo reč *rastojanje*. Verujem da ovo predstavlja najjednostavniji tok stvari i, što se tiče stvarnog prostora, najtačniji. Istovremeno, nema protivrečnosti u tretiranju rastojanja kao novih relacija različitih od prostiranja[2]. Ako poistovetimo rastojanje i prostiranje, ono što razlikuje metričku od deskriptivne geometrije jesu pre svega tri dodatna aksioma (3), (7) i (8) koji se primenjuju na novu nedefinljivu, naime, na veličinu deljivosti prostiranja. Ovo zapravo i nije pojam čiste matematike pošto ne može da se izvede iz našeg početnog aparata logičkih pojmova. Sa druge strane, rastojanje nije nedefinljiva pošto predstavlja klasu jedan-jedan relacija sa izvesnim pripisivim svojstvima. U ovoj tački je svaki dalji tok logički dopustiv, ali jedino rastojanje može da se uvede u čistu matematiku u strogom smislu u kojem ovu reč upotrebljavamo u ovoj knjizi.

Gorenavedeni aksiomi su neophodni kako bi se pokazalo da su sva rastojanja numerički merljiva pomoću standardnog rastojanja[3]. Nije nužno da rastojanja budu veličine ili čak relacije; jedino što je bitno jeste da rastojanja treba da formiraju niz sa izvesnim svojstvima. Ako tačke neke linije fomiraju kontinuirani niz, onda to čine i

---

[1] Druga svojstva rastojanja biće dodata kasnije.

[2] Naravno, prostiranja nisu u pravom smislu relacije, ali je to irelevantno za sadašnje razmatranje.

[3] Vidi Deo IV, Glava XXXI.

rastojanja zahvaljujući (3); stoga će svi realni brojevi bez znaka biti neohodni za njihovo merenje.

394. Ako pretpostavimo da su rastojanje i prostiranje različiti, možemo se pitati da li su rastojanja dovoljna za generisanje poretka na pravoj liniji bez potrebe za nekom asimetričnom tranzitivnom relacijom tačaka. Mislim da ovo predstavlja uobičajeno gledište filozofa, ali nikako nije lako odlučiti da li ono predstavlja i održivo gledište. Možda bi moglo da se pomisli da bi (2) moglo da se izostavi, te da bi rastojanje moglo da se smatra asimetričnom relacijom. Sve dok ograničavamo našu pažnju na jednu liniju, izgleda da ovom gledištu ne može da se prigovori. Ali, čim uzmemo u obzir činjenicu da rastojanja na različitim linijama mogu da budu jednaka, vidimo da razlika smera između *AB* i *BA* nije relevantna za rastojanje pošto ne postoji neka takva razlika između rastojanja na različitim linijama. Tako, ako je *CD* na drugoj liniji, *CD* može biti jednako i *AB* i *BA*, i otuda *AB* i *BA* moraju da budu jednaka rastojanja, a ne različita. Ovo isto može da se učini očiglednim na osnovu razmatranja sfere. Jer, sfera se sigurno sastoji od tačaka na nekom datom rastojanju od centra, te tako tačke na suprotnim krajevima prečnika moraju da budu na istom rastojanju od centra. Rastojanje je, onda, simetrično; ali, ne sledi da poredak na liniji ne može da se generiše pomoću rastojanja. Neka su *A* i *B* neke date tačke na liniji, i neka su *C* i *C*' dve tačke na *AB* čija su rastojanja od *A* jednaka i manja od *AB*. Ako sada postavimo aksiom da je ili *BC* ili *BC*' manje od *AB*, dok je *BC*' ili *BC* veće od *AB*, mislim da ćemo nakon nekih dodatnih aksioma moći da generišemo poredak bez bilo koje druge relacije osim rastojanja. Ako su *A*, *B* i *C* tri kolinearne tačke takve da su rastojanja *AC* i *CB* oba manja od *AB*, onda ćemo reći da je *C* između *A* i *B*. Ako su *A*, *B* i *C*' takve tačke da su *AC*' i *AB* oba manja od *BC*', onda ćemo reći da je *A* između *B* i *C*'. Na kraju, ako su *A*, *B* i *C*'' takve tačke da su *AB* i *BC*'' oba manja od *AC*'', reći ćemo da se *B* nalazi između *A* i *C*''. Ostaje da se vidi da li se jedna od ovih opcija ostvaruje pošto generisanje niza to zahteva. Neka su *A*, *B* i *C* neke tri kolinearne tačke.

Pretpostavimo prvo, ako je moguće, da su rastojanja *AB*, *BC* i *CA* sva jednaka. Ovaj slučaj nije isključen ničim što smo do sada pretpostavili; stoga će nam biti potreban dodatni aksiom da, ako su *AB* i *BC* jednaki, *AC* nije jednako ni jednom ni drugom: mislim da će biti pametno da pretpostavimo da je *AC* veće od oboje. Tako je slučaj dva jednaka rastojanja i slučaj jednog rastojanja manjeg od drugog isključen. Prema tome, od tri rastojanja *AB*, *BC* i *AC* jedno mora biti najveće: neka to bude *AC*. Onda će, na osnovu definicije, *B* biti između *A* i *C*. Ali našim teškoćama ovde nije kraj. Jer, dalje se zahteva da bilo koja tačka između *A* i *B* bude i između *A* i *C* i da, ako je *A* između *D* i *C*, *B* bude između *D* i *C*. U odnosu na prvo, ako je *E* između *A* i *B*, *AE* i *EB* su manji od *AB*, te su stoga manji od *AC*. Ali, ništa nam ne garantuje da je *EC* manje od *AC*. Za to nam je potreban novi aksiom koji će biti upravo ono što smo nastojali da dokažemo: ako su *AE* i *EB* oba manja od *AB*, a *AB* i *BC* oba manja od *AC*, onda je *EC* manje od *AC*. Na kraju ostaje da se dokaže da ako je *A* između *D* i *C*, a *B* između *A* i *C*, onda je *B* između *D* i *C*. Ovde su *DA* i *AC* manji od *DC*, a *AB* i *BC* manji od *AC*. Otuda je *BC* manje od *DC*, ali ništa ne dokazuje da je *BD* manje od *DC*. Za to nam treba novi aksiom i tada će, konačno, naš poredak biti određen. Ali, ovaj proces je, kao što je očigledno, ekstremno komplikovan.

395. Štaviše, treba nam još i metod definisanja prave linije. Pijeri je pokazao u jednoj izvrsnoj raspravi[1] kako izvesti metričku geometriju uzimanjem *tačke* i *kretanja* kao jedinih nedefinljivih. U §390 smo uputili primedbu na uvođenje kretanja na uobičajeni način zbog toga što definicija kretanja pretpostavlja metrička svojstva, ali Pijeri izbegava ovu primedbu jer uopšte ne definiše kretanje, osim preko postulata za koje se pretpostavlja da se tiču kretanja. Prava linija koja spaja dve tačke je klasa tačaka koje ostaju nepromenjene kretanjem koje ostavlja dve tačke fiksiranim. Sfera, ravan, upravnost,

---

[1] *Della geometria elementare como sistema ipotetico deduttico*, Torino, 1899.

poredak tačaka na liniji itd. lako se definišu. Ovom postupku ništa logički ne može da se zameri, i verovatno je najjednostavniji mogući za elementarnu geometriju. Ali, moramo da se vratimo razmatranju drugih predloženih sistema.

Postoji jedan metod koi je smislio Lajbnic[1], a obnovili su ga Frišauf (Frischauf)[2] i Peano[3], a u kojem je samo rastojanje fundamentalno, a prava linija je definisana pomoću rastojanja. U ovom metodu rastojanja su data najpre kao klasa relacija koje su polje izvesne tranzitivne asimetrične relacije (veće od i manje od); ako pretpostavimo da je ova relacija kontinuirana, rastojanja će biti merljiva; sva rastojanja imaju isti domen i isti konverzni domen, naime, sve tačke prostora o kojem je reč; mesto tačaka koje su ekvidistantne od dve fiksirane tačke naziva se *ravan*, a presek dve nekoincidirajuće ravni, kada on nije nula, naziva se *prava linija*. (Definicija prave linje koju je dao Peano[4] glasi: prava linija *ab* je klasa tačaka *x* takvih da bilo koja tačka *y* čija su rastojanja od *a* odnosno od *b* jednaka rastojanjima *x* od *a* i *b*, mora da koincidira sa *x*). Lajbnic, koji je smislio ovaj metod, prema mišljenju Kutiraa nije uspeo da dokaže da postoje prave linije, niti da je prava linija određena bilo kojim dvema njenim tačkama. Peano, koliko ja znam, nije uspeo da dokaže bilo koji od ova dva iskaza, ali je naravno moguće uvesti te iskaze kao aksiome. Frišauf kaže da ih je dokazao, ali njegovi dokazi su vrlo neformalni i teško je utvrditi koje aksiome je pretpostavio. Međutim, u svakom slučaju, definicije dokazuju da je upotreba aksioma dovoljna za konstruisanje geometrije u kojoj je rastojanje fundamentalno, a prava linija derivativna. Ovaj metod je toliko komplikovan da je praktično

---

[1] Cf. Couturat, *La Logique de Leibniz*, Paris, 1901, glava IX, a naročito str. 420.

[2] *Absolute Geometrie nach Jochann Bolyai*, *Anhang*.

[3] *Accademia Reale delle Scienze di Torino*, 1902–3, „La Geometria basata sulle idee di punto e distanza“.

[4] *Loc. cit.*

gledano nepoželjan, ali to što je logički moguć je uprkos tome važno.

396. Jasno je da prava linija mora da bude nezavisna od rastojanja, a da rastojanje *može* da bude nezavisno od prave linije. Tretirajući ih kao simetrične relacije *možemo* pomoću vrlo komplikovanog niza aksioma uspeti da generišemo poredak na pravoj liniji i objasniti sabiranje i merenje rastojanja. Ali, ova komplikacija u većini prostora[1] nije logički nužna, i u potpunosti se izbegava izvođenjem rastojanja iz prostiranja. Sada polazimo, kao i u deskriptivnoj geometriji, od asimetrične tranzitivne relacije na osnovu koje se prava linija i definiše i na osnovu koje se pokazuje da je ona niz. Definišimo kao *rastojanje* dve tačke A i B veličinu deljivosti prostiranja od A do B ili od B do A – jer deljivost predstavlja veličinu bez znaka. Pošto je deljivost vrsta veličine, neka dva rastojanja će biti jednaka ili nejednaka. Kao i sa svim deljivostima, zbir deljivosti AB i EF je deljivost logičkog zbira klasa AB i EF, pod uslovom da ove klase nemaju zajednički deo. Ako imaju zajednički deo, EF zamenjujemo sa prostiranjem $E'F'$ koje mu je jednako i koje nema zajednički deo sa AB. Razlika rastojanja AB i EF (gde je pretpostavljeno da je AB veće) jeste deljivost prostiranja CD koje logički sabrano sa EF i koje nema zajednički deo sa EF, proizvodi prostiranje jednako AB. Odmah sledi da, ako su A, B i C kolinearni, a B je između A i C, $AB + BC = AC$ i $AC - AB = BC$. Nijedan aksiom više od ovog nije potreban za ove iskaze. Za iskaz da, ako $AB = A'B'$ i $CD = C'D'$, onda $AB + CD = A'B' + C'D'$, zahtevamo samo jedan opšti aksiom primenljiv na sve deljivosti, naime, da su zbirovi jednakih jednaki. Tako, pomoću aksioma (3), (7) i (8) odozgo imamo sve što je potrebno za numeričko merenje (teorijski govoreći) svih rastojanja pomoću nekog datog rastojanja, kao i za dokaz da promena jedinice podrazumeva da se množenje zajedničkim činiocem izvrši svuda.

---

[1] Jedini izuzetak koji mi je poznat jesu konačni prostori od dve dimenzije. Vidi Glavu XLIX.

397. U pogledu veličine deljivosti, u smislu u kojem je to relevantno za metričku geometriju, značajno je shvatiti da je ona ordinalni pojam koji izražava svojstva relacija, a ne svojstva njihovih polja. Želimo reći da prostiranje od dva inča ima dva puta toliko deljivosti koliko ima prostiranje od jednog inča, kao i da je jedna površina beskonačno više puta deljiva nego jedno prostiranje. Sada, ako imamo posla sa kontinuiranim prostorom (a što ćemo pretpostaviti u *Ă* ovoj diskusiji), svako prostiranje, površina ili zapremina jeste klasa termina; i, uzeta kao klasa, ona predstavlja polje beskonačnog broja relacija osim one (ili onih) koja njoj pripada s obzirom na prostor koji razmatramo. Navika da se dopušta imaginaciji da se drži aktualnog prostora učinila je da poredak , na neki način, deluje intrinsično ili suštinski, a ne puko relativno prema jednoj od mnogih mogućih relacija uređenja. Ali, to stanovište nije logičko: ono u pogledu aktualnog prostora nastaje jedino na osnovu toga što generišuće relacije aktualnog prostora imaju sasvim osobenu vezu sa našim percepcijama, a preko kontinuiteta kretanja i sa vremenom. Sa logičke tačke gledišta, nijedna od relacija koje imaju dato polje nema prednost, a tačke aktualnog prostora slično bilo kojoj drugoj klasi od *Ă* termina, u pogledu drugih skupova generišućih relacija formiraju druge vrste kontinuiranih prostora – i zaista, bilo koji drugi kontinuirani prostor koji ima bilo koji konačan broj dimenzija, ili čak ω dimenzija, može da se formira od tačaka euklidskog prostora oslanjanjem na druge generišuće relacije.

Iz ovog sledi da veličina deljivosti, ako treba da razlikuje dugo prostiranje od kratkog, ili jednu površinu od prostiranja, mora biti svojstvo pretpostavljenih relacija, a ne klasa tačaka koje sačinjavaju površinu ili prostiranje. Nije sasvim lako tačno definisati svojstvo koje se ovde zahteva, jer su bilo koja dva prostiranja ordinalno slična. Zahtevamo neki smisao jednakosti ili nejednakosti relacija čija su polja data prostiranja. U slučajevima u kojima su koordinate (to jest korelacija tačaka linije sa realnim brojevima) već uvedene, možemo da definišemo veličinu prostiranja kao razliku kooordinata njenih krajnjih tačaka ili njenih granica (u zavisnosti od toga da li prostiranje ima krajeve ili ne); ali ako je to učinjeno, veličina prostiranja će zavisiti nužno od manje ili više proizvoljnog plana na osnovu kojeg smo uveli naše koordinate. Ovo je put koji je prihvaćen u projektivnoj teoriji rastojanja – put koji ima tu zaslugu da čini metričku geometriju logički razvijenom isključivo iz projektivnih aksioma (vidi sledeću glavu). Drugi put koji može da se prihvati jeste onaj da se pretpostavi da su generišuće relacije bilo koja dva prostiranja ili u simetričnoj tranzitivnoj relaciji (jednakost) ili u asimetričnoj tranzitivnoj relaciji ili pak njenom konversu (veće od ili manje od). Biće neophodni izvesni aksiomi kao, na primer, da ako su tačke *A*, *B*, *C* i *D* kolinearne, a *AC* je veće od *AD*, onda je *BC* veće od *BD*[1]. Relacije jednako, veće od i manje od mogu da se smatraju kao da su definisane ovim aksiomima, a zajedničko svojstvo generišućih relacija onih prostiranja koja su jednaka datom prostiranju mogu da se definišu kao veličina deljivosti generišućih relacija o kojima je reč. Smisao u kojem površina ima beskonačno više deljivosti od prostiranja jeste taj da, ako je *n* bilo koji konačan ceo broj, i ako se *n* prostiranja jednakih datom prostiranju ukloni iz površine, uvek će ostati neka površina, koliko god da je *n* veliko. U prethodnoj diskusiji je važno zapaziti da logički paritet svih poredaka u kojima klasa termina može da bude čini nužnim da smatramo veličine kojima se bavi metrička geometrija veličinama koje pripadaju relacijama ili klasama relacija, a ne, kao što se uobičajeno pretpostavlja, klasi tačaka koje formiraju njihova polja.

398. U eliptičkom prostoru u kojem je prava linija zatvoreni niz, pokušaj da se rastojanje učini nezavisnim od prostiranja vodi još većim komplikacijama. Tu više nemamo aksiom da, ako su *A*, *B* i *C* kolinearni, onda ne može biti da $AB = BC = CA$; i moramo priznati dva rastojanja između svakog para tačaka što, kada se rastojanje

---

[1] Prostiranja su ovde uzeta kao da imaju znak, tako da ako je *AC* veće od *AD*, *CA* je manje od *DA*.

uzme za fundamentalno, postaje krajnje čudno. Međutim, možemo izbeći prihvatanje dva rastojanja time što ćemo odbiti da tretiramo veće od ta dva kao rastojanje u pravom smislu. To će onda biti samo jedno prostiranje. Ako se prihvate dva rastojanja, jedno je uvek veće od drugog, osim u graničnom slučaju kada oba predstavljaju donju granicu od većih rastojanja i gornju granicu od manjih. Dalje, ako su *a*, *b*, *c* i *d* bilo koje četiri različite tačke, veće od dva rastojanja, *ab* je uvek veće od manjeg rastojanja *cd*. Tako, cela klasa većih rastojanja može da se izbaci, a svako veće prostiranje može da se prihvati.

Sada moramo da postupimo na sledeći nacin. Rastojanja su klase simetričnih relacija koje predstavljaju veličine jedne vrste, koje imaju maksimum koji predstavlja jedan-jedan relaciju čije su polje sve tačke, i minimum koji predstavlja rastojanje bilo koje tačke od nje same. Svaka tačka na datoj liniji ima rastojanje različito od maksimuma ili minimuma od dve i samo dve druge tačke na liniji. Ako su *a*, *b*, *c* i *d* četiri različite tačke na jednoj liniji, reći ćemo da su tačke *a* i *c* razdvojene tačkama *b* i *d* u sledeća četiri slučaja, od kojih (1) i (2), a takođe i (3) i (4) nisu uzajamno isključivi:

(1) Ako $ab<ac\ .\ bc<ac\ .\ ad>ac$.
(2) Ako $ab<ac\ .\ bc<ac\ .\ dc>ac$.
(3) Ako $ab>ac\ .\ ad<ac\ .\ dc<ac$.
(4) Ako $bc>ac\ .\ ad<ac\ .\ dc<ac$.

Ovde nam onda treba Vailatijevih pet aksioma, navedenih u Glavi XXIV Četvrtog dela, kako bismo generisali zatvoreni niz pomoću razdvajanja tako definisanih parova. Tako je moguće, mada donekle komplikovanim procesom, generisati zatvoreni niz tačaka na liniji posredstvom simetrične relacije rastojanja.

Neću dalje razrađivati u detalje posledice ove hipoteze u eliptičkom prostoru, već ću odmah nastaviti sa hipotezom da su rastojanja veličine prostiranja. Kada je broj dimenzija veći od dva, polarna forma eliptičkog prostora je samo projektivni prostor, zajedno sa neophodnim metričkim aksiomima; antipodalna forma je prostor u kojem dve antipodalne tačke zajedno imaju svojstva pojedinačne projektivne tačke. Zanemarujući ovu drugu formu za koju će važiti slične primedbe, ograničiću se na polarnu formu. Pošto je ovo projektivni prostor, svaki par tačaka određuje dva segmenta na liniji koja spaja te tačke. Zbir ova dva segmenta, zajedno sa dve tačke, jeste cela linija i prema tome je konstantan. To da sve potpune prave linije imaju istu deljivost jeste aksiom. Deljivost oba segmenta je *neko* rastojanje između dve tačke: kada su dva rastojanja jednaka, svako može da se nazove *tačno određenim* rastojanjem; kada su dva rastojanja nejednaka, biće zgodno da manje nazovemo *tačno određenim* rastojanjem, osim u slučaju specijalnih problema. Celokupna teorija se dalje razvija kao i u slučaju deskriptivnog prostora. Ali, značajno je primetiti da u eliptičkom prostoru kvadrilateralna konstrukcija i generisanje poretka, zato što prethode prostiranjima, prethode i rastojanjima i pretpostavljaju se u metričkoj geometriji.

399. Dakle, metrička geometrija za sada uvodi tri nova aksioma i jednu novu nedefinljivu. Prostiranje u svakom nizu predstavlja kvantitet, a metrička geometrija samo uvodi one aksiome koji čine sva prostiranja tačaka merljivim. Moglo bi biti korisno da kažemo nekoliko reči o smislu u kojem u jednoj teorijskoj diskusiji reč *merenje* mora da se shvati. Ovde se ne radi o stvarnoj primeni mernog štapa od jedne stope već samo o onim svojstvima čistog prostora koja su pretpostavljena u upotrebi tog mernog štapa. Neki skup veličina je *teorijski* merljiv kada postoji jedan-jedan relacija između tih veličina i nekih ili svih brojeva; ona je *praktično* merljiva kada, ako je data neka veličina, *mi* možemo otkriti, uz izvesnu marginu za grešku, koji je broj sa kojim naša veličina stoji u relaciji o kojoj je reč. Ali, kako to zapravo otkrivamo jeste jedno drugo pitanje, pod pretpostavkom da postoji neki postupak koji treba otkriti, a rešivo je, ako je uopšte rešivo, empirijskim sredstvima u laboratoriji. Dakle, praktično merenje nas uopšte ne interesuje u sadašnjoj diskusiji.

400. Sada prelazim na teže pitanje od onog koje se tiče rastojanja, naime, na pitanje o definiciji *ugla.* Ovde ćemo, pre svega, imati posla sa zracima, a ne sa celom pravom linijom. Zrak se može uzeti ili kao asimetrična relacija ili kao polu-linija na jednoj strani date tačke linije. Ova druga upotreba je veoma zgodna i često ćemo je koristiti. Elementarna geometrija pretpostavlja da dva zraka koji polaze od iste tačke određuju izvesnu veličinu koja se naziva uglom između njih. Međutim, ova veličina može da se definiše na različite načine. Prvo, treba primetiti da, pošto zraci koji prolaze kroz tačku u ravni formiraju zatvoreni niz, svaki par zraka koji prolaze kroz jednu tačku definiše *dva* prostiranja zraka. Međutim, jedno od ovih prostiranja sadrži suprotnosti oba zraka, dok drugo prostiranje ne sadrži nikakvu suprotnost – osim zapravo u slučaju u kojem su dva zraka suprotni jedan drugom. Ovaj slučaj je pretpostavljen Euklidovim postulatom da su svi pravi uglovi jednaki – postulat za koji sada znamo da je dokaziv[1]. Prelazeći preko ovog slučaja, ugao između dva zraka može se definisati kao ono prostiranje zrakova kroz njihov presek koji je omeđen sa dva zraka i ne sadrži suprotnost nijednog, to jest, ako su A i B dva zraka, a $\breve{A}$ i $\breve{B}$ njihove suprotnosti, ugao je klasa zraka C koji su razdvojeni od $\breve{A}$ ili $\breve{B}$ pomoću A i B. Mogli bismo takođe, zbog primedbe koja će uskoro biti pomenuta, definisati ugao kao sve tačke na takvim zracima. Definicija ekvivalentna ovoj drugoj, ali data u jednostavnijem obliku, tako da izbegava pominjanje suprotnih zraka izgleda ovako[2]. Neka su a i b bilo koje dve tačke zraka A i B i neka je c neka tačka prostiranja ab. Onda je klasa tačaka c, za sve moguće položaje a i b na njihovim zracima, ugao između A i B. To će reći, svaki par zraka koji se seku deli ravan zraka na dva dela: deo definisan na gorenavedeni način jeste ugao. Ili, još bolje, tako definisani deo jeste ugao shvaćen kao kvantitet: ugao kao veličina jeste deljivost tog dela. Ali, ovim poslednjim definicijama ćemo iznaći fatalne primedbe i uvidećemo da je nužno prihvatiti definiciju ugla kao prostiranja zraka.

---

[1] Vidi, na primer, Killing, *op. cit*., Vol. II, str. 171. Strog dokaz može se pronaći kod Hilberta, *op. cit*., str. 16.

[2] Killing, *op. cit*., II, str. 169.

401. Tako ugao, slično rastojanju, nije nova nedefinljiva ali, slično rastojanju, zahteva neke nove aksiome. Ugao između zraka *A* i njegove suprotnosti *A*’ ne može da se definiše kao prethodno, ali može da se definiše kao logički zbir uglova između *A* i *B*, odnosno *B* i *A*’. Ovaj granični ugao je veći od bilo kog drugog u tački pošto je zapravo cela polovina ravni na jednoj strani prave linije *AA*’. Ako su uglovi između *A* i *B* i *B* i *A*’ jednaki, svaki ćemo nazvati pravi ugao. (Može se dokazati da postoje takvi uglovi pod pretpostavkom kontinuiteta). Dve prave linije koje se seku daju četiri ugla koji su jednaki u parovima. Poredak kolekcije zraka u ravni koji prolaze kroz jednu tačku može da se dobije korelacijom sa tačkama u kojima ti zraci seku pravu liniju, pod uslovom da postoji prava linija koju svi oni seku. Ali, pošto zraci koji prolaze kroz tačku u ravni formiraju zatvoreni niz, dok ga tačke na liniji ne formiraju, potrebna nam je četvoroterminska relacija za poredak o kome je reč. Sledeća definicija deluje adekvatno. Ako su data četiri zraka *OA*, *OB*, *OC* i *OD* koji prolaze kroz tačku *O* i koji su u jednoj ravni, i ako oni svi seku izvesnu pravu liniju u tačkama *A*, *B*, *C* i *D*, a tačke *A* i *C* su razdvojene tačkama *B* i *D*, onda se za *OA* i *OC* kaže da su razdvojeni sa *OB* i *OD*. U projektivnom prostoru ovo je dovoljno. Ali u deskriptivnom prostoru moramo da imamo u vidu i druge slučajeve. Tako, ako *OA*, *OB* i *OC* seku datu liniju, a *B* se nalazi između *OA* i *OC* dok *OD* ne seče datu liniju, onda se za *OA* i *OC* ponovo kaže da su razdvojeni sa *OB* i *OD*. Naposletku, ako su *OA*’ i *OB*’ suprotni od *OA* i *OB*, onda su *OA* i *OA*’ razdvojeni sa *OB* i *OB*’. Na osnovu deskriptivnih aksioma iz prethodne glave, tako dobijeni poredak između zraka biće nedvosmislen, to jest, nezavisan od našeg izbora linije *ABC*, i pokrivaće sve slučajeve.

Ali, sada su nam potrebni aksiomi analogni onima koji su u slučaju rastojanja navedeni pod (3), (7) i (8). U bilo kojoj datoj tački na datom zraku, u datoj ravni moraju da postoje dva i samo dva zraka na suprotnim stranama datog zraka (to jest razdvojeni jedan od drugog datim zrakom i njemu suprotnim zrakom) koji obrazuju dati ugao sa datim zrakom, a uglovi moraju da podležu Arhimedovom aksiomu i aksiomu linearnosti. Ali, uz ove aksiome koji osiguravaju da će uglovi biti numerički merljivi, moramo imati i neki metod povezivanja mere uglova sa merom rastojanja, poput onog koji je neophodan za rešavanje trouglova*. Da li je za ovo potreban novi aksiom? Izgleda da Euklid ovo dobija na osnovu I.47, II.12 i II.13 bez nekog novog aksioma. Za taj rezultat mi se oslanjamo na iskaze o kongruenciji trouglova (I.4, 8, 26) koji, kao što smo videli, zahtevaju aksiom da, ako je dat ugao u nekoj datoj tački i jedna stranica tog ugla duž datog zraka koja prolazi kroz tu tačku, onda postoje dva i samo dva trougla u datoj ravni kroz koju prolazi taj zrak (po jedan trougao na svakoj strani datog zraka), koji su u svakom pogledu jednaki nekom datom trouglu. Stoga bi izgledalo da nam nikakvi novi aksiomi nisu potrebni za uglove u ravni.

402. S obzirom na definiciju ugla kao dela ravni, nužno je da (kao i u mnogim drugim slučajevima), ako želimo da zadržimo tu definiciju, donekle moramo da ograničimo aksiom kojim se tvrdi da je celina veća od dela. Ako celina *A* ima dva dela *B* i *C*, koji zajedno konstituišu *A*, i ako je *C* infinitezimalno s obzirom na *A*, onda će *B* biti jednako *A*. Ovaj slučaj se javlja u ravni u sledećim okolnostima. Neka su *O* i *O*’ bilo koje dve tačke, a *OP* i *O*’*P*’ linije u jednoj ravni koje obrazuju jednake uglove sa zrakom *OO*’[1]. Onda se u euklidskom ili hiperboličkom prostoru linije *OP* i *O*’*P*’ neće seći; tako će ugao između *OO*’ i *O*’*P*’ biti deo ugla *O*’*OP*. Otuda je prethodno ograničenje neophodno s obzirom na aksiom da je celina veća od dela.

U euklidskom prostoru ovaj odgovor je dovoljan, pošto, ako *OP* sa *OO*’ obrazuje ugao koji je manji od onoga koji obrazuje *O*’*P*’, *OP*

---

* „Rešenje trouglova“ (*solutio triangulorum*) predstavlja osnovni trigonometrijski problem utvrđivanja svih karakteristika trougla na osnovu nekih datih (prim. stručnih redaktora prevoda).

[1] Ugao između dva zraka *OO*’ i *O*’*P*’ predstavlja ono što bi Euklid nazvao uglom između proizvoda *OO*’ i *O*’*P*’.

i *O'P'* će se seći. Ali, u hiperboličkom prostoru se čak i tada *OP* i *O'P'* mogu ne seći. Stoga, ako prihvatamo gorenavedenu definiciju ugla, moraćemo da prihvatimo da celina može da bude manja od dela. Međutim, to je neprihvatljivo i pokazuje da definicija o kojoj je reč mora da se odbaci. Međutim, i dalje možemo smatrati ugao prostiranjem zrakâ; jer, zraci u uglu u *O'* nisu deo zrakâ u uglu u *O*. Stoga ugao u pravom smislu može da se definiše samo kao prostiranja zrakâ ili kao veličina takvog prostiranja.

Pokazujući na neobičan način povećanje deduktivne moći koja proizlazi iz gorenavedenih aksioma koji se tiču rastojanja i uglova, možemo da primetimo da jedinstvenost kvadrilateralne konstrukcije koja pre nije mogla da se dokaže bez tri dimenzije, sada može da se dokaže s obzirom na sve konstrukcije u ravni, bez bilo kakvog pretpostavljanja tačaka izvan te ravni. Ništa nije lakše nego dokazati taj stav pomoću metode elementarnih koordinata geometrije. Tako, iako projektivna gometrija kao nezavisna nauka zahteva tri dimenzije, svaki stav projektivne geometrije koji se odnosi na figure u ravni može metrički da se dokaže ako gorenavedeni aksiomi važe za dvodimenzionalni prostor.

403. U pogledu figura od tri dimenzije, uglovi između ravni i uglova tela mogu da se definišu na tačno isti način kao što su bili definisani i linijski uglovi. Štaviše, neće biti potrebe za novim aksiomima zato što merenje ovakvih uglova može da se izvede iz činjenica koje već znamo.

Deluje neophodno da načinimo nekoliko primedbi u vezi sa površinama i zapreminama. Površine i zapremine su, slično uglovima, klase tačaka kada ih razmatramo kao kvantitete, a deljivosti, kada ih razmatramo kao veličine. Za površine i zapremine opet nam nisu potrebni Arhimedov aksiom i aksiom linearnosti, ali nam je i za površine i za zapremine potreban neki aksiom koji daje kriterijum jednakosti površina i zapremina, to jest povezuje njihovu jednakost sa jednakošću rastojanja i uglova. U slučaju površina, to nam je dato aksiomom prema kojem dva kongruentna trougla imaju istu površinu, a u slučaju zapremina odgovorajućim aksiomom koji se odnosi na tetraedre. Ali, egzistencija kongruentnih tetraedara, kao i egzistencija kongruentnih trouglova zahteva aksiom. Za tu svrhu, Paš[1] daje sledeći opšti aksiom: ako su dve figure kongruentne, i ako se jedna nova tačka doda jednoj od njih, onda i jedna nova tačka može da se doda drugoj, tako da te dve nove figure budu kongruentne. Ovaj aksiom nam omogućuje da izvedemo kongruntne tetraedre iz kongruentnih trouglova, te stoga merenje zapremina teče glatko.

404. Što se tiče tri dimenzije, treba uzeti u obzir jednu neobičnu činjenicu, naime, disjunkciju desnostranosti i levostranosti ili pak u-krug-nadesno i u-krug-nalevo. Sama ova činjenica je deskriptivne prirode i može da se definiše na sledeći način. Između dva nekoplanarna zraka ili između četiri nekoplanarne tačke uzete u nekom datom poretku, uvek postoji jedna ili dve suprotne relacije koje mogu da se nazovu desno i levo. Formalna svojstva ovih relacija bila su objašnjena u Četvrtom delu (§222); sada me interesuju geometrijske posledice tih svojstava. Prvo, one čine da zapremine postaju veličine sa znakom na tačno isti način na koji rastojanja na pravoj liniji imaju znak zajedno sa njihovim smerom. Ali u slučaju rastojanja, pošto nisu sva na jednoj pravoj liniji, ne bismo mogli u opštem slučaju da na takav način pridružimo rastojanje i smer: za takvo pridruživanje bio bi nam potreban neki opštiji pojam od smera kakav daju vektori. Ovde, nasuprot tome, pošto u trodimenzionalnom prostoru sve zapremine imaju jedan ili drugi od dva smera, pridruživanje može da se sprovede za sve zapremine. Tako, ako zapremina tetraedra *abcd* ima jedan znak, zapremina od *bacd* imaće suprotan znak. Ovo je ona poznata geometrijska činjenica da detrerminanta koja daje zapreminu tetraedra *abcd* ima jedan ili drugi znak u zavisnosti od toga da li je smer od *abcd* isti ili različit od smera od *OXYZ*, gde je *O* početak a *XYZ* bilo koje pozitivne tačke na osama. Ta činjenica takođe omogućava da se dobiju i znaci ugaonih momenata u

[1] *Op. cit*. str. 109.

dinamici. Značaj ove činjenice (koja sama izgleda kao da je nezavisan aksiom) jeste taj što ona omogućava razlikovanje dve figure čija su sva metrička svojstva identična. To je ona činjenica koja je zbunjivala Kanta koji je, kao i većina njegovih savremenika, pretpostavljao da sve geometrijske činjenice moraju da budu metričke. Po sebi, ova činjenica ne bi zbunjivala ništa više nego razlika između prostiranja *AB* i *BA* koja su metrički nerazlučiva. Ali, ona postaje zbunjujuća kada se pretpostavi da metrička jednakost proizlazi iz kretanja i superpozicije. U našoj prvobitnoj definiciji kretanja (§390) izostavili smo (kao što je onda i primećeno) uslov koji je suštinski za tu definiciju. Ne samo da dve kongruentne figure moraju da budu metrički jednake, već mora da postoji i kontinuirani niz jednakih figura koje vode jedna ka drugoj. Ili, što se svodi na isto, ako su *a*, *b*, *c*, *d* i *a*’, *b*’, *c*’ i *d*’ homologne nekoplanarne tačke u dvama figurama, tetraedri *abcd* i *a*’*b*’*c*’*d*’ moraju da imaju isti smer. U slučaju jednakog i njemu suprotnog tetraedra, ovi uslovi nisu zadovoljeni. Jer, ne postoji postepeni prelaz od smera u-krug-nadesno ka smeru u-krug-nalevo; stoga bi u nekom trenutku u nizu bio neophodan iznenadni skok. Nikakvo kretanje neće transformisati *abcd* u tetraedar metrički jednak u svakom pogledu a suprotan po smeru. Međutim, izgleda mi da u toj činjenici ne može biti ničeg misterioznog već je to samo rezultat toga što se ograničavamo na tri dimenzije. U jednoj dimenziji, isto bi važilo za rastojanja sa suprotnim smerom, a u dve dimenzije za površine. Samo onima koji smatraju kretanje suštinskim za pojam metričke jednakosti desnostranost i levostranost predstavljaju teškoću; u našoj teoriji, one pre predstavljaju potvrdu nego kamen spoticanja.

Ovim možemo da završimo naš kratak pregled metričke geometrije, ostavljajući za sledeću glavu razmatranje njenog odnosa prema projektivnoj geometriji i projektivnoj teoriji rastojanja i ugla.

Glava XLVIII

ODNOS METRIČKE PREMA PROJEKTIVNOJ I DESKRIPTIVNOJ GEOMETRIJI

405. U ovoj glavi ću razmotriti dva pitanja. Prvo, da li projektivna i deskriptivna geometrija mogu da se dobiju bez ikakvih metričkih pretpostavki, ili čak bez impliciranja metričkih svojstava? Drugo, da li metrička geometrija može da se izvede iz jedne ili druge od ovih, ili, ako ne može, koje neizbežne novine ona uvodi? U prethodnom izlaganju su već dogmatski pretpostavljeni izvesni odgovori na ova pitanja, ali sada ćemo kritički ispitati različite moguće odgovore.

Razlikovanje između projektivne i deskriptivne geometrije je načinjeno nedavno i suštinski je ordinalne prirode. Ako prihvatimo gledište – koje je, kao što smo videli, jednostavnije od dva legitimna gledišta – da je prava linija definisana na osnovu izvesne relacije između bilo koje dve od njenih tačaka, onda će u projektivnoj geometriji ova relacija biti simetrična, dok će u deskriptivnoj geometriji biti asimetrična. Osim toga imamo i tu razliku da se u projektivnoj geometriji jedna linija i ravan, dve ravni ili dve linije u ravni uvek seku, dok u deskriptivnoj geometriji ostaje pitanje da li je to slučaj ili ne. Ali, ove razlike nisu mnogo značajne za naše sadašnje potrebe, te će stoga biti pogodno da govorimo o projektivnoj i deskriptivnoj geometriji zajedno, kao o nekvantitativnoj geometriji.

Logička nezavisnost nekvantitativne geometrije jedva da je danas pod znakom pitanja. U Glavama XLV i XLVI smo videli kako nekvantitativna geometrija može da se izgradi bez pozivanja na bilo kakva kvantitativna razmatranja. Iako ga filozofi i dalje smatraju suštinskim za matematiku, kvantitet se zapravo ne javlja u čistoj matematici, ali se javlja u mnogim slučajevima koji trenutno nisu podložni matematičkom obrađivanju. Pojam koji zauzima mesto koje je tradicionalno pripadalo kvantitetu jeste *poredak*, a taj pojam je, kao što smo videli, prisutan u obe vrste nekvantitativne geometrije. Ali, čistota pojma poretka bila je u velikoj meri zamagljena verovanjem da svaki poredak zavisi od rastojanja – verovanja za koje smo, iako ga zastupa tako izvrsni autor kao što je Majnong, uvideli da je pogrešno. Ako je rastojanje suštinski kvantitativno, priznati da niz zavisi od rastojanja znači priznati da poredak zavisi od kvantiteta. Ali, ovo gledište odmah vodi beskonačnom regresu pošto rastojanja imaju poredak veličine koji bi morao da se izvede iz novih rastojanja rastojanja itd. Što je sigurno, asimetrična tranzitivna relacija je dovoljna za generisanje niza, ali ne implicira rastojanje. Stoga činjenica da tačke jedne linije formiraju niz ne pokazuje da geometrija mora da ima metričke pretpostavke, i nikakve takve pretpostavke se ne pojavljuju u bilo kojoj pojedinosti projektivne ili deskriptivne geometrije.

406. Ali, iako je nekvantitativna geometrija kakva sada postoji očigledno nezavisna od svega metričkog, istorijski razvoj ove discipline je išao u pravcu zamagljivanja ove nezavisnosti. Kratak istorijski prikaz ove problematike može biti koristan kako bi se istakao odnos modernijih prema tradicionalnijim metodama.

Kod Euklida i kod grčkih geometara uopšte, teško da se može naći ijedna teorema deskriptivne geometrije. Jedno od najranijih otkrića jedne značajne teoreme deskriptivne geometrije nosi

Paskalovo[1] ime. Postepeno je utvrđeno da iskazi kojima se tvrdi kolinearnost tačaka ili konkurentnost [saprotočnost[*]] linija, ili iskazi koji se odnose na tangente, polove i polare[**] i slične stvari, svi ostaju nepromenjeni pod projekcijom; to će reći, bilo koje svojstvo koje pripada figuri u ravni pripadaće takođe i projekciji ili senci te figure iz bilo koje tačke na bilo koju ravan. Sva takva svojstva (na primer, ona zajednička svim konusnim presecima) nazivaju se projektivna ili deskriptivna. Među tim svojstvima je i anharmonijski odnos koji smo definisali na sledeći način. Ako su A, B, C i D četiri tačke na pravoj liniji, njihov anharmonijski odnos je $\frac{AB}{CB}/\frac{AD}{CD}$; ako su OA, OB, OC i OD četiri linije koje prolaze kroz neku tačku, njihov anharmonijski odnos je $\frac{\sin AOB}{\sin COB}/\frac{\sin AOD}{\sin COD}$. U Šaslovom (Chasle) velikom delu o deskriptivnoj geometriji[***], a čak i u najnovijim delima [kao što je Kremonina (Cremona) projektivna geometrija] ova definicija se može naći na vrlo ranom stadijumu u razvoju ove discipline, zajedno sa dokazom da anharmonijski odnos ostaje neizmenjen pod projekcijom. Ali, sama ta definicija je metrička, te stoga ne može da se upotrebi u zasnivanju ove discipline nezavisno od metričke geometrije. I u drugim delovima onoga što se nazivalo deskriptivnom ili projektivnom geometrijom može se pronaći isti nedostatak nezavisnosti. Razmotrimo, na primer, definiciju konusnog preseka. Definisati ga kao krivu drugog reda zahtevalo bi projektivne koordinate za koje

---

[1] Ako se šestougao upiše u konusni presek, tri para suprotnih stranica sećiće se u kolinearnim tačkama.

[*] Rasel ovde govori o tri ili više pravih koje prolaze kroz istu tačku (prim. stručnih redaktora prevoda).

[**] Pol i polara su tačka odnosno linija koje stoje u jedinstvenoj recipročnoj relaciji s obzirom na neki dati konusni presek, i to takvoj koja je invarijantna s obzirom na bilo koju projekciju (prim. stručnih redaktora prevoda).

[***] Mišel Floreal Šasl (Michel Floréal Chasles) (1793-1880) bio je francuski matematičar, autor monumentalne knjige (obima oko 850 stranica) *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie* (Bruxelles, 1837) na koju Rasel ovde upućuje (prim. stručnih redaktora prevoda).

nije bio poznat metod njihovog uvođenja. Definisati ga kao krivu koja seče neku pravu liniju u ne više od dve tačke, zahtevalo bi razlikovanje realnih i imaginarnih tačaka jer, ako se ograničimo na realne tačke, postoji beskonačno mnogo krivih različitih od konusnih preseka koje zadovoljavaju tu definiciju. Ali, imaginarne tačke *jesu* imaginarne koordinate u ordinalnoj metričkoj geometriji za koje nemamo čisto geometrijsku interpretaciju; tako, bez projektivnih koordinata naša definicija ponovo pada. Definisati konusni presek kao mesto tačaka *P* za koje je anharmonijski odnos *PA*, *PB*, *PC* i *PD* konstantan (gde su *A*, *B*, *C* i *D* fiksirane tačke), ponovo podrazumeva metrička razmatranja, sve dok nemamo projektivnu definiciju anharmonijskog odnosa. I ista ova zavisnost od metričke geometrije se javlja u pogledu svake druge teoreme projektivne ili deskriptivne geometrije, dokle god se pridržavamo tradicionalnog reda ideja.

Pravi osnivač nekvantitativne geometrije je fon Štaut[1]. On je bio taj koji je uveo definiciju harmonijskog reda na osnovu kvadrilateralne konstrukcije i koji je ponavljanjem te konstrukcije učinio mogućim projektivne definicije svih racionalnih anharmonijskih odnosa[2]. Ove definicije ukazuju na nizanje kvdrilateralnih konstrukcija koje su neophodne kako bi se dobila četvrta tačka na osnovu tri date tačke; tako, mada su one suštinski numeričke, ipak se ni na koji način ne pozivaju na kvantitet. Ali, ovde preostaje još jedan korak pre nego što bi projektivna geometrija mogla da se smatra potpunom, a taj korak je načinio Pijeri. U Klajnovom objašnjenju ostaje sumnjivo da li *svi* skupovi četiri kolinearne tačke imaju anharmonijski odnos i da li bilo koje značenje može da se prida iracionalnim anharmonijskim odnosima. Za tu svrhu je neophodan metod generisanja poretka među *svim* tačkama linije. Jer, kad ne bi bilo poretka

---

[1] *Geometrie der Lage*, Nuremberg, 1847; *Beiträge zur Geometrie der Lage*, Nuremberg, 1856, 1857, 1860.

[2] Verujem da ovaj korak dugujemo Klajnu. Vidi *Math. Annalen*, Vol. IV, VI, XXXVII.

osim onoga koji je dobijen Klajnovim metodom, ne bi postojao smisao u kojem možemo da smatramo tačku koja nije dobijena metodom, kao granicu niza tačaka koje jesu tako dobijene, pošto granica i niz koji ona ograničava moraju uvek da pripadaju nekom jednom nizu. Stoga neće postojati način pridodavanja iracionalnih koordinata tačkama koje nemaju racionalne koordinate. Naravno, ne postoji nikakav projektivni razlog da se pretpostavi da postoje takve tačke; ali postoje metrički razlozi, i u svakom slučaju je dobro, ako je to moguće, baviti se projektivno kontinuiranim prostorom. To je uspeo da uradi Pijeri pomoću izvesnih novih aksioma, ali bez bilo kakvih novih nedefinljivih. Tako se, napokon, završio dug proces kojim je projektivna geometrija očistila sebe od svake metričke fleke.

407. Međutim, pošto je izvojevala sopstvenu nezavisnost, projektivna geometrija je počela da se uvećava njoj stranim elementima; a u tom pogledu ćemo, iako pretežno naklono, ipak biti prinuđeni da imamo izvesne rezerve. Takozvana projektivna teorija rastojanja nastoji da dokaže da je metrička geometrija samo grana projektivne geometrije i da su rastojanja samo logaritmi izvesnih anharmonijskih odnosa. Ako je ta teorija tačna, onda ne postoji poseban predmet za metričku geometriju i aksiomi na osnovu kojih smo, u prethodnoj glavi, izdvojili taj, predmet moraju da budu posledice aksioma projektivne geometrije. Ispitajmo način na koji se ovaj rezultat dobija[1].

Već smo videli kako se pridodaju koordinate svakoj tački linije u projektivnom prostoru, i kako se definiše anharmonijski odnos bilo koje četiri tačke. Takođe smo videli kako se dobija projektivni iz deskriptivnog prostora. U deskriptivnom prostoru, kada idealna tačka ima realni korelativ (to jest kada je snop linija koji ima vrh), realnoj tački pridodajemo koordinatu koja pripada idealnoj tački

[1] Projektivnu teoriju rastojanja i ugla dugujemo Kejliju (Cayley) (*Sixth Memoir upon Quantics*, 1859) i Klajnu (*Math. Annalen*, Vol. IV, VI, VII, XXXVII). Potpunije razmatranje od onog koje ćemo ovde pružiti može se pronaći u mojim *Foundations of Geometry*, Cambridge, 1897, §§30–38.

shvaćenoj kao da pripada projektivnom prostoru. Na ovaj način, koordinatna geometrija ta dva prostora postaje vrlo slična, uz tu razliku što u projektivnom prostoru svaki realni skup koordinata daje realnu tačku, dok u deskriptivnom prostoru to važi za svaku koordinatu samo unutar izvesnih granica (od kojih su obe granice isključene). Stoga će u nastavku izlaganja primedbe koje se odnose na projektivni prostor takođe da se odnose i na deskriptivni prostor, osim kada je suprotno eksplicitno istaknuto.

Razmotrimo anharmonijske odnose svih redova *axby*, gde su *a* i *b* fiksirane tačke, a *x* i *y* promenljive tačke na liniji. Neka su α, ξ, β i η koordinate tih tačaka. Onda će $\frac{\xi-\alpha}{\xi-\beta}\Big/\frac{\eta-\alpha}{\eta-\beta}$ biti anharmonijski odnos četiri tačke koje, pošto su α i β konstante, mogu biti pogodno označene sa $(\xi\eta)$. Ako je ζ koordinata neke druge tačke *z*, onda

$$(\zeta\eta)(\eta\zeta) = (\xi\zeta).$$

Otuda

$$\log(\xi\eta) + \log(\eta\zeta) = \log(\xi\zeta).$$

Tako logaritam anharmonijskog odnosa o kome je reč ima jedno od suštinskih svojstava rastojanja, naime, aditivnost. Ako su *xy*, *yz* i *xz* rastojanja *x*, *y* i *z* uzeta kao da imaju znak, onda mora da važi

$$xy + yz = xz.$$

Takođe važi i $\log(\xi\xi) = 0$ i $\log(\xi\eta) = -\log(\eta\xi)$, što predstavlja još dva svojstva rastojanja. Na osnovu ovih svojstava (od kojih treće sledi iz druga dva) lako je pokazati da sva svojstva rastojanja koja se ne odnose na fiksirane tačke *a* i *b* pripadaju logaritmu o kojem je reč. Stoga, ako zgodnim izborom *a* i *b* rastojanja tačaka *a* i *b* mogu da se usaglase sa rastojanjima koja su izvedena iz logaritma, moći ćemo da poistovetimo rastojanje sa logaritmom. Na ovaj način – tvrdi se – metrička geometrija može u potpunosti da se stavi pod nadležnost projektivne geometrije, jer se slična teorija primenjuje i na uglove između linija i ravni.

408. Razmotrimo najpre slučaj u kojem su naše projektivne tačke idealne tačke deskriptivnog prostora. Neka se *x* smatra fiksiranim i različitim od a i b. Neka se y kreće tako da η postaje sve bliže i bliže jednako β. Kako se η približava β, $\log(\xi\eta)$ će biti uvek konačan ali će uzimati sve vrednosti koje prevazilaze bilo koju vrednost koja može da mu se prida. Ovo se matematički izražava tako što se kaže da ako je ξ bilo koji broj različit od α i β, onda je $\log(\xi\beta)$ beskonačan. [Ako je ξ jednako α ili β, $\log(\xi\alpha)$ i $\log(\xi\beta)$ postaju neodređeni; stoga ćemo pretpostaviti da je ovaj slučaj isključen u onome što sledi]. Stoga a i b moraju da budu na beskonačnom rastojanju od svake tačke izuzev jedna od druge, a njihovo međusobno rastojanje je neodređeno. Dalje, x i y ne smeju da budu razdvojene sa a i b, to jest y mora da pripada segmentu axb ako želimo da rastojanje bude realno; jer, ako $\xi - \alpha$ i $\xi - \beta$ imaju isti znak, $\eta - \alpha$ i $\eta - \beta$ moraju takođe imati isti znak, ali ako $\xi - \alpha$ i $\xi - \beta$ imaju različit znak, $\eta - \alpha$ i $\eta - \beta$ moraju takođe imati različit znak, a ovi uslovi su isti kao i uslov da y mora da pripada segmentu axb. Stoga, ako insistiramo da bilo koje dve realne tačke (to jest tačke koje nisu puko idealne) treba da imaju realno rastojanje (to jest rastojanje mereno brojem koji nije kompleksan ili čisto imaginaran), zahtevaćemo da a i b ispune sledeće uslove: (1) one moraju da budu idealne tačke kojima ne odgovaraju nikakve realne tačke; (2) one moraju da budu granice niza onih idealnih tačaka kojima odgovaraju realne tačke. Ova dva uslova uključuju sve što je prethodno rečeno. Jer, prvo, nema realnog rastojanja između bilo koje dve tačke iz α ili β; stoga α i β ne smeju da budu koordinate realnih tačaka. Drugo, na jednom od dva segmenta koji su određeni sa a i b, postoji realno rastojanje xy koliko god da se ξ ili η približe α ili β; stoga su a i b granice idealnih tačaka kojima odgovaraju realne tačke. Treće, iz poslednjeg iskaza sledi da sve idealne tačke kojima odgovaraju realne tačke pripadaju jednom od dva segmenta ab, a sve idealne tačke kojima ne odgovaraju realne tačke (izuzev a i b samih) pripadaju drugom od dva segmenta ab. Kada su ovi uslovi zadovoljeni, funkcija $\log(\xi\eta)$ imaće sva svojstva koja se zahtevaju za merenje rastojanja.

Ova teorija je primenljiva samo na deskriptivni prostor, jer jedino tamo imamo razlikovanje između idealnih i aktualnih tačaka. I u deskriptivnom prostoru polazimo od asimetrične tranzitivne relacije pomoću koje se generiše poredak na pravoj liniji. Pre nego što pređemo na razvijanje teorije koja je primenljiva i na čist projektivni prostor, ispitajmo još malo prethodnu teoriju koju možemo nazvati *deskriptivnom* teorijom rastojanja.

Prvo, idealne tačke kojima odgovaraju realne tačke, a koje ću zbog kratkoće izražavanja nazvati pravim tačkama, formiraju deo celog niza idealnih tačaka koji je zatvoren. Prave tačke čine polukontinuirani deo ovog zatvorenog niza, to jest, one imaju sva svojstva kontinuuma osim onog da imaju dva kraja. Može se desiti da postoji samo jedna tačka koja nije prava tačka, ili se može desiti da postoje mnoge takve tačke. U prvom slučaju, jedna čisto idealna tačka će biti granica pravih tačaka u oba smera. Ovo je slučaj euklidskog prostora zato što u euklidskom prostoru postoji samo jedan snop linija kojem pripada data linija i koji nema vrh, naime, snop linija koje su paralelne datoj liniji. Stoga, u tom slučaju, tačke *a* i *b* moramo smatrati identičnim. Funkcija $\log(\xi\eta)$ će onda biti nula za sve vrednosti ξ i η i stoga neupotrebljiva kao mera rastojanja. Ali, na osnovu poznatog procesa približavanja granici u ovom slučaju možemo da dobijemo vrednost $\xi - \eta$ za rastojanje[1]. Ovo je uobičajena mera elementarne geometrije i za rastojanje dve tačke u ravni ili u prostoru bi slično trebalo da se i u ovom slučaju dobije uobičajena formula. Ovde uviđamo tačno značenje uobičajenog tvrđenja da je u euklidskom prostoru $+\infty$ isto kao $-\infty$ ili da dva kraja jedne linije koincidiraju. Naravno, činjenica je da linija nema krajeve već određuje samo jednu idealnu tačku koja nije prava tačka i da je to granica pravih idealnih tačaka u oba smera: kada se doda pravim idealnim tačkama, dobijamo zatvoreni kontinuirani niz snopova kojima linija o

[1] Vidi na primer Klein, *Vorlesungen über nicht Euklidische Geometrie*, Götingen, 1893, Vol. I, str. 151ff.

kojoj je reč pripada. Na ovaj način uviđamo da donekle zagonetan izraz ima krajnje jednostavnu interpretaciju.

Ali, može se takođe desiti – a što je slučaj sa hiperboličkim prostorom – da postoje mnoge neprave idealne tačke na liniji. U tom slučaju prave idealne tačke će imati dve određene granice; to će biti snopovi paralela Lobačevskog u dva smera. U ovom slučaju, naša funkcija log($\xi\eta$) ne potrebuje nikakvu modifikaciju, već izražava rastojanje onakvo kakvo je. Idealne tačke *a* i *b* su različite i to se uobičajeno izražava tako što se kaže da naša linija ima dve realne i različite tačke u beskonačnosti.

Tako u deskriptivnom prostoru u kojem su naše koordinate dobijene korelacijom sa onima izvedenog projektivnog prostora, uvek je moguće definisati izvesnu funkciju projektivnih koordinata koja će ispuniti uslove koji se zahtevaju za merenje rastojanja. Ovi uslovi mogu da se nabroje na sledeći način[1]. (1) Svaki par realnih tačaka treba da ima rastojanje čija je mera realna i konačna, a gubi se samo kada dve tačke koincidiraju. (2) Ako su *x*, *y* i *z* kolinearne tačke, a *y* je između *x* i *z*, zbir merâ od *xy* i *yz* treba da bude mera od *xz*. (3) Kako se idealna tačka koja odgovara *y* približava idealnoj tački koja je granica pravih idealnih tačaka, dok *x* ostaje fiksirano, apsolutna vrednost mere od *xy* treba da raste bez granice.

Međutim, mogli bismo da se zapitamo zašto bismo želeli da definišemo funkciju dve varijabilne tačke koje imaju ova svojstva. Ako matematičar odgovori da je njegov jedini cilj zabava, njegov postupak će biti logički bespogovoran, ali krajnje frivolan. Međutim, teško da će on dati takav odgovor. Činjenica je da imamo pojam prostiranja i, na osnovu opšteg aksioma da svaka klasa ima neku veličinu deljivosti, znamo da prostiranje ima veličinu. Ali, bez neke posebne pretpostavke ne znamo da li prostiranje zadovoljava Arhimedov aksiom i aksiom linearnosti. Kada se to jednom pretpostavi,

[1] Cf. Whitehead, *Universal Algebra*, knjiga VI, glava I. Ograničavam se na tekst o rastojanjima na pravoj liniji.

prethodna svojstva mere rastojanja postaju svojstva koja moraju da pripadaju meri prostiranja. Ali, ako ne pretpostavimo ova dva aksioma, onda nema razloga zašto bi trebalo da postoji bilo koja veličina koja ima meru četiri gorenavedene karakteristike. Stoga, deskriptivna teorija rastojanja, ako ne treba da je smatramo čisto frivolnom, nije oslobođena potrebe za ovim aksiomima. Ono što ovo pokazuje – a to je jedna izvanredno značajna činjenica – jeste da, ako su prostiranja numerički merljiva, onda se ona mere konstantnim umnoškom logaritma anharmonijskog odnosa dve idealne tačke koje su povezane sa krajevima prostiranja zajedno sa tim dvama idealnim tačkama koje ograničavaju niz pravih idealnih tačaka; ili, u slučaju da je par tih tačaka identičan, prostiranje se meri funkcijom koja je dobijena kao granica prethodnog niza pravih idealnih tačaka kada se dati par približava identitetu a konstantni činilac raste bez granice. Ovo je krajnje neobičan rezultat, ali on ne uklanja potrebu za aksiomima koji odlikuju metričku geometriju. Isti zaključak sledi i u pogledu metričke geometrije u ravni ili u tri dimenzije, ali tu nastaju nove komplikacije koje su irelevantne za spor koji sada razmatramo, te se stoga njima nećemo ni baviti.

Značajno je uvideti da pozivanje na dve fiksirane idealne tačke koje su uvedene deskriptivnom teorijom rastojanja nema nikakav analogon u prirodi rastojanja ili samog prostiranja. Ovo pozivanje je u stvari samo pogodan izum, ali ništa više od toga. Prostiranje je u deskriptivnom prostoru potpuno definsiano svojim krajnjim tačkama i ni na koji način ne zahteva pozivanje na dve dalje idealne tačke. A pošto deskriptivna geometrija polazi od prostiranja, nastojanje da potom dobije definiciju prostiranja pomoću četiri tačke predstavljalo bi nepotrebnu komplikaciju. Ukratko, čak i kada bismo imali projektivnu teoriju rastojanja u deskriptivnom prostoru, ona više ne bi bila čisto projektivna pošto je ceo projektivni prostor sastavljen od idealnih elemenata izvedenih iz aksioma koji ne važe u samom projektivnom prostoru.

409. Ostaje da se ispita projektivna teorija rastojanja u projektivnom prostoru. Teorija koju smo do sada ispitivali bila je deskriptivna a ne projektivna, pošto smo koristili razlikovanje realnih i idealnih elemenata; sada moramo da ispitamo odgovarajuću teoriju čisto projektivne geometrije. Tu nema idealnih elemenata koji su asocirani sa linijom; ako su stoga α i β realni i različiti brojevi, oni će biti koordinate realnih i različitih tačaka. Stoga će biti realnih tačaka x i y, koje će biti razdvojene sa a i b i koje će imati imaginarnu meru rastojanja. Tome ne bi moglo ništa da se prigovori da nije činjenica da želimo da naša mera bude mera prostiranja. To je razlog iz kojeg želimo da bilo koje dve realne tačke imaju realnu meru rastojanja. Kako bismo osigurali ovaj rezultat u čisto projektivnom prostoru, nužno je da α i β ne budu koordinate tačaka uopšte nego da budu konjugovani kompleksni brojevi. Dalje je nužno da konstantni umnožak logaritma bude čisto imaginaran. Onda uviđamo da rastojanje dve realne tačke uvek ima realnu meru koja predstavlja inverzni kosinus[1]. U projektivnom prostoru, uslov (2) iz §408 uvodi komplikacije pošto *između* nema jednostavno značenje kakvo ima u deskriptivnom prostoru. Definiciju *između* u ovom slučaju uspešno je formulisao gospodin Vajthed u *Univerzalnoj Algebri* (§206).

410. Ali, ako takva funkcija treba da bude u pravom smislu geometrijska i ako treba da pruži tačnu projektivnu teoriju rastojanja, biće neophodno pronaći neki geometrijski entitet kojem odgovaraju naši konjugovani kompleksni brojevi α i β. To se može učiniti pomoću involucija. Mada u projektivnom prostoru nema idealnih tačaka, ipak ima onoga što bismo mogli nazvati idealnim parovima tačaka. U Glavi XLV smo razmatrali involucije sa realnim dvostrukim tačkama: ako su a i b dve tačke na liniji, svi parovi tačaka x i x', takvi da su x i x' harmonijski konjugati s obzirom na a i b, formiraju involuciju. U ovom slučaju se za x i x' kaže da su konjugovani; i a i b su

[1] Ovo je forma koju je prvobitno dao Kejli u *The Sixth Memoir upon Quantics*. Jednostavniju logaritamsku formu dugujemo Klajnu.

samokonjugati i nazivaju se dvostrukim tačkama involucije. Ali, takođe postoje i involucije bez realnih dvostrukih tačaka. Opšta definicija involucije glasi (zamenom para x i x' relacijom od x prema x'): Involucija tačaka je simetrična jedan-jedan relacija različita od identiteta, čiji su domen i konverzni domen jedna ista prava linija, i koja je takva da je svaka klasa referencija projektivno slična odgovarajućoj klasi relata. Takva relacija je ili strogo aliorelativna ili je samorelativna u pogledu dve i samo dve tačke, naime, dvostrukih tačaka ove involucije. Tu će za svaki par različitih tačaka na liniji kao dvostrukih tačaka, postojati jedna i samo jedna involucija: *svi* parovi tačka (upotrebljavajući ovaj izraz tako da isključi identitet dve tačke para) stoje u jedan-jedan korelaciji sa *istim* involucijama. Tako involucije možemo nazvati idealnim parovima tačaka: oni koji odgovaraju stvarnom paru tačaka nazivaju se *hiperbolički*, a oni drugi *eliptički.* Tako je idealan par tačaka jedan i nedeljiv pošto je zapravo jedan-jedan relacija. Dva prava idealna para tačaka imaju anharmonijski odnos koji je definisan njihovim odgovarajućim dvostrukim tačkama: dva neprava idealna para tačaka ili jedan pravi i jedan nepravi idealni par tačaka stoje u analognoj projektivnoj relaciji koja se meri funkcijom koja je kao i gore dobijena iz pretpostavke da su α i β konjugovani kompleksni brojevi. Tu funkciju možemo nazvati anharmonijskim odnosom dva idealna para tačaka. Ako je jedan fiksiran i nepravi a drugi varijabilan i pravi, imaginarni umnožak logaritma rezultirajućeg anharmonijskog odnosa ima svojstva koja se zahtevaju za meru rastojanja stvarnog para tačaka koji odgovara pravom idealnom paru tačaka. Ovo nam pruža čistu projektivnu teoriju rastojanja. Ali, ovoj teoriji se, kao nešto što je više od čisto tehničke elaboracije, mogu uputiti iste primedbe kao i u slučaju deskriptivnog prostora; to će reći, ukoliko ne postoji neka veličina koja je određena svakim aktualnim parom tačaka, nema razloga za proces kojim dobijamo meru rastojanja koju smo prethodno imali u vidu, a ako postoji takva veličina, onda prethodni proces daje samo meru ali ne i definiciju veličine o kojoj je reč. Tako prostiranje ili rastojanje ostaje fundamentalni entitet čija su svojstva takva da gorenavedeni metod daje meru, ali ne definiciju rastojanja ili prostiranja[1].

411. Međutim, postoji jedan drugi i jednostavniji metod uvođenja metričkih pojmova u projektivni prostor, a u tom metodu rastojanje prirodno prati uvođenje koordinata. Neka su p, q i r tri fiksirane tačke, abc linija koja ne prolazi kroz p ili q ili r već se nalazi u ravni pqr. Neka qr prolazi kroz a, rp kroz b, a pq kroz c. Neka je R_1 relacija koja važi između x i y kada su x i y tačke na abc, a xr i yq se seku na ap; i neka su R_2 i R_3 slično definisane. Onda se Mebijusova mreža može tretirati kao konstruisana ponavljanjima relacija R_1, R_2 i R_3. Tada će važiti, ako xR_1y i yR_1z, onda $xH_{ay}z$. Možemo da definišemo kvadratni koren od R_1 ili bilo koji stepen od R_1 čiji je indeks pozitivan ili negativan stepen od 2. Dalje, ako je s bilo koja tačka od qr, a xR'_1y znači da su x i y na abc i xr, a xr i ys se seku na ap, onda $R_1R'_1 = R'_1R_1$. Na osnovu ovih iskaza koji su dokazani čisto projektivnim metodama sledi da ako su α i β brojevi možemo da definišemo $R_1^{\alpha+\beta}$ tako da znači $R_1^{\alpha}R_1^{\beta}$, pod uslovom da su R_1^{α} i R_1^{β} već prethodno definisani; otuda, pošto $R_1^{2^n}$ može da se definiše ako je n pozitivan ili negativan ceo broj, svi racionalni stepeni od R_1 mogu da se definišu, a iracionalni stepeni mogu da se definišu kao granice. Stoga, ako je x bilo koji pozitivan ili negativan realan broj, možemo da definišemo R_1^{x} zato što možemo da poistovetimo R_1^{-x} sa $\breve{R}_1^{x}$. Sada ovu relaciju R_1^{x} možemo uzeti kao *rastojanje* bilo koje dve tačke između kojih se ono nalazi i smatrati x merom tog rastojanja. Uvidećemo da tako definisana rastojanja imaju uobičajena svojstva euklidskog rastojanja, izuzev toga što je rastojanje a od bilo koje druge tačke beskonačno. Stoga na projektivnoj liniji bilo koje dve tačke zaista stoje u relaciji koja se može nazvati rastojanjem, i u ovom smislu projektivna teorija metričkih svojstava može biti opravdana. Ali ne znam da li se ovaj metod može proširiti na ravan ili na prostor.

---

[1] O ovom metodu uvođenja imaginarnih brojeva u projektivnu geometriju vidi von Staudt, *Beiträge zur Geometrie der Lage*, I, §7.

Rezimirajmo: Iako je uobičajena takozvana projektivna teorija rastojanja i u deskriptivnom i u projektivnom prostoru čisto tehnička, takvi prostori ipak nužno poseduju metrička svojstva koja se mogu definisati i izvesti bez novih nedefinljivih ili nedokazivih. Ali, metrička geometrija kao nezavisan predmet istraživanja zahteva novu ideju veličine deljivosti niza koja je nedefinljiva i, strogo govoreći, ne pripada čistoj matematici. Ta ideja je primenjena i na prostiranja, uglove, površine itd. i pretpostavljeno je da sve veličine o kojima se tu radi podležu Arhimedovom aksiomu i aksiomu linearnosti. Bez ovih aksioma mnogi uobičajeni iskazi metričke geometrije ne mogu da se dokažu na uobičajeni metrički način; sa ovim aksiomima uobičajena vrsta elementarne geometrije postaje moguća, a rezultati kao što su jedinstvenost kvadrilateralne konstrukcije mogu da se dokažu bez tri dimenzije. Stoga postoji jedna uistinu posebna nauka metričke geometrije ali, pošto ona uvodi novu nedefinljivu, samim tim ne pripada čistoj matematici u smislu u kojem se ta reč upotrebljava u ovoj knjizi. Kao što se često pretpostavlja, ona ne zahteva rastojanja i uglove kao neke nove realacije između tačaka ili linija ili ravni, već su prostiranja i veličine deljivosti u svakom pogledu dovoljni. Sa druge strane, i projektivna i deskriptivna geometrija su nezavisne od svih metričkih pretpostavki i obe omogućavaju razvijanje metričkih svojstava iz njih; stoga, pošto one pripadaju čistoj matematici, čisti matematičar bi trebalo da prihvati projektivnu ili deskriptivnu teoriju o metričkim pitanjima. Istina, postoji jedna druga metrička geometrija koja se bavi rastojanjima definisanim kao jedan-jedan relacije koje imaju izvesna svojstva, i taj predmet jeste deo čiste matematike, ali je strahovito komplikovan i zahteva zaprepašćujući broj aksioma. Stoga, izvođenje metričkih svojstava iz definicije projektivnog ili deskriptivnog prostora ima stvarni značaj i, uprkos tome što bi moglo da deluje suprotno, sa stanovišta čiste matematike pruža istinsku simplifikaciju i unifikaciju metoda.

Glava XLIX

DEFINICIJE RAZNIH PROSTORA

412. U prethodnim razmatranjima različitih geometrija, radi pogodnosti sam po pravilu prihvatao razliku između definicija i nedefinljivih sa jedne i aksioma ili postulata sa druge strane. Ali, ova razlika u čistoj matematici nije validna, osim u vezi sa idejama i iskazima logike. U čistoj matematici svi iskazi izražavaju logičke implikacije koje sadrže promenljivu. To je zapravo definicija ili deo definicije čiste matematike. Navedene implikacije moraju u celosti da proizlaze iz iskaza logike koji prethode iskazima drugih grana matematike. Logika i ostatak čiste matematike se razlikuju od primenjene matematike na osnovu toga što su u njoj sve konstante definljive pomoću nekih osam fundamentalnih pojmova koje smo se složili da zovemo logičkim konstantama. Ono što razlikuje druge grane matematike od logike jeste jedna puka komplikacija koja se uobičajeno javlja u formi hipoteze da promenljiva pripada nekoj prilično komplikovanoj klasi. Takva klasa će uobičajeno biti označena jednim simbolom, a tvrđenje da klasa o kojoj je reč treba da bude predstavljena takvim i takvim simbolom jeste ono što matematičari nazivaju *definicijom*. Drugim rečima, definicija uopšte nije deo matematike i ne tvrdi ništa o entitetima kojima se bavi matematika već je naprosto i jedino iskaz o skraćivanju na nivou simbola: ona je iskaz koji se tiče simbola, a ne onoga što je simbolizovano. Naravno, ne mislim da tvrdim da reč *definicija* nema neko drugo značenje, već samo da je to njeno pravo matematičko značenje. Celokupna matematika je izgrađena kombinacijom određenog broja primitivnih ideja, a svi njeni iskazi mogu, po cenu dužine rezultujućih formula, biti eksplicitno izraženi pomoću tih primitivnih ideja; stoga su sve definicije teorijski izlišne. Ali dalje, kada se logika proširi kao što i treba, tako da uključi opštu teoriju relacija, verujem da ne postoje primitivne ideje u matematici osim onih koje pripadaju domenu logike. U prethodnim glavama ovog dela govorio sam kao što i većina autora čini o izvesnim nedefinljivim u geometriji. Ali, to je bio ustupak koji sada mora da se ispravi. U matematici su dve klase entiteta koje imaju unutrašnje relacije istog logičkog tipa ekvivalentne. Stoga se nikada ne bavimo jednom klasom entiteta, već sa celom klasom klasa, naime, sa svim klasama koje imaju unutrašnje relacije nekog specifičnog tipa. A pod *tipom* jedne relacije mislim na njena čisto logička svojstva, takva koja se označavaju rečima jedan-jedan, tranzitivnost, simetričnost itd. Tako smo, na primer, definisali klasu klasa nazvanu *progresija* pomoću izvesnih logičkih karakteristika unutrašnjih relacija termina bilo koje klase koja je progresija, i utvrdili smo da se konačna aritmetika, ukoliko se uopšte bavi brojevima a ne terminima ili klasama kojima brojevi mogu da se pridodaju, jednako primenjuje na sve progresije. A kada je shvaćeno da sve matematičke ideje osim ideja logike mogu da se definišu, onda se takođe vidi i da ne postoje primitivni iskazi u matematici izuzev iskaza logike. Takozvani aksiomi geometrije su, na primer, kada se geometrija smatra granom čiste matematike, puka protaza u hipotetičkim iskazima koji konstituišu nauku. Oni bi bili primitivni ukoliko bi i oni sami kao i u primenjenoj matematici bili tvrđeni; ali, sve dok samo tvrdimo hipotetičke iskaze (to jest iskaze oblika „*A* implicira *B*“) u kojima se pretpostavljeni aksiomi javljaju kao protaze, nema razloga da se protaze tvrde niti, sledstveno, da se pravi aksiomi priznaju. Moj cilj u ovoj glavi jeste da izvršim čisto formalni zadatak koji se nameće ovakvim razmatranjima i da izložim stroge definicije raznih prostora iz kojih će bez ikakvih nedefinljivih i bez primitivnih iskaza slediti različite geometrije. Zadovoljiću se sa definicijom nekih značajnijih prostora, pošto se moj cilj uglavnom i sastoji u tome da pokažem da su takve definicije moguće.

413. (1) *Projektivni prostor od tri dimenzije*. – Projektivni prostor od tri dimenzije jeste bilo koja klasa entiteta koja je takva da postoje barem dva člana te klase; između bilo koja dva različita člana postoji jedan i samo jedan simetričan aliorelativ koji je povezan i koji je tranzitivan sve dok njegova aliorelativnost to dopušta, a ima i dalja svojstva koje ćemo uskoro morati ukratko da navedemo; koji god takav aliorelativ da uzmemo, postoji termin projektivnog prostora koji ne pripada polju tog aliorelativa, a koje polje je u potpunosti sadržano u projektivnom prostoru i radi kratkoće nazvano *pravom linijom* i označeno sa *ab*, ako su *a* i *b* bilo koja dva njegova termina; svaka prava linija koja sadrži dva termina, sadrži barem još jedan termin; ako su *a*, *b* i *c* bilo koja tri termina projektivnog prostora tako da *c* ne pripada klasi *ab*, onda postoji barem jedan termin projektivnog prostora koji ne pripada nijednoj klasi *cx*, gde je *x* bilo koji termin od *ab*; pod istim okolnostima, ako je *a*' termin od *bc*, a *b*' termin od *ac*, klase *aa*' i *bb*' imaju zajednički deo; ako je *d* bilo koji termin različit od *a* i *b* klase *ab*, a *u* i *v* bilo koja dva termina takva da *d* pripada klasi *uv*, ali nijedno *u* niti ijedno *v* ne pripadaju klasi *ab*, i ako je *y* jedini termin zajedničkog dela od *au* i *bv*, *z* jedini termin zajedničkog dela od *av* i *bu*, a *x* jedini termin zajedničkog dela od *yz* i *ab*, onda *x* nije identično sa *d* (pod ovim okolnostima može se dokazati da je termin *x* nezavisan od *u* i *v*, i da je jedinstveno određen sa *a*, *b* i *d*; otuda, *x* i *d* stoje u asimetričnoj jedan-jedan relaciji koja radi kratkoće može da se označi sa $xH_{ab}d$; ako su *y* i *e* neka dalja dva termina projektivnog prostora koji pripadaju klasi *xd* takvi da postoje i dva termina *g* i *h* klase *xd* za koje važi $gH_{xd}h$ i $gH_{ye}h$, onda radi kratkoće pišemo $yQ_{xd}e$ kako bismo izrazili ovu relaciju četiri termina *x*, *d*, *y* i *e*); projektivni prostor je takav da je relacija Q_{xd} tranzitivna, ma koji termini ovog prostora da su x i d; a takođe je i takav da će, ako su a, b, c i d bilo koja četiri različita termina prave linije, važiti dva i samo dva od iskaza $aQ_{bc}d$, $aQ_{bd}c$ ili $aQ_{cd}b$; na osnovu svojstava projektivnog prostora proizlazi da termini linije formiraju niz; taj niz je kontinuiran u smislu koji smo definisali u §277; na kraju, ako su a, b, c, d i e bilo kojih pet termina projektivnog prostora, u klasi ae će postojati barem jedan termin x, a u klasi cd barem jedan termin y, takav da x pripada klasi by.

Ovo je formalna definicija projektivnog prostora od tri dimenzije. Svaka klasa entiteta koja zadovoljava ovu definiciju jeste projektivni prostor. Stavio sam u zagrade pasus u kojem se ne uvodi nijedno novo svojstvo projektivnog prostora, a što je trebalo da posluži samo svrsi jezičke pogodnosti. Postoji jedna cela klasa projektivnih prostora koja ima beskonačno mnogo članova. Teorema egzistencije pre svega može da se dokaže konstruisanjem projektivnog prostora pomoću kompleksnih brojeva, u čisto aritmetičkom smislu definisanom u §360. Dakle, znamo da ta klasa projektivnih prostora ima barem četiri člana pošto znamo da su u njoj sadržane četiri potklase, od kojih svaka ima barem jedan član. Prvo, imamo prethodni aritmetički prostor. Drugo, imamo projektivni prostor deskriptivne geometrije u kome termini projektivnog prostora predstavljaju snopove linija u deskriptivnom prostoru. Treće, imamo polarnu formu eliptičkog prostora koju karakteriše dodatak izvesnih metričkih svojstava prostiranja saglasnih sa ali ne i impliciranih definicijom projektivnog prostora. Četvrto, imamo antipodalnu formu eliptičke geometrije u kojoj su termini projektivnog prostora parovi termina eliptičkog prostora o kojem je reč. Bilo koji broj varijateta projektivnog prostora može da se dobije dodavanjem svojstava koja nisu u skladu sa ovom definicijom – na primer, insistiranjem da sve ravni moraju da budu crvene ili plave. U stvari, svaka klasa od 2^{α_0} termina (to jest broj termina kontinuiranog niza) jeste projektivni prostor jer, kada su dve klase slične, ako jedna predstavlja polje neke relacije, druga će biti polje njoj slične relacije, te će stoga korelacijom sa projektivnim prostorom svaka klasa od 2^{α_0} termina i sama postati projektivni prostor. Činjenica je da je stanovište geometrije linije fundamentalnije u pogledu definicije: projektivni prostor bio bi najbolje definisan kao klasa *K* relacija čija su polja prave linije koje zadovoljavaju gorenavedene uslove. Ova poenta je strogo analogna supstituciji nizova – za koje smo u Četvrtom delu utvrdili da su poželjni – serijalnim relacijama. Kada neki skup termina treba da se smatra poljem klase relacija, pogodno je izostaviti termine i govoriti samo o klasi relacija pošto ona podrazumeva termine dok oni nju ne podrazumevaju.

Značajno je primetiti da je definicija prostora kao i definicije većine drugih entiteta izvesne složenosti, proizvoljna unutar određenih granica. Jer, ako postoji bilo koje svojstvo koje je implicirano ili koje implicira jedno ili više svojstava koja su upotrebljena u definiciji, onda možemo da vršimo zamenu i da umesto jednog ili više tih svojstava stavimo neko novo svojstvo. Na primer, umesto definisanja linije relacijom između tačaka, moguće je definisati liniju i kao klasu koja stoji u izvesnoj relaciju prema paru tačaka. U ovakvim slučajevima možemo da se vodimo samo motivima koji se tiču jednostavnosti.

Jedva da je nužno dati formalnu definiciju deskriptivnog ili metričkog prostora, pošto bi prethodni model trebalo da pokaže kako bi jedna takva definicija mogla da se konstruiše. Umesto toga ću da dam definiciju euklidskog prostora. Nju ću dati u formi koja nije podesna kada se euklidski prostor tretira kao granica izvesnih neeuklidskih prostora, ali koja je veoma podesna za kvaternione i vektorski kalkulus. Ovu formu je usvojio Peano[1], a ona vodi veoma jednostavnom objašnjenju euklidskih aksioma. Ja neću strogo da sledim Peana, ali će moje objašnjenje biti vrlo slično njegovom.

414. (2) *Euklidski prostor od tri dimenzije*. – Euklidski prostor od tri dimenzije je klasa termina koja sadrži barem dva člana, takva da

---

[1] „Analisi della Teoria dei vettori“, Torino, 1898 (*Accademia Reale delle Scienze di Torino*).

bilo koja dva od njih stoje u jednoj i samo jednoj asimetričnoj jedan-jedan relaciji klase koju ćemo nazvati klasom vektora, a koja je određena sledećim karakteristikama[1]: konverzija vektora ili relativan proizvod dva vektora takođe je vektor; ako dati vektor stoji između *a* i *b* i *c* i *d*, onda je vektor koji stoji između *a* i *c* isti kao vektor koji stoji između *b* i *d*; bilo koji termin prostora stoji u nekoj datoj relaciji klase prema barem jednom terminu tog prostora; ako je *n*-ti stepen (gde je *n* bilo koji ceo broj) bilo kojeg vektora klase identitet, onda je sam vektor identitet; postoji vektor čiji je *n*-ti stepen dati vektor; bilo koja dva vektora stoje u jednoj i samo jednoj simetričnoj relaciji izvesne klase koja ima sledeća svojstva: relacija bilo koja dva vektora meri se pozitivnim ili negativnim realnim brojem, i takva je da se relacija vektora prema njemu samom uvek meri pozitivnim brojem i da je mera relacije relativnog proizvoda dva vektora prema trećem vektoru zbir merâ njihovih nekolikih relacija prema trećem vektoru; postoji vektor koji zadovoljava definiciju iracionalnog stepena vektora koju ćemo navesti dole: postoje vektori koji nisu relativni proizvodi stepena dva data vektora; ako su *i*, *j* i *k* tri vektora, nijedan od njih nije relativni proizvod stepena jednog ili oba druga, onda su svi vektori relativni proizvodi stepena *i*, *j* i *k*.

Ono što je ovde jedino neophodno objasniti jeste pojam iracionalnog stepena vektora i merljiva relacija dva vektora. Svi racionalni stepeni su određeni; jer, svaki vektor ima *n*-ti koren, a *n*-ti koren ima *m*-ti stepen koji je (*m/n*)-ti stepen prvobitnog vektora. Ali, ne sledi da realni stepeni koji nisu racionalni mogu da se definišu. Definicija granica klasa vektora koju je dao Peano[2], kada se prevede na jezik relacija, glasi ovako. Neka je *u* klasa realnih brojeva, a x_0 broj koji pripada izvodu od *u*. Neka postoji neka jedan-jedan relacija između

---

[1] Zarad čitaoca bi bilo dobro primetiti da ova relacija odgovara relaciji biti na datom rastojanju u datom smeru – pri čemu je smer uzet u smislu u kojem sve paralelne linije imaju isti smer.

[2] *Op. cit.*, str. 22.

svih *u*-ova i nekih ili svih vektora; i neka je *v* klasa vektora korelirana sa *u*. Onda se za vektor *a* kaže da predstavlja granicu klase *v* kako se *x* približava x_0 u klasi *u*, kada je granica mere relacije vektora prema samoj sebi koja, relativno pomnožena sa *a* daje korelat od *x* u klasi *v*, nula. Poenta ove definicije je upotreba poretka dobijenog među vektorima pomoću merljive relacije u kojoj svaki stoji prema sebi. Pretpostavimo tako da imamo progresiju $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ racionalnih brojeva, i pretpostavimo da su oni mere relacija, samih prema sebi, vektora $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ Onda, ako je *x* granica od $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ mora da postoji vektor čija se relacija prema njemu samom meri sa *x*, a to treba da bude granica vektora $a_1, a_2, ..., a_n, ...$, te tako iracionalni stepeni vektora postaju definljivi. Druga stvar koju treba da ispitamo jeste merljivost relacije između dva vektora. Ova relacija pomoću elementarne geometrije meri proizvod dva prostiranja predstavljena vektorima kao kosinus ugla između njih: rečeno jezikom računa ekstenzije, to je unutrašnji proizvod ta dva vektora. Reći da je relacija merljiva pomoću realnih brojeva znači, u smislu u kojem se ovaj izraz upotrebljava, da sve takve relacije stoje u jedan-jedan relaciji prema nekim ili svim realnim brojevima; dakle, iz postojanja iracionalnih stepena sledi da sve takve relacije formiraju kontinuirani niz; reći da se relacija vektora prema njemu samom uvek meri pozitivnim brojem znači da postoji jedan presek (u Dedekindovom smislu) kontinuiranog niza relacija takav da se sve te relacije u kojima vektori mogu da stoje prema samima sebi javljaju na jednoj strani tog preseka: dok se može dokazati da je relacija koja definiše presek relacija koju vektorski identitet ima prema sebi.

Naravno, ova definicija nipošto nije jedina definicija koja može da se da za euklidski prostor, ali mislim da je ona najjednostavnija. Zbog toga, ali i zbog toga što ona pripada redu ideja kojima su, pošto su suštinski euklidske, strani metodi iz prethodnih glava, smatrao sam da vredi da je ovde ubacim.

415. Kao drugi primer koji može da posluži za proširenje naših ideja, uzeću prostor koji je izumeo Kliford (Clifford) ili, radije, prostor koji je formalno analogan njegovoj površini nulte zakrivljenosti i konačne protežnosti[1]. Najpre ću ukratko da objasnim prirodu ovog prostora, a onda ću da pređem na formalnu definiciju. Prostori ovog tipa mogu da imaju bilo koji broj dimenzija, ali ću radi jednostavnosti da se ograničim na dve dimenzije. U ovom prostoru, većina uobičajenih euklidskih svojstava i dalje važi s obzirom na figure koje ne prelaze izvesnu veličinu, to jest zbir uglova u trouglu jednak je dvama pravim uglovima, i postoje kretanja koja se zovu translacije, a u kojima se sve tačke kreću duž pravih linija. Ali, u drugim pogledima, ovaj prostor se veoma razlikuje od euklidskog. Pre svega, prava linija je zatvoreni niz, a ceo prostor ima konačnu površinu. Drugo, svako kretanje je translacija; kružna transformacija (transformacija koja održava rastojanja od izvesne fiksirane tačke nepromenjenim) nipošto nije kretanje, to jest nipošto ne ostavlja svako rastojanje nepromenjenim; ali, sve translacije kao i u euklidskom prostoru mogu da se sastave od translacija u dva fiksirana smera. U ovom prostoru, kao i kod Euklida, imamo paralele, to jest prave linije koje ostaju razdvojene na jednom konstantnom rastojanju i mogu se istovremeno opisati kretanjem; prava linija takođe može da se predstavi pomoću lineranih jednačina. Ali, formula za rastojanje potpuno se razlikuje od euklidske formule. Tako, ako je πk dužina cele prave linije, a (x, y) i (x', y') koordinate bilo koje dve tačke (odabirajući sistem u kojem prava linija ima linearnu jednačinu), onda, ako je ω ugao između linija $x = 0$ i $y = 0$, rastojanje dve tačke o kojima je reč je d, pri čemu

$$\cos\frac{d}{k} = \cos(x - x')\cos(y - y') - \cos\omega\sin(x - x')\sin(y - y')$$

[1] O ovim prostorima uopšte, od kojih je ovo najjednostavniji primer, vidi Klein, *Math. Annalen* XXXVII, str. 554–565, i Killing, *Grundlagen der Geometrie*, Vol. I, Glava IV.

a formula za ugao između te dve linije je na sličan način komplikovana. Da bismo došli do ovih rezultata, možemo da damo sledeću definiciju.

(3) *Klifordov prostor od dve dimenzije*. – Klifordov prostor od dve dimenzije je klasa od barem dva termina između bilo koja dva od kojih postoje dve relacije različitih klasa nazvane rastojanje i pravac, a koje imaju sledeća svojstva: *pravac* je simetrični aliorelativ, tranzitivan sve dok njegova aliorelativnost to dopušta, ali nije povezan; termin prostora uzet zajedno sa svim terminima prema kojima taj termin stoji u datoj relaciji pravca, formira ono što se naziva prava linija; nijedna prava linija ne sadrži sve termine prostora; svaki termin prostora stoji u bilo kojoj relaciji smera prema nekim ali ne svim terminima prostora; nijedan par termina ne stoji u više od jednoj relaciji pravca; *rastojanja* su klasa simetričnih relacija koje formiraju kontinuirani niz koji ima dva kraja, od kojih je jedan identitet; sva rastojanja osim identiteta su netranizitivno aliorelativna; svaki termin prostora stoji u bilo kojoj datoj relaciji rastojanja prema nekim, ali ne svim terminima prostora; bilo koji dati termin prostora stoji na bilo kojem datom rastojanju i u bilo kojem datom pravcu od dva i samo dva druga termina prostora, osim ako dato rastojanje nije jedan od krajeva niza rastojanja; u tom slučaju, ako je dato rastojanje identitet, onda ne postoji termin koji stoji na tom rastojanju i koji je u datom smeru od datog termina, ali ako je rastojanje drugi kraj niza, onda postoji jedan i samo jedan termin koji nije na datom rastojanju i u datom smeru od datog termina; rastojanja na jednoj pravoj liniji imaju svojstva koja smo naveli u Glavi XLVII a koja su potrebna za generisanje poretka među terminima jedne prave linije; jedina kretanja, to jest jedan-jedan relacije čiji su domen i konverzni domen svaki prostor o kojem je reč i koja ostavljaju sva rastojanja između relata istim kao i ona između odgovarajućih referencija, takva su da se sastoje iz kombinacije datog rastojanja, datog pravca i jednog od dva smera niza koji konstituiše pravu liniju; a svaka ovakva kombinacija je ekvivalentna relativnom proizvodu nekog rastojanja u jednom

fiksiranom pravcu sa nekim rastojanjem u drugom fiksiranom pravcu, pri čemu su oba uzeta u podesnom smeru; na kraju, svi mogući pravci formiraju jedan zatvoren kontinuirani niz na osnovu uzajamnih relacija.

Mislim da ovo kompletira definiciju Klifordovog prostora od dve dimenzije. Treba primetiti da u ovom prostoru rastojanje ne može da se poistoveti sa prostiranjem zato što (1) imamo samo dve dimenzije tako da ne može da se generiše zatvoreni niz termina na liniji pomoću projektivnih metoda[1], (2) linija mora da bude zatvorena tako da ne možemo da generišemo poredak na pravoj liniji pomoću deskriptivnog metoda. Iz sličnih razloga sledi da i pravci i rastojanja moraju da se uzmu kao simetrične relacije, tako da samo nakon generisanog poretka na liniji možemo da razlikujemo dva smera koji mogu da se povežu sa pravcem kako bi ga učinili asimetričnim, a sa rastojanjima u nekom datom pravcu kako bi im se pridodali znaci. Značajno je primetiti da kada se rastojanje uzme kao nezavisno od prave linije postaje nužno, kako bi se razlikovali različiti prostori, pripisati neko svojstvo ili svojstva jedan-jedan relacija ili transformacija koje ostavljaju rastojanja nepromenjenim. Ovaj metod je usvojio Li (Lie) primenjujući u geometriji teoriju kontinuiranih grupa[2] i taj metod je u Lijevim i Klajnovim rukama proizveo rezultate od najvećeg značaja za neeuklidsku geometriju. Ali, pošto je u većini prostora nužno uzeti rastojanje kao nedefinljivo, ja sam mogao, osim u ovom slučaju Klifordovog prostora[3], da usvojim prostiji metod za specifikovanje prostora. Iz tog razloga je bilo važno da ukratko razmotrimo neki

[1] Gospodin Džonson (W. E. Johnson) mi je ukazao na to da bi ova teškoća mogla da se prevlada uvođenjem jedinstvene kvadrilateralne konstrukcije posebnim aksiomom – što je metod koji bi možda bio jednostavniji od ovog ovde.

[2] *Leipziger Berichte*, 1890.

[3] Da sam definisao eliptički prostor od dve dimenzije, morao bih da uzmem rastojanje kao različito od prostiranja, zato što projektivno generisanje poretka ne uspeva u dve dimenzije.

takav prostor kao što je Klifordov kako bismo dali primer definisanja prostora upotrebljavanjem rastojanja i onoga što geometri nazivaju kretanjem .

Nadam se da ono što je rečeno dovoljno pokazuje da je definicija vrste prostora uvek moguća u čisto logičkim terminima, kao i da za to nisu potrebne nove nedefinljive. Ne samo da su stvarni termini koji čine prostor irelevantni i da su samo njihove relacije značajne, nego i te relacije ne zahtevaju pojedinačno određivanje već samo specifikaciju kao članova izvesnih logičkih klasa relacija. Ove logičke klase su elementi koji se koriste u geometrijskim definicijama, i one su definljive pomoću male kolekcije nedefinljivih iz kojih je izgrađen logički kalkulus (uključujući i kalkulus relacija). Ovaj rezultat koji se odnosi i na celu čistu matematiku bio je glavni cilj ove glave.

Glava L

KONTINUITET PROSTORA

416. Filozofi su uobičajeno pretpostavljali da je kontinuitet prostora nešto što ne može dalje da se analizira i smatrali su ga misterijom i nečim što laički um ne može da sagleda. U Petom delu sam tvrdio da je Kantorov kontinuitet sve što zahtevamo kada se bavimo prostorom. U ovoj glavi želim to i da dokažem, u meri u kojoj je to moguće, bez zalaženja u pitanje apsolutnog i relativnog položaja, a što rezervišem za sledeću glavu.

Počnimo sa kontinuitetom projektivnog prostora. Videli smo da su tačke deskriptivnog prostora ordinalno slične tačkama polukontinuiranog dela projektivnog prostora, naime, idealnim tačkama koje imaju realne korelative. Otuda je kontinuitet deskriptivnog prostora iste vrste kao i kontinuitet projektivnog prostora i stoga ne mora da se odvojeno razmatra. Ali, metrički prostor će zahtevati posebnu diskusiju.

Mora se primetiti da geometrije, onako kako se danas tretiraju, ne počinju sa pretpostavljanjem prostora sa beskonačno mnogo tačaka; u stvari, prostor je, kao što primećuje Peano[1], reč koje geometrija veoma lako može da se oslobodi. Geometrije počinju

[1] *Riv. di Mat*. Vol. IV, str. 52.

pretpostavljanjem klasnog pojma *tačka*, zajedno sa izvesnim aksiomima iz kojih mogu da se izvedu zaključci u pogledu broja tačaka. Tako, u projektivnoj geometriji počinjemo sa pretpostavkom da postoje barem dve tačke, i da bilo koje dve tačke određuju klasu tačaka, pravu liniju, kojoj one i barem još jedna druga tačka pripadaju. Tako dobijamo tri tačke. Sada uvodimo novu pretpostavku da postoji barem još jedna tačka koja nije na nekoj datoj pravoj liniji. Ovo nam daje četvrtu tačku; i, pošto moraju da postoje tačke na linijama koje nju povezuju sa našim prethodnim tačkama, dobijamo još tri tačke – ukupno sedam. Stoga možemo da dobijemo beskonačni prebrojiv niz tačaka i linija, ali ne možemo, bez nekih daljih pretpostavki, da dokažemo da postoji više od tri tačke na bilo kojoj liniji. Četiri tačke na liniji proizlaze iz pretpostavke da, ako su *b* i *d* harmonici u odnosu na *a* i *c*, onda su *b* i *d* različite tačke. Ali, da bismo dobili beskonačan broj tačaka na liniji, potrebne su nam dalje pretpostavke iz kojih proizlazi projektivni poredak[1]. Te pretpostavke iziskuju prebrojiv niz tačaka na našoj liniji. Sa time možemo, ako hoćemo, da se zadovoljimo. Takav jedan niz tačaka dobija se sukcesivnim kvadrilateralnim konstrukcijama i, ako želimo da definišemo prostor u kojem bi sve tačke na liniji mogle da se dobiju sukcesivnim kvadrilateralnim konstrukcijama koje polaze od bilo koje tri tačke linije, nikakva protivrečnost ne bi nastala. Takav jedan prostor bi imao ordinalni tip pozitivnih racionalnih brojeva i nule: tačke na liniji bi formirale kompaktni prebrojiv niz sa jednim krajem. Protežnost koja je uvedena pomoću pretpostavke da je niz tačaka kontinuiran nužna je samo ako naš projektivni prostor treba da poseduje uobičajena metrička svojstva – drugim rečima, ako treba da postoji prostiranje sa jednim krajem i njegova prava linija koja mora da bude jednaka nekom datom prostiranju. Sa samo racionalnim tačkama, ovo svojstvo (koje se svodi na Euklidov postulat postojanja kruga) ne može univerzalno da važi. Ali, za čisto projektivne svrhe,

[1] Cf. Pieri, *op. cit.*, §6, Prop. 1.

irelevantno je da li naš prostor ima ovo svojstvo ili ne. Sam aksiom kontinuiteta može da se izrazi u jednom od dva sledeća oblika. (1) Sve tačke na liniji su granice niza racionalnih tačaka, a svi beskonačni nizovi racionalnih tačaka imaju granice. (2) Ako bi se sve tačke na liniji podelile na dve klase, od kojih jedna u celosti prethodi drugoj, onda ili prva klasa ima poslednji termin ili poslednja ima prvi termin, ili ni jedno ni drugo nije slučaj. Kontinuitet koji se dobija iz prve formulacije je tačno Kantorov, a drugi, koji predstavlja Dedekindovu definiciju, nužan je ali ne i dovoljan uslov za Kantorov kontinuitet. Prihvatanjem prve definicije, racionalne tačke bez njihovog prvog termina formiraju beskrajni kompaktni prebrojivi niz, sve tačke formiraju savršen niz, a između bilo koje dve tačke postoji racionalna tačka, što je upravo ordinalna definicija kontinuiteta[1]. Tako, ako projektivni prostor treba da ima kontinuitet, onda mora da ima onu vrstu kontinuiteta koja pripada realnim brojevima.

417. Razmotrimo zatim, kontinuitet metričkog prostora, a radi određenosti uzmimo euklidski prostor. Ovde je pitanje teže, jer se kontinuitet uobičajeno ne uvodi aksiomom *ad hoc* već izgleda da u nekom smislu proizlazi iz aksioma rastojanja. Već je Platonu bilo poznato da nisu sve dužine samerljive, a jedan strog dokaz ove činjenice sadržan je u desetoj knjizi Euklidovih *Elemenata*. Ali, ovo nas i ne vodi baš daleko u smeru Kantorovog kontinuiteta. Srž tvrđenja da nisu sve dužine samerljive, zajedno sa postulatom o krugu, može se izraziti na sledeći način. Ako su *AB* i *AC* dve dužine duž iste prave linije, može se desiti da, ako je *AB* podeljeno na *m* jednakih delova, a *AC* na *n* jednakih delova, onda, kako god da izaberemo *m* ili *n*, jedan od delova *AB* neće biti jednak jednom od delova *AC* nego će biti veći za neku vrednost od *m* ili *n*, a manji za neke druge vrednosti; takođe, dužine koje su jednake bilo kojoj od ovih mogu se uzeti duž bilo koje date linije i sa bilo kojim datim krajnjim tačkama[2]. Ali, ova

[1] Vidi Deo V, Glava XXVI.

[2] Dužina nije sinonimna sa segmentom zato što je za dužinu suštinski da

činjenica nikako ne dokazuje da tačke na liniji nisu prebrojive, pošto su svi algebarski brojevi prebrojivi. Pogledajmo, onda, šta nam naši aksiomi omogućavaju da zaključimo.

U grčkoj geometriji postojala su dva velika izvora iracionanih brojeva, naime, dijagonala kvadrata i obim kruga. Ali, tada nije moglo biti poznato da su ti iracionalni brojevi različite vrste, pošto se jedni mere algebarskim brojem, a drugi transcendentnim brojem. Nije bio poznat nijedan opšti metod za konstruisanje nekog datog algebarskog broja[1], a još manje za konstruisanje nekog datog transcendentnog broja. A koliko mi je poznato, ove metode, osim metode koja se koristi granicama, i dalje nedostaju. Neki algebarski i neki transcendentni brojevi mogu da se konstruišu geometrijski, bez upotrebe granica, ali takve konstrukcije su izolovane, i ne slede nikakav opšti plan. Stoga za sada iz Euklidovih aksioma ne možemo da zaključimo da je prostor kontinuiran u Kantorovom smislu, ili da tačke prostora nisu prebrojive. Od uvođenja analitičke geometrije, neka ekvivalentna pretpostavka je uvek prećutno pravljena. Na primer, pretpostavljano je da će svaka jednačina koja zadovoljava vrednosti promenljivih predstavljati figuru u prostoru, a izgleda i da je takođe univerzalno pretpostavljano da svakom skupu kartezijanskih koordinata mora da odgovara jedna tačka. Ove pretpostavke su bile operativne sve do skora, bez ikakvih diskusija, a izgleda i bez ikakve svesti da su to uopšte pretpostavke.

Kada je prepoznato da je reč o pretpostavkama, postalo je očigledno da i ovde kao i u projektivnom prostoru kontinuitet mora da se uvede aksiomom *ad hoc*. Ali, možemo načiniti sledeću primedbu protiv filozofa. Kantorov kontinuitet je nesumnjivo *dovoljan* da zadovolji sve metričke aksiome, i samo je pitanje da li postojeći prostor mora da ima kontinuitet tako visokog reda. U svakom slučaju,

---

ima krajeve. Ali, za sadašnje svrhe, dužina je sinonimna sa prostiranjem ili rastojanjem.

[1] Radi kratkoće, poistovetiću brojeve sa dužinama koje oni mere.

ako merenje treba da bude teorijski moguće, prostor ne sme da ima *veći* kontinuitet od kontinuiteta realnih brojeva.

Aksiom da tačke na liniji formiraju kontinuirani niz može da se izrazi u formi koja proizlazi iz poboljšanja Dedekinda, ili u formi da je linija savršen niz. U prvoj formi, svaki deo linije je definljiv pomoću samo jedne tačke koja je na jednom kraju jednog od delova nastalih presekom, dok drugi deo nema kraj. U drugoj formi, koja je poželjnija, zato što za razliku od prve ona potpuno definiše ordinalni tip, svaki beskonačni niz tačaka ima granicu, a svaka tačka je granična tačka. Nije nužno dodati da je linija kohezivna[1] jer to proizlazi iz Arhimedovog aksioma i aksioma linearnosti, koji su u svakom slučaju suštinski za merenje. Da li je ovaj aksiom kontinuiteta istinit s obzirom na naš stvarni prostor, jeste pitanje na koje ne vidim kako bismo mogli da odgovorimo. Jer, svako takvo pitanje mora biti empirijsko i bilo bi sasvim nemoguće empirijski razlikovati ono što se može nazvati racionalnim prostorom od kontinuiranog prostora. Ali, u svakom slučaju, nema razloga da se misli da prostor ima višu moć od moći kontinuuma.

418. Aksiom kontinuiteta nam omogućava da se oslobodimo postulata o krugu i da ga zamenimo sledećim parom aksioma. (1) Na svakoj pravoj liniji postoji tačka čije je rastojanje od neke date tačke na liniji manje od nekog datog rastojanja. (2) Na svakoj pravoj liniji postoji tačka čije je rastojanje od neke date tačke koja je na ili van linije veće od nekog datog rastojanja. Iz ove dve pretpostavke, zajedno sa kontinuitetom, može da se dokaže postojanje kruga. Pošto nije moguće obrnuto – izvesti kontinuum iz postulata o krugu – i pošto bi mnogo toga iz analitičke geometrije moglo da bude lažno u diskontinuiranom prostoru, izgleda da je očigledan napredak odstraniti krug iz naših početnih pretpostavki i zameniti kontinuitet sa gorenavedenim parom aksioma.

---

[1] Vidi Deo V, Glava XXXV.

419. Tako nema misterije u kontinuitetu prostora i nema potrebe za bilo kojim pojmovima koji nisu definljivi u aritmetici. Međutim, većina filozofa ima tu ideju da u prostoru celina prethodi delovima[1]; da iako svaka dužina, površina ili zapremina može da se podeli na dužine, površine ili zapremine, ipak ne postoje nedeljivi elementi od kojih su takvi entiteti sastavljeni. Prema tom mišljenju, tačke su puke fikcije, a samo su zapremine pravi entiteti. Zapremine ne treba da se smatraju klasama tačaka već celinama koje sadrže delove koji nikada nisu prosti. Neko takvo gledište poput ovog se zapravo često predlaže kao da izlaže suštinu onoga što bismo mogli da nazovemo kontinuitetom. Ovo pitanje je različito od pitanja o apsolutnom i relativnom položaju koje ćemo razmatrati u sledećoj glavi. Jer, ako tretiramo položaj kao relativan, naše sadašnje pitanje će ponovo da se javi s obzirom na kontinuirane delove materije. Ovo pitanje je zapravo suštinsko u vezi s kontinuitetom, te je stoga ovde mesto da se o njemu raspravlja.

Nizovi koji nastaju u aritmetici, bilo kontinuirani ili ne, suštinski su sastavljeni od termina – celih, racionalnih, realnih brojeva itd. A tamo gde se približavamo kontinuitetu prostora, kao u slučaju realnih brojeva, gde je svaki realni broj segment ili beskonačna klasa racionalnih brojeva i nije moguće ni na koji način poricati da je segment sastavljen od elemenata. U ovom slučaju polazimo od elemenata i postepeno konstruišemo različite beskonačne celine. Ali, u slučaju prostora, kaže nam se, treba početi od beskonačnih celina; elementi su tek izvedeni, a to izvođenje je zasigurno prenagljeno. Ovo pitanje se pre svega tiče logike. Pogledajmo kako je gorenavedeno gledište podržavano.

Oni koji poriču da su nedeljive tačke konstituenti prostora, u prošlosti su imali dve linije argumentisanja na osnovu kojih su podržavali poricanje tačaka. To su bile teškoće sa kontinuitetom i

---

[1] Cf. Leibniz, *Phil. Werke* (Gerhardovo izdanje), II, str. 379 ; IV, str. 491; takođe vidi i moju knjigu *Philosophy of Leibniz*, Glava IX.

beskonačnošću, te način na koji je prostor predstavljan u onome što se prema njihovoj školi naziva čistim opažajem, osećajem ili čulnim opažajem. Kao što smo videli u Petom delu, teškoće u vezi sa kontinuitetom i beskonačnošću su stvar prošlosti, te stoga ta linija argumentisanja nije više otvorena onima koji poriču tačke. Što se tiče drugog argumenta, krajnje je teško dati mu neki precizan oblik – zapravo sumnjam da je to čak i moguće. Možemo uzeti kao prihvaćeno da je sve prostorno čijeg smo postojanja neposredno svesni u osećaju i opažaju složeno i deljivo. Tako, empirijska premisa u ispitivanju prostora jeste tvrdnja o postojanju deljivih entiteta sa izvesnim svojstvima. Ali, ovde bi moglo da bude dobro da napravimo malu digresiju o značenju te empirijske premise.

420. Empirijska premisa je iskaz u koji, iz nekog razloga ili bez ikakvog razloga, verujem i koji je, možemo dodati, egzistencijalan. Pošto smo se složili da prihatimo ovaj iskaz, obično ćemo, prilikom daljeg ispitivanja, uvideti da je on složen i da postoji jedan ili više skupova prostih iskaza iz kojih može da se izvede. Ako je *P* empirijska premisa, neka *A* bude klasa skupova iskaza (u njihovoj najprostijoj formi) iz kojih *P* može da se izvede; i neka se dva člana klase *A* smatraju ekvivalentnim kada impliciraju jedan drugi. Iz istinitosti *P* zaključujemo istinitost jednog skupa klase *A*. Ako *A* ima samo jednog člana, taj član mora da bude istinit. Ali, ako postoje mnogi članovi klase *A* koji nisu svi ekvivalentni, nastojimo da nađemo neku drugu empirijsku premisu *P*' koju impliciraju svi skupovi prostih iskaza klase *A*'. Ako bi se desilo da klase *A* i *A*' imaju samo jednog zajedničkog člana, a da su drugi članovi klase *A* inkonzistentni sa ostalim članovima *A*', taj zajednički član mora da bude istinit. Ako to nije slučaj, onda tražimo novu empirijsku premisu *P*'' itd. Ovo predstavlja suštinu indukcije[1]. Empirijska premisa nije u nekom suštinskom smislu premisa već iskaz do kojeg želimo da dođemo u našem izvođenju. U izboru premisa našeg izvođenja,

[1] Cf. Couturat, *La logique de Leibniz*, Paris, 1901. str. 270.

vođeni smo samo logičkom jednostavnošću i izvodivošću naše empirijske premise.

421. Primenjujući ove primedbe na geometriju, vidimo da je sveopšta želja za samoočiglednim aksiomima potpuna zabluda. Ova zabluda proizlazi iz verovanja da je geometrija našeg stvarnog prostora apriorna nauka zasnovana na opažaju. Kada bi to bio slučaj, ona bi u pravom smislu mogla da se izvede iz samoočiglednih aksioma, kao što je to verovao Kant. Ali, ako je zajedno sa drugim naukama koje se odnose na ono što postoji tretiramo kao empirijsko istraživanje zasnovano na opažanju, vidimo da sve što može legitimno da se zahteva jeste da opažene činjenice slede iz naših premisa i, ako je moguće, ni iz jednog skupa premisa koje nisu ekvivalentne onima koje mi pretpostavljamo. Niko ne prigovara zakonu gravitacije što nije samoočigledan i, slično tome, kada se geometrija uzme kao empirijska, ništa se ne može legitimno prigovoriti aksiomu o paralelama – izuzev, naravno, da kao i zakon gravitacije on treba da bude samo aproksimativno istinit da bi pružio opazive činjenice. Ne može se tvrditi da nikakve druge premise osim onih euklidske geometrije neće dati opazive rezulatate; ali, sve druge koje su dopustive moraju blisko da aproksimiraju euklidske premise. Isto važi i za kontinuitet: ne možemo dokazati da naš stvarni prostor mora biti kontinuiran; kao što ne možemo dokazati ni da nije takav, ali možemo da dokažemo da kontinuirani prostor ne bi bio različit na bilo koji način koji je moguće otkriti od prostora u kojem mi živimo.

422. Vratimo se od ove digresije nazad na naš problem: složili smo se da se *empirijske* premise, a u vezi sa kontinuitetom prostora, uvek tiču deljivih entiteta koji imaju deljive delove. Zapitajmo se, najpre, da li iz ovoga treba da izvedemo zaključak da *logičke* premise nauke o postojećem prostoru (to će reći definicija postojećeg prostora) mogu *ili* moraju da se tiču deljivih entiteta. Na pitanje da li naše premise *moraju* da se odnose na deljive entitete u potpunosti je odgovoreno, na negativan način, aktualnom geometrijom u kojoj je na osnovu nedeljivih tačaka, konstruisan prostor koji je empirijski nerazlučiv od onog u kojem mi živimo. Jedini razlozi koje su filozofi do sada navodili protiv prihvatanja ovog odgovora kao zadovoljavajućeg su ili oni koji su bili izvođeni iz teškoća beskonačnosti i kontinuiteta, ili pak oni koji su bili zasnovani na izvesnoj logičkoj teoriji o relacijama. Prvi su već bili pobijeni, a druge ćemo razmatrati u sledećoj glavi. Pitanje da li naše premise *mogu* da se odnose na deljive entitete je daleko teže i na njega može da se odgovori samo pomoću logičkih razmatranja iz Drugog dela. Tada smo odlučili (§143) da sve što je složeno mora biti sastavljeno od prostih elemenata, a taj zaključak nas vodi ka rešenju našeg sadašnjeg pitanja. Ali ovo nije kraj naših sumnji. U Drugom delu smo razlikovali dve vrste celina, naime, *agregate* i *jedinstva*. Prva vrsta može da se poistoveti, a u svakom slučaju barem za sadašnje svrhe, sa klasama, dok izgleda da je ona druga nerazlučiva od iskaza. Agregati se sastoje od jedinica iz čijeg sabiranja (u smislu koji se pretpostavlja u aritemetici) oni nastaju; nasuprot tome, jedinstva ne mogu da se rekonstituišu sabiranjem njihovih konstituenata. U svim jedinstvima, bar jedan termin je ili predicirani predikat ili relacija koja dovodi u vezu; u agregatima nema takvog termina. Sada, ono što zapravo zastupaju oni koji poriču da je prostor sastavljen od tačaka, po mom mišljenju, jeste gledište da je prostor jedinstvo čiji konstituenti ga ne rekonstituišu. Ovim ne mislim da kažem da ovo gledište svesno zastupaju svi koji poriču da je prostor sastavljen od tačaka, već da izgleda da je to jedino gledište koje čini ovo poricanje prihvatljivim.

Pre nego što pređemo na razmatranje ovog gledišta, neophodno je da istaknemo jednu razliku. Agregat može da bude agregat jedinstava, a nipošto nije nužno da bude agregat prostih termina. Pitanje da li je prostor agregat jedinstava ili prostih termina jeste matematički ali ne i filozofski irelevantno; razlika između ova dva slučaja može da se ilustruje razlikom između nezavisnog projektivnog prostora i projektivnog prostora koji je definisan pomoću elemenata deskriptivnog prostora. Za sada, ne želim da razmatram da li su tačke jedinstva ili prosti termini već samo da li je prostor agregat tačaka ili ne.

Ovo pitanje je jedno od onih koja su veoma podložna za stvaranje konfuzija, i mislim da su one stvarno nastajale kod onih koji su osporavali da je prostor agregat. Relacije su, naravno, posve suštinske za prostor, a to je vodilo verovanju da prostor *čine* ne samo njegovi termini već i relacije koje ih povezuju. Međutim, ovde je lako uvideti da, ako je prostor polje izvesne klase relacija, onda je prostor agregat, a ako su relacije suštinske za definiciju prostora, onda mora da postoji neka klasa relacija koja ima polje koje je taj prostor. Relacije koje su suštinske za geometriju neće važiti između prostorno deljivih termina: ne postoji prava linija koja spaja dve zapremine, a ni rastojanje između dve površine. Tako, ako prostor treba da se definiše pomoću klase relacija, onda ne sledi, kao što je sugerisano, da je prostor jedinstvo već, nasuprot tome, da je pre agregat, naime, polje klase relacija o kojoj je reč. A protiv bilo kog gledišta koje polazi od zapremina ili površina ili zapravo od bilo čega osim tačaka i pravih linija, možemo insistirati zajedno sa Peanom[1] na tome da razlika između krivih, površina i zapremina može da nastane jedino posredstvom prave linije, a čak i tada, zahteva najsloženije postupanje[2]. Stoga, nije moguća bilo koja određena geometrija bez tačaka, nema logičkih razloga protiv tačaka, niti pak strogih logičkih razloga njima u prilog. Stoga možemo uzeti kao dokazano da, ako hoćemo da konstruišemo neku samokonzistentnu teoriju prostora, onda moramo tvrditi da je prostor agregat tačaka, a ne jedinstvo koje je nedefinljivo kao klasa. Prostor je zapravo u suštini klasa, pošto ne može da se definiše nabrajanjem njegovih termina već samo pomoću relacije prema klasnom pojmu *tačka.* Prostor nije ništa drugo do proširenje

---

[1] *Riv. di Mat*. IV, str. 53.

[2] Cf. Peano, „Sur une courbe qui remplit toute une aire plane“, *Math. Annalen*, XXXVI gde je pokazano da kontinuirana kriva može da prolazi kroz sve tačke površine kvadrata ili zapremine kocke.

pojma *tačka*, kao što je britanska armija proširenje pojma *britanski vojnik*, jedino što geometrija ne može da napravi prostornu listu analognu armijskoj listi zato što je broj tačaka beskonačan.

Dakle, prostor je sastavljen od tačaka i ako analitička geometrija treba da bude moguća, broj tačaka mora biti ili jednak ili manji od broja kontinuuma. Ako je taj broj manji, neki iskazi prihvaćene geometrije biće lažni; ali prostor u kome je broj tačaka jednak broju konačnih brojeva i u kojem tačke linije formiraju niz koji je ordinalno sličan racionalnim brojevima, biće, uz podesno odabrane aksiome, empirijski nerazlučiv od kontinuiranog prostora, a čak može biti i stvaran. Tako je aritmetika, proširena na Kantorov način, nesumnjivo adekvatna za bavljenje geometrijom, a samo je pitanje da li su za to potrebni još neki složeniji delovi aritmetičke mašinerije. Zahvaljujući broju kontinuum nam postaje nešto shvatljivo; u meri u kojoj trenutna evidencija to pokazuje, među stvarno postojećim entitetima kontinuitet je moguć, ali se ne može učiniti nesumnjivim i izvesnim.

Glava LI

LOGIČKI ARGUMENTI PROTIV TAČAKA

423. Među filozofima je još od Lajbnicovog vremena bilo skoro univerzalno prihvaćeno mišljenje da je prostor sastavljen od tačaka nešto logički nemoguće. Smatralo se da prostorni odnosi kojima smo se bavili ne važe između prostornih tačaka koje suštinski i vanvremeno stoje u relacijama u kojima stoje, već između materijalnih tačaka koje mogu da se kreću, to jest, da menjaju svoje prostorne odnose. Ovakvo shvatanje se naziva teorijom relativnog položaja, dok se teorija prostornih tačaka naziva teorijom apsolutnog položaja. Oni koji zastupaju relativan položaj uobičajeno smatraju da ni materijalni ni prostorni odnosi, zbog izvesnih protivrečnosti za koje se pretpostavlja da se u njima mogu otkriti, nisu realni već da pripadaju samo svetu pojava. Međutim, ovo je jedna stvar koju ne moramo eksplicitno da razmatramo u onom što sledi. Pored toga, *razlika* između apsolutne i relativne teorije može da se izrazi na sledeći način. Apsolutna teorija tvrdi da postoje istiniti iskazi u kojima se za prostorne odnose tvrdi da važe vanvremeno između izvesnih termina koji se mogu nazvati prostornim tačkama; relaciona teorija tvrdi da svaki istiniti iskaz kojim se tvrdi prostorni odnos podrazumeva vreme u kojem taj odnos važi između termina, tako da najprostiji prostorni iskazi tvrde triangularne relacije vremena i dva termina koji se mogu nazvati materijalnim tačkama.

Pitanje koje se tiče primene ove dve teorije na stvarni svet, slično svim pitanjima koja se tiču stvarnog sveta, po sebi je irelevantno za čistu matematiku[1]. Ali, argument protiv apsolutnog položaja uobičajeno ima formu tvrđenja da je prostor sastavljen od tačaka logički neprihvatljiv, a otuda su nastala i pitanja koja filozofija matematike mora da razmatra. U onom što sledi, ja sam se bavio samo pitanjem: da li je prostor sastavljen od tačaka samoprotivrečan? Istina je da je, ako je odgovor na ovo pitanje negativan, jedini razlog poricanja da takav prostor postoji u stvarnom svetu uklonjen; ali, ovo je jedno dalje pitanje koje, budući irelevantno za naš predmet, u celosti prepuštamo čitaocu.

424. Argumenti protiv apsolutne teorije su, po mom mišljenju, i pojedinačno i svi skupa pogrešni. Oni su na najbolji način sakupljeni u Loceovoj (Lotze) *Metafizici* (§108ff). Oni su tamo pomešani sa argumentima u prilog subjektivnosti prostora – što je sasvim različito pitanje, a što bi moralo da bude očigledno na osnovu činjenice da je sam Kant u *Kritici*, izgleda, zastupao teoriju apsolutnog položaja[2]. Ostavljajući po strani argumente i zadržavajući se samo na ovom poslednjem pitanju, možemo dati sledeći rezime Loceovih argumenata protiv apsolutnog prostora.

(1) Relacije su samo ili (α) predstave u svesti koja povezuje ili (β) unutrašnja stanja u realnim elementima koji stoje u datim relacijama (§109).

(2) Biće praznog prostora nije niti biće koje proizvodi posledice (a što pripada stvarima), niti puka valjanost neke istine, niti pak

[1] Neki argumenti koji se tiču ovog pitanja mogu se pronaći u ranijem delu mog teksta „Is position in Time and Space absolute or relative?" *Mind*, N. S. br. 39; kasniji delovi ovog teksta preštampani su ovde.

[2] Cf. Vaihinger, *Commentar*, str. 189–190.

činjenica da ga mi predstavljamo. Koja je onda vrsta bića parazan prostor? (§109).

(3) Sve tačke su potpuno slične, a ipak svaki par tačaka stoji u relaciji koja je svojstvena tim tačkama; ali opet, budući da je svaki par potpuno sličan svakom drugom paru, relacija bi trebalo da bude ista za sve parove (§111).

(4) Biće svake tačke mora da se sastoji u činjenici da se ona razlikuje od svake druge tačke i da zauzima jedan nepromenljiv položaj u odnosu na svaku drugu. Stoga se biće prostora sastoji u aktivnom uzajamnom uslovljavanju njegovih raznih tačaka, a što je zapravo interakcija (§110).

(5) Kada bi odnosi tačaka bili puka činjenica, oni bi morali da se menjaju, barem u mislima; ali, to je nemoguće: mi ne možemo da premeštamo tačke ili da zamišljamo rupe u prostoru. Ova nemogućnost se lako objašnjava pomoću subjektivne teorije (§110).

(6) Ako postoje realne tačke, ili (α) jedna tačka stvara druge u odgovarajućim odnosima prema sebi, ili (β) uvodi već postojeće tačke u odgovarajuće odnose koji su indiferentni prema njihovim prirodama (§ 111).

425. (1) Svi ovi argumenti u suštini zavise od prvog, dogme u pogledu relacija. Pošto je za apsolutnu teoriju od suštinskog značaja da ospori ovu dogmu, počeću detaljnim ispitivanjem te dogme[1]. „Sve relacije *su*“, kaže nam Loce, „samo predstave u svesti koja povezuje, ili unutrašnja stanja u realnim elementima koji, kao što uobičajeno kažemo, stoje u ovim relacijama“. Ovu dogmu Loce smatra samoočiglednom, što on svakako i može; jer sumnjam da postoji ijedan raniji filozof, osim ako to nije Platon, koji svesno ili nesvesno ne upotrebljava ovu dogmu kao suštinski deo svog sistema.

---

[1] Logička zapažanja koja slede uglavnom dugujem gospodinu Muru (G.E. Moore), kome dugujem i moje prvo uočavanje teškoća u relacionoj teoriji prostora i vremena.

Poricati je predstavlja stoga donekle težak poduhvat. Ipak, ispitajmo posledice kojima nas ova dogma vodi.

Izgledalo bi da, ako prihvatimo dogmu, moramo razlikovati dve vrste relacija, (α) one koje su predstave svesti koja povezuje i (β) one koje su unutrašnja stanja elemenata za koje se pretpostavlja da su povezani. Ove relacije se naposletku mogu ispostaviti kao identične, ali biće sigurnije da ih u međuvremenu tretirtamo kao različite. Uzmimo najpre one koje su samo predstave u svesti koja povezuje. Moramo pretpostaviti da su ove predstave verovanja u iskaze kojima se tvrde relacije između termina koji se javljaju povezani. Jer, mora se dopustiti da postoje verovanja u takve iskaze, a deluje da samo takva verovanja mogu da se smatraju predstavama u kojima relacije imaju njihovo biće. Ali, ova verovanja su nužno lažna ako relacije za koje verujemo da važe nemaju biće osim u samim tim verovanjima. Ako verujem da je *A* otac od *B*, kada to nije slučaj, moje verovanje je pogrešno; a ako verujem da je *A* zapadno od *B*, kada zapadnost zapravo postoji samo u mom duhu, to je ponovo pogrešno. Tako ova prva klasa relacija nema uopšte nikakvu valjanost i sastoji se samo u kolekciji pogrešnih verovanja. Objekti na koje se ova verovanja odnose zapravo su potpuno nepovezani; i zaista, ne može čak ni da bude *objekata* zato što množina implicira različitost, te sva verovanja u relaciju različitosti moraju da budu pogrešna. Ne može da postoji čak ni jedan objekat različit od mene samog jer bi to značilo da mora da postoji odnos različitosti prema meni, što je nemoguće. Tako se, dok god imamo posla sa ovakvim relacijama, moramo obavezati na rigidni monizam.

E sada, šta da kažemo za drugu klasu relacija, naime, za one koje su svodive na unutrašnja stanja objekata koji se pojavljuju kao povezani? Mora se primetiti da ova klasa relacija pretpostavlja mnoštvo objekata (barem dva), te da otuda podrazumeva relaciju različitosti. Sada, mi smo videli da ako postoji različitost, onda ona ne može biti relacija prve klase; te stoga ona sama mora da bude relacija druge klase. To znači, puka činjenica da je *A* različito od *B* mora biti svodiva na unutrašnja stanja *A* i *B*. Ali, nije li očigledno da pre nego što možemo da razlikujemo unutrašnja stanja *A* od unutrašnjih stanja *B*, moramo prvo da razlikujemo *A* od *B,* to jest *A* i *B* moraju da budu različiti pre nego što mogu da imaju različita stanja. Ako bi se reklo da su *A* i *B* potpuno slični, a da ih ipak ima dva, sledi čak još očiglednije da njihova različitost ne počiva na različitosti unutrašnjih stanja već da joj prethodi. Tako, puko dopuštanje da postoje unutrašnja stanja različitih stvari ruši teoriju prema kojoj suština relacija treba da se pronađe u tim stanjima. Tako se vraćamo pojmu da se pojavne relacije dve stvari sastoje od unutrašnjih stanja jedne stvari, a što nas ponovo vodi rigidnom monizmu koji je impliciran i relacijama prvog tipa.

Tako je teorija relacija koju predlaže Loce zapravo teorija da ne postoje relacije. To su prepoznali i oni koji su se dogme logički najstrože pridržavali – na primer Spinoza i gospodin Bredli – i koji su tvrdili da postoji samo jedna stvar, Bog ili Apsolut, i samo jedna vrsta iskaza, naime, pripisivanje predikata Apsolutu. Kako bi se odgovorilo na ovako razvijenu teoriju relacija, biće neophodno da ispitamo doktrinu o subjektu i predikatu.

426. Svaki istinit ili lažan iskaz – to ova teorija tvrdi – pripisuje neki predikat subjektu i – što je korolar prethodnog – postoji samo jedan subjekat. Posledice ove doktrine su toliko čudne da ne mogu da verujem da su ih shvatili oni koji je podržavaju. Ova teorija je zapravo samoprotivrečna. Jer, ako Apsolut, ima predikate, onda postoje predikati; ali iskaz „postoje predikati“ nije iskaz koji ova teorija može da prihvati. Mi ne možemo da ga izbegnemo time što ćemo reći da predikati samo kvalifikuju Apsolut, zato što Apsolut ne može ni na koji način da se kvalifikuje, tako da iskaz „postoje predikati“ logički prethodi iskazu „Apsolut ima predikate“. Tako, sama teorija kao sopstveni logički *prius* zahteva iskaz bez subjekta i predikata; pored toga, taj iskaz pretpostavlja i različitost jer, sve i da postoji samo jedan predikat, on ipak mora da bude različit od jednog subjekta. Dalje, pošto postoji predikat, predikat je entitet, njegova predikabilnost Apsolutu jeste relacija između njega i Apsoluta. Tako se sam iskaz koji je morao da bude nerelacioni nakon svega ispostavlja relacionim i izražava relaciju koju bismo tekućim filozofskim jezikom mogli da opišemo kao čisto spoljašnju. Jer, i subjekat i predikat su naprosto ono što jesu – nijedan od njih nije izmenjen relacijom prema onom drugom. Biti izmenjen relacijom bi samo moglo da znači imati neki drugi predikat i tako bismo zapali u beskonačni regres. Ukratko, nijedna relacija nikada ne menja neki od njenih termina. Jer, ako ona važi između *A* i *B*, onda ona važi između *A* i *B*, a reći da ona menja *A* i *B* znači reći da ona zapravo važi između različitih termina *C* i *D*. Reći da bi dva termina koji su u relaciji bili različiti kada ne bi bili u relaciji, znači reći nešto sasvim jalovo; jer, ako bi oni bili različiti, oni bi bili neki drugi termini a ne termini o kojima je reč, što znači neki drugi par koji ne bi bio u datoj relaciji. Mišljenje da termin može da se promeni nastaje iz neprimećivanja nepromenljivosti večnog samoidentiteta svih termina i logičkih pojmova koji jedino i čine konstituente iskaza[1]. Ono što se naziva modifikacijom sastoji se naprosto u bivanju u jedno vreme ali ne i u drugo u nekoj specifičnoj relaciji prema nekom drugom specifičnom terminu; ali, termin koji ponekad stoji a ponekad ne u relaciji o kojoj je reč mora biti nepromenjen jer inače to ne bi bio *taj* termin koji je prestao da bude u relaciji.

Opšta primedba na Loceovu teoriju relacija može ukratko da se izloži na sledeći način. Ova teorija implicira da se svi iskazi sastoje u pripisivanju predikata subjektu i da to pripisivanje nije relacija. Primedba je, dakle, da je predikat ili nešto ili ništa. Ako je ništa, on ne može da se predicira i tobožnji iskaz propada. A ako je nešto, onda predikat izražava relaciju i to relaciju upravo one vrste koju je teorija nastojala da izbegne. Tako je u oba slučaja teorija osuđena na

---

[1] Vidi spis gospodina Mura „The Nature of Judgment“, *Mind*, N.S. Vol. VIII. Vidi takođe *supra*, §§47 i 48 u kojima se tamo izloženo gledište donekle razlikuje od gledišta gospodina Mura.

propast i nema razloga da se smatra da su sve relacije svodive na subjekat–predikat formu.

427. (2) Sada prelazim na drugu Loceovu primedbu, o praznom prostoru. Ovo je ponovo donekle apstraktnog logičkog karaktera, ali je daleko lakše otklonivo pošto zavisi od gledišta koje je manje-više svojstveno Loceu. Postoje, kaže on, tri i samo tri vrste bića, od kojih nijedno ne pripada prostoru. Postoje (α) biće stvari koje se sastoji u aktivnosti i moći da proizvodi posledice; (β) valjanost istine; (γ) biće koje pripada sadržajima naših predstava.

Odgovor na ovo jeste da postoji samo jedna vrsta bića, naime, biće *simpliciter*, i samo jedna vrsta egzistencije, naime, egzistencija *simpliciter*. Mislim da i biće i egzistencija pripadaju praznom prostoru ali je samo biće relevantno za odbacivanje relacione teorije – egzistencija se tiče pitanja koje Loce meša sa onim gorenavedenim, naime, pitanja o realnosti ili subjektivnosti prostora. Bilo bi dobro da prvo objasnimo razliku između bića i egzistencije, a da se onda vratimo Loceovim trima vrstama bića.

Biće je je ono što pripada svakom shvatljivom terminu, svakom mogućem objektu mišljenja – ukratko, svemu onome što može da se javi u bilo kojem istinitom ili lažnom iskazu, i svim takvim iskazima samim. Biće pripada svemu što može da se broji. Ako je *A* neki termin koji može da se broji kao jedan, jasno je da je *A* nešto, i, prema tome, da *A* jeste. „*A* nije“ mora uvek biti ili lažno ili bez značenja. Jer, ako bi *A* bilo ništa, ne bi moglo da se kaže da jeste; „*A* nije“ implicira da postoji termin *A* čije je biće negirano i stoga da *A* jeste. Tako, osim ako „*A* nije“ nije prazan zvuk, ono kao izkaz mora biti lažno – šta god *A* bilo, ono svakako jeste. Brojevi, homerski bogovi, relacije, himere i četvorodimenzionalni prostor svi skupa imaju biće jer ako oni ne bi bili entiteti neke vrste, ne bismo mogli da obrazujemo iskaze o njima. Tako je biće opšti atribut svega i pomenuti bilo šta znači pokazati da to nešto jeste.

Nasuprot tome, *egzistencija* je povlastica samo nekih među bićima. Egzistirati znači stajati u specifičnoj relaciji prema egzistenciji

– u relaciji u kojoj, uzgred budi rečeno, sama egizstencija ne stoji. Ovo još pokazuje i slabost egzistencijalne teorije suda – teorije da se svaki iskaz tiče nečega što egzistira. Jer, ako bi ova teorija bila istinita, bilo bi istinito i da je sama egzistncija entitet, te bismo morali da prihvatimo da egzistencija ne egzistira. Tako razmatranje same egzistencije vodi neegzistencijalnim iskazima, te tako protivreči teoriji. Izgleda da je ova teorija nastala zanemarivanjem razlike između egzistencije i bića. Ipak, ova razlika je suštinska ukoliko ikada treba da možemo da poreknemo egzistenciju ičega. Jer, ono što ne egzistira mora biti nešto jer bi inače bilo besmisleno negirati njegovu egzistenciju; stoga nam treba pojam bića kao ono što takođe pripada i neegzistentnim stvarima.

Vraćajući se sada Loceovim trima vrstama bića, očigledno je da njegovo gledište sadrži beznadežne konfuzije.

(α) Biće stvari se sastoji, misli Loce – sledeći tu Lajbnica kao i drugde – u aktivnosti. E sada, aktivnost je veoma složen pojam za koji Loce pogrešno pretpostavlja da je neanalizabilan. Ali, u svakom slučaju je jasno da, ako postoji aktivnost, ono što je aktivno mora i da egzistira u prethodno objašnjenom smislu. Verujem da će se takođe priznati da je egzistencija pojmovno razlučiva od aktivnosti. Aktivnost bi mogla da bude univerzalna oznaka onoga što egzistira, ali teško da bi mogla da bude sinonimna sa egzistencijom. Stoga je Loceu potreban krajnje diskutabilan iskaz da bilo šta što egzistira mora biti aktivno. Pravi odgovor na ovaj iskaz leži u (1) pobijanju navodnih razloga njemu u prilog i (2) u dokazivanju da aktivnost implicira egzistenciju vremena koje samo ne može da bude aktivno. Međutim, za sada je dovoljno istaći da pošto su egzistencija i aktivnost logički odvojivi, pretpostavka da nešto što nije aktivno egzistira ne može biti logički apsurdna.

(β) Valjanost istine – Loceova druga vrsta bića – u stvari uopšte i nije vrsta bića. Ova fraza je pre svega loše izabrana – ono što ona znači jeste Istina [neke] istine (*the truth of a truth*) ili, još bolje, istina iskaza. Istina iskaza se sastoji u izvesnoj relaciji prema istini i pretpostavlja biće iskaza. A s obzirom na biće, lažni iskazi su tačno na istom nivou, pošto da bi bio lažan izkaz mora već da bude. Tako valjanost nije vrsta bića već biće pripada valjanim i nevaljanim iskazima podjednako.

(γ) Biće koje pripada sadržajima naših predstava je predmet u vezi sa kojim se svuda javljaju najveće konfuzije. Loce je ovu vrstu opisao kao „*ein Vorgestelltwerden durch uns*". Loce po svoj prilici tvrdi da je duh u nekom smislu kreativan – da ono što on opaža u nekom smislu stiče egzistanciju koje ne bi bilo da nije bila opažena. Neka ovakva teorija je suštinska svakom obliku kantovstva – to jest verovanju da iskazi u koje verujemo samo zato što je duh tako sačinjen da ne možemo da u njih ne verujemo mogu da budu istiniti na osnovu našeg verovanja. Ali, ako ne grešim, ova cela teorija počiva na zanemarivanju fundamentalne razlike između ideje i njenog objekta. Zavedeni zanemarivanjem bića, ljudi su pretpostavljali da je ono što ne egzistira ništa. Videvši da brojevi, relacije i mnogi drugi predmeti mišljenja ne egzistiraju izvan duha, oni su pretpostavljali da misli kojima mislimo o tim entitetima stvarno stvaraju svoje sopstvene objekte. Svako izuzev filozofa može da uvidi razliku između motke i ideje motke, ali malo njih može da uvidi razliku između broja 2 i moje ideje broja 2. Ipak, razlika je nužna, kako u jednom slučaju, tako i drugom. Argument da je 2 nešto mentalno zahteva da 2 suštinski treba da bude egzistentno. Ali u tom slučaju 2 bi bilo partikularija i bilo bi nemoguće da 2 bude u dve svesti ili u jednoj svesti u dva vremena. Tako 2 u svakom slučaju mora da bude entitet koji će imati biće čak i kada nije u duhu[1]. Ali dalje, postoje razlozi za poricanje da je 2 stvoreno mišlju koja ga misli. Jer, u tom slučaju, nipošto ne bi mogle da postoje dve misli sve dok neko ne bi to mislio; stoga bi ono za šta osoba koja tako misli pretpostavljala da su dve misli, zapravo ne bi bile dve, a mišljenje da su dve, ako bi nastalo, bilo bi pogrešno. Primenjujući istu doktrinu na 1, tu ne bi moglo biti

[1] Cf. Frege, *Grundgesetze der Aritmetik*, str. xviii.

da postoji jedna misao sve dok je neko ne bi mislio. Stoga Adamova prva misao mora da se ticala broja 1 jer nijedna jedina misao ne bi mogla da prethodi ovoj misli. Ukratko, svo znanje mora biti prepoznavanje, po cenu da je reč o obmani; aritmetika mora da se otkrije na potpuno isti način na koji je Kolumbo otkrio Indijance, i mi ne možemo ništa više da stvorimo brojeve nego što možemo da stvorimo Indijance. Broj 2 nije nešto čisto mentalno već je entitet *o* kojem se može misliti. Sve o čemu može da se misli ima biće, a njegovo biće je preduslov a ne rezultat toga da je mišljeno. Međutim, u pogledu egzistencije objekata mišljenja ništa ne može da se zaključi iz činjenice da se o njemu misli pošto sigurno ne egzistira u misli koja ga misli. Stoga naposletku nikakva specijalna vrsta bića ne pripada objektima naših predstava kao takvih. Sa ovim zaključkom oslobodili smo se Loceovog drugog argumenta.

428. (3) Loceov treći argument bio je veoma omiljen još od kada ga je uveo Lajbnic. Kaže nam se da su sve tačke potpuno slične te da stoga bilo koje dve moraju da imaju isti uzajamni odnos kao i bilo koje druge dve; ipak, njihova uzajamna rastojanja moraju da se razlikuju i čak, prema Loceu (mada je ovo u smislu u kojem je on to izgleda mislio pogrešno), relacija svakog para mora da bude svojstvena za taj par. Videćemo da i ovaj argument takođe zavisi od subjekat-predikat logike koju smo već ispitali. Biti potpuno sličan može da značiti jedino – kao u Lajbnicovom identitetu nerazlučivih – da nemaju različite predikate. Ali, kada se prizna da ne postoji suštinska razlika između subjekata i predikata, vidimo da se bilo koja dva prosta termina jednostavno razlikuju neposredno – njih je dva i to je sva njihova razlika. Kod složenih termina, istina je, ima razlika koje mogu da se otkriju analizom. Konstituenti jednog od njih mogu biti *A*, *B*, *C*, *D*, a konstituenti drugog *A*, *E*, *F*, *G*. Ali razlike *B*, *C*, *D* od *E*, *F*, *G* su ipak neposredne razlike, a neposredne razlike moraju biti izvor svih posrednih razlika. Zaista je čista logička greška pretopostaviti da, ako bi postojala neka fundamentalna razlika između subjekata i predikata, subjekti bi mogli da se razlikuju na osnovu razlika predikata. Jer, pre nego što dva subjekta mogu da se razlikuju u pogledu predikata, njih već mora da je dva, te tako neposredna različitost prethodi različitosti koja se dobija od razlike predikata. Opet, dva termina isprva ne mogu da se razlikuju na osnovu razlike relacije prema drugim terminima, zato što razlika relacije pretpostavlja dva različita termina, te stoga ne može da bude razlog njihove različitosti. Tako, ako uopšte treba da bude različitosti, mora da postoji neposredna različitost i ta vrsta različitosti pripada tačkama.

I opet, tačke imaju i narednu vrstu različitosti koja se sastoji u razlici relacija. One se razlikuju ne samo, kako Loce to tvrdi, po njihovim međusobnim relacijama, već i po njihovim relacijama prema objektima u njima. Tako izgleda da su tačke u istom položaju kao boje, zvukovi ili mirisi. Između dve boje ili dva prosta mirisa nema nikakve intrinsične razlike osim neposredne različitosti, ali kao i između tačaka i među njima ima različitih relacija prema drugim terminima.

Na čemu onda počiva plauzibilnost koncepcije da su sve tačke potpuno slične? Verujem da je ova koncepcija psihološka iluzija koja počiva na činjenici da ne možemo da zapamtimo tačku tako da bismo mogli da je prepoznamo kada je ponovo sretnemo. Ali, lako je razlikovati istovremeno predstavljene tačke; no, iako se neprestano krećemo i tako susrećemo nove tačke, ni na koji način to ne možemo da otkrijemo pomoću naših čula i prepoznajemo mesta samo po objektima koje ona sadrže. Ali, izgleda da je ovo puko slepilo sa naše strane – jer, koliko mogu da vidim, nema nikakve teškoće da se pretpostavi neposredna razlika između tačaka, kao između boja, samo što je to razlika za koju naša čula nisu konstruisana da je budu svesna. Uzmimo sledeću analogiju: pretpostavimo nekog čoveka sa veoma lošim pamćenjem lica: on bi u bilo kom trenutku bio u stanju da zna da li je video jedno lice ili mnogo lica, ali ne bi znao da li je ikada ranije video bilo koje od tih lica. Tako bi on mogao da bude naveden da definiše ljude preko soba u kojima ih je video i da pretpostavi da bi bilo samoprotivrečno da novi ljudi dolaze na njegova predavanja ili da stari više ne dolaze. U ovom drugom slučaju, barem će predavači priznati da on ipak ne bi bio u pravu. I kao i sa licima tako i sa tačkama – nemogućnost da ih prepoznamo mora biti pripisana ne odsustvu njihove individualnosti već samo našoj nesposobnosti.

429. (4) Loceov četvrti argument predstavlja pokušaj da se sprovede *reductio ad absurdum* dokazivanjem da po apsolutnoj teoriji tačke moraju da budu u interakciji. Biće svake tačke, tvrdi Loce, mora se sastojati u činjenici da se ona razlikuje od svake druge tačke i da zauzima nepromenljiv položaj u odnosu na svaku drugu. Ovaj argument sadrži brojne greške. Prvo, postoji ono što se može nazvati greškom rasuđivača, koja se sastoji u pretpostavljanju da sve mora da se objasni pokazivanjem da je ono nešto drugo. Tako, po Loceu, biće tačke mora da se pronađe u njenoj razlici od drugih tačaka, dok je zapravo njeno biće jednostavno njeno biće. Umesto da bude objašnjeno nečim drugim, biće neke tačke se pretpostavlja u svim drugim iskazima o njoj, kao na primer, u iskazu da se tačka razlikuje od drugih tačaka. I opet, izgleda da je tvrđenje da se *sama* tačka razlikuje od svih drugih tačaka namenjeno ispunjavanju neke vrste samotvrđenja, kao da se tačka ne bi razlikovala osim ukoliko ne bi sama izabrala da se razlikuje. Ova sugestija pomaže izvođenje zakljčka da su relacije između tačaka zapravo oblik interakcije. Loce, verujući da je aktivnost suštinska za egzistenciju, nije mogao da zamisli neku drugu relaciju između egzistentnih stvari osim relacije interakcije. Koliko je beznadežno neprimenljivo ovakvo gledište pokazaće analiza interakcije. Interakcija je jedan strašno složen pojam koji pretpostavlja gomilu drugih relacija i koji u svojoj uobičajenoj formi pretpostavlja razlikovanje neke stvari od njenih kvaliteta – razlikovanje koje zavisi od već kritikovane subjekat-predikat logike. Interakcija je pre svega ili istovremeno delovanje *A* na *B* i *B* na *A*, ili delovanje sadašnjih stanja od *A* i od *B* zajedno na njihova stanja u sledećem trenutku. U oba slučaja ona implicira delovanje. Delovanje generalno može da se definiše kao uzročna relacija jednog ili više stanja jedne ili više stvari u nekom datom trenutku, i jednog ili više stanja istih ili različitih stvari u sledećem trenutku. Kada postoji samo jedna stvar u oba slučaja, delovanje je imanentno ako je stvar ista i u uzroku i u učinku, a prenosna ako je uzrok u jednoj stvari, a učinak u drugoj. Da bi se govorilo o delovanju a ne naprosto o uzročnosti, neophodno je pretpostaviti stvari koje traju izvesno vreme i koje imaju stanja koja se menjaju. Tako pojam interakcije pretpostavlja sledeće relacije: (1) različitost između stvari; (2) različitost između stanja stvari; (3) istovremenost; (4) sledovanje; (5) uzročnost; (6) relaciju stvari prema njenim stanjima. Ovaj pojam, čija analiza, kao što već letimičan pogled pokazuje, obuhvata šest jednostavnijih relacija, trebalo bi da bude *fundamentalna* relacija! Nije čudo što ovakva pretpostavka proizvodi apsurdnosti. Ali, apsurdnosti pripadaju Loceu a ne prostoru. Svoditi relacije tačaka na interakcije pod izgovorom da je interakcija tip svih relacija znači ispoljiti potpunu nesposobnost za bavljenje najjednostavnijim problemima analize. Relacije tačaka nisu interakcije ništa više nego što su interakcije pre i posle, različitost, ili veće i manje. One su večne relacije entiteta, slično relaciji od 1 ka 2 ili relaciji same interakcije prema uzročnosti. Tačke ne *dodeljuju* položaje jedna drugoj kao da su jedna drugoj vratari: one večno stoje u relacijama u kojima stoje, slično svim drugim entitetima. I zaista, ceo ovaj argument počiva na jednoj apsurdnoj dogmi, podržanoj pogrešnom i sholastičkom logikom.

430. (5) Izgleda da je peti argument namenjen da dokaže kantovsku apriornost prostora. Postoje, kaže, nužni iskazi koji se tiču prostora, a koji pokazuju da priroda prostora nije „puka činjenica“. Trebalo bi da zaključimo da je prostor *a priori* opažaj i daje se jedan psihološki razlog zašto ne možemo da zamislimo rupe u prostoru. Izgleda da je ova nemogućnost rupa ono što je nazvano nužnošću koja potiče iz mišljenja. Ovaj argument ponovo podrazumeva mnogo čisto logičke diskusije. Što se tiče ovakve nužnosti mišljenja, izgleda da kantovska teorija vodi čudnom rezultatu da štagod ne možemo da ne verujemo mora biti lažno. Ono što ne možemo a da ne verujemo u ovom slučaju jeste nešto što se tiče prirode prostora, a ne prirode našeg duha. Ponuđeno objašnjenje jeste da ne postoji prostor izvan našeg duha, odakle onda mora da se zaključi da su sva naša neizbežna verovanja o prostoru pogrešna. Štaviše, mi samo odgurujemo dalje od nas oblast „puke činjenice" jer konstitucija samog našeg duha i ostaje jedna puka činjenica.

Teorija nužnosti na kojoj je insistirao Kant i koju je prihvatio Loce, deluje radikalno zlokobno. Sve je u nekom smislu puka činjenica Za neki iskaz se kaže da je dokazan kada je izveden iz premisa; ali te premise, na kraju krajeva, kao i pravilo zaključivanja, moraju naprosto da se pretpostave. Tako je bilo koja fundamentalna premisa u nekom smislu puka činjenica. Sa druge strane, izgleda da nema istinitog iskaza za koji bi imalo ikakvog smisla reći da bi mogao da bude lažan. Takođe bi moglo da se kaže da bi crveno mogla da bude ukus, a ne boja. Ono što je istinito, jeste istinito; ono što je lažno, jeste lažno, a što se tiče fundamentalia, tu nema šta više da se kaže. Izgleda da je jedino logičko značenje nužnosti izvedeno iz implikacije. Jedan iskaz je manje ili više nužan, u zavisnosti od toga koliko je klasa iskaza za koje je on premisa veća ili manja[1]. U ovom smislu logički iskazi imaju najveću nužnost, a iskazi geometrije imaju visok stepen nužnosti. Ali, ovaj smisao nužnosti ne daje valjan argument na osnovu nesposobnosti zamišljanja rupa u prostoru koji vodi zaključku da zapravo ne može da postoji bilo koji prostor uopšte izuzev prostora u našoj imaginaciji.

431. (6) Poslednji argument može lako da se otkloni. Ako su tačke nezavisni entiteti, Loce argumentiše – tako ga ja barem interpretiram – da možemo da zamislimo novu tačku koja nastaje. Ova tačka, onda, mora da stoji u odgovarajućim relacijama prema drugim tačkama. Ili ona stvara druge tačke sa tim relacijama, ili samo stvara relacije prema tačkama koje već postoje. Sada se mora dopustiti da,

---

[1] Cf. G. E. Moore, „*Necessity*", *Mind*, N. S, br. 35.

ako postoje realne tačke, nije samoprotivrečno pretpostaviti da su neke od njih nepostojeće. Ali strogo uzev, nijedan jedini iskaz, koji god bio, nije samoprotivrečan. Tome bi najbliži bio iskaz „nijedan iskaz nije istinit" pošto on implicira svoju vlastitu istinitost. Ali, čak i ovde nije strogo samoprotivrečno poricati ovu implikaciju. Svuda nailazimo na iskaze koji su prihvaćeni samo zato što su samoočigledni i bez ikakvog drugog razloga; sam zakon protivrečnosti je jedan takav iskaz. Izgleda da je uzajamna implikacija svih tačaka prostora još jedan; poricanje samo neke među tačkama odbija se iz istog razloga kao i tvrđenje da je takav i takav iskaz i istinit i lažan, naime, zato što je očigledno da su oba neistinita. Ali ako, kada bi *per impossibile* neka tačka koja prethodno nedostaje nastala, ona ne bi stvorila novu tačku već bi stajala u odgovarajućim relacijama prema tačkama koje već postoje. Ta tačka bi zapravo već morala da ima biće, i kao entitet, morala bi večno da bude prema drugim tačkama u istim relacijama u kojima je kada nastane. Tako Loceov argument na ovom kao i na drugim mestima zavisi od pogrešne logike i lako se pobija ispravnijim gledištima koja se tiču prirode suda.

Iz gorenavedene diskusije zaključujem da apsolutni položaj nije logički nedopustiv, kao i da prostor sastavljen od tačaka nije samoprotivrečan. Uobičajene teškoće koje su se ranije pronalazile u prirodi beskonačnosti zavisile su od prihvatanja jednog određenog aksioma, naime, da celina mora da ima više termina od dela; s druge strane, izgleda da su teškoće u prirodi prostora bile izvođene gotovo isključivo iz opšte logike. Uz subjekat-predikat teoriju suda, prostor nužno izgleda tako kao da sadrži protivrečnosti, ali kada se jednom prihvati nesvodiva priroda relacionih iskaza, sve pretpostavljene teškoće iščezavaju kao dim[1]. Stoga nema razloga, u meri u kojoj ja to mogu da sagledam, da poričemo fundamentalnu i apsolutnu filozofsku valjanost teoriji geometrije koja posmatra prostor kao da je sastavljen od tačaka, a ne kao puki skup relacija između neprostornih termina.

---

[1] Cf. moju *Philosophy of Leibniz*, Cambridge, 1900, Glava I.

Glava LII

KANTOVA TEORIJA PROSTORA

432. U ovoj glavi ne nameravam da sprovedem minuciozno ili tekstualno ispitivanje Kantovih mišljenja; ovo je već bilo učinjeno drugde, a posebno u Fajhingerovom (Vaihinger) monumentalnom komentaru, i to tako temeljno da nije potrebno da to ovde ponavljamo. Ovde želim da razmatram kantovsko učenje samo u opštim crtama. Ovo učenje, u više ili manje modifikovanom obliku, bilo je vodeće na ovom polju istraživanja duže od jednog veka, i bilo je skoro univerzalno prihvaćeno. Pošto su moja gledišta u skoro svakoj tački matematičke teorije dijametralno suprotna Kantovim, neophodno je eksplicitno odbraniti ona mišljenja po kojima se razlikujem od njega[1]. Pri tome ću posebnu pažnju posvetiti onome što Kant naziva transcendentalnim argumentima, to jest argumentima izvedenim iz prirode matematike.

433. Uopšteno uzev, način na koji Kant nastoji da izvede svoju teoriju prostora iz matematike (posebno u *Prolegomena*) izgleda ovako. Polazeći od pitanja: „Kako je čista matematika moguća?", Kant najpre ističe da su svi iskazi matematike sintetički. On odatle

[1] Teorija prostora koju ću razmatrati biće ona iz *Kritike* i iz *Prolegomena*. Prekritički radovi i *Metaphysische Anfangsgründe der Naturwissenschaft* (koji se po ovom pitanju razlikuju od *Kritike*) neće biti razmatrani.

zaključuje da ti iskazi ne mogu da budu, kako se nadao Lajbnic, dokazani pomoću logičkog kalkulusa; nasuprot tome, oni zahtevaju, kaže on, izvesne sintetičke *a priori* iskaze koji mogu da se nazovu aksiomima, čak i onda kada bi izgledalo da se rasuđivanje koje se upotrebljava u dedukciji iz aksioma razlikuje od rasuđivanja u čistoj logici. Sada, Kant nije bio voljan da prihvati da bi saznanje spoljašnjeg sveta moglo da se stekne drugačije nego iskustvom; otuda je zaključio da se svi iskazi matematike bave nečim subjektivnim, što se naziva forma opažaja. Postoje dve takve forme, prostor i vreme, pri čemu je vreme izvor aritmetike, a prostor geometrije. To znači da je iskustvo o objektima moguće samo u formama vremena i prostora, te tako čista matematika mora da bude primenljiva na celokupno iskustvo. Ono što je sa logičke tačke gledišta bitno jeste da nas *a priori* opažaji snabdevaju metodama rasuđivanja i izvođenja koje formalna logika ne priznaje; a ove metode, kao što smo rekli, čine figuru (koja, naravno može naprosto da bude i zamišljana) suštinskom za sve geometrijske dokaze. Mišljenje da su vreme i prostor subjektivni ojačano je antinomijama kojima Kant nastoji da dokaže da, ako bi oni bili bilo šta više od formi iskustva, onda bi oni na kraju krajeva morali da budu samoprotivrečni.

U prethodnom okvirnom prikazu sam izostavio sve ono što nije relevantno za filozofiju matematike. Pitanja koja su za nas od osnovnog značaja u vezi sa kantovskom teorijom jesu sledeća dva, naime, (1) da li su rasuđivanja u matematici na neki način različita od rasuđivanja u formalnoj logici? i (2) da li postoje neke protivrečnosti u pojmovima vremena i prostora? Ako ova dva stuba kantovske građevine mogu da se sruše, uspešno ćemo odigrati ulogu Samsona prema njegovim sledbenicima.

434. Pitanje prirode matematičkog rasuđivanja bilo je zamagljeno u Kantovo vreme iz više razloga. Prvo, Kant nikada ni za trenutak nije posumnjao u to da su iskazi logike analitički, dok je ispravno uočio da su iskazi matematike sintetički. Od tada je izgledalo da je i logika isto toliko sintetička kao i sve druge vrste istine; ali, ovo je čisto filozofsko pitanje preko kojeg ćemo ovde preći[1]. Drugo, formalna logika je u Kantovo vreme bila u znatno nazadnijem stanju nego što je danas. Tada je još bilo moguće tvrditi, kako kaže Kant, da nikakav veći napredak nije učinjen od Aristotela, i da stoga ništa slično neće da se pojavi ni u budućnosti. Silogizam je i dalje bio jedini tip formalno tačnog rasuđivanja, a silogizam je sasvim sigurno bio neadekvatan za matematiku. Ali danas, zahvaljujući uglavnom matematičkim logičarima, formalna logika je obogaćena sa nekoliko formi rasuđivanja koje su nesvodive na silogizam[2], a pomoću njih sva matematika može, a veliki delovi matematike zaista i jesu, strogo razvijeni u skladu sa pravilima. Treće, u Kantovo vreme sama matematika je bila logički inferiorna u odnosu na današnju matematiku. Na primer, sasvim je tačno da će svako ko, bez upotrebe figure pokuša da dedukuje Euklidov sedmi stav iz Euklidovih aksioma, uvideti da je taj posao nemoguć; a u osamnaestom veku verovatno nije postojao nijedan jedini logički korektan deo matematičkog rasuđivanja, drugim rečima, neko rasuđivanje koje bi tačno izvodilo svoje rezultate iz eksplicitnih premisa koje bi autor naveo. Pošto je tačan rezultat izgledao nesumnjiv, bilo je prirodno pretpostaviti da je matematički dokaz bio različit od logičkog dokaza. Ali,činjenica je da je cela razlika zapravo počivala na tome da matematički dokazi naprosto nisu bili pouzdani. Temeljnim ispitivanjem je utvrđeno da je za mnoge iskaze koji su Kantu delovali nesumnjivo istinito zapravo moguće dokazati da su lažni[3]. Jedna još šira klasa iskaza – na primer, Euklidov sedmi stav, koji smo prethodno pomenuli – može se strogo dedukovati iz izvesnih premisa, ali je krajnje sumnjivo da li su same te premise istinite ili lažne. Na taj način je pretpostavljena svojstvenost matematičkog rasuđivanja nestala.

---

[1] Vidi moju *Philosophy of Leibniz*, §11.

[2] Vidi Glavu II, *supr*a, a posebno §18.

[3] Na primer, iskaz da je svaka kontinuirana funkcija diferencijabilna.

Nadam se da je verovanje da su rasuđivanja u geometriji u nekom smislu posebna već dovoljno pobijeno detaljnim objašnjenjima koja su ovom tipu rasuđivanja data naročito u Glavi XLIX. Videli smo da svi geometrijski rezultati slede na osnovu pukih pravila logike iz definicija različitih prostora. A s obzirom na mišljenje da aritmetika zavisi od vremena, i na to je, nadam se, takođe odgovoreno našim objašnjenjima odnosa aritmetike prema logici. Zapravo, ne uzimajući u obzir ikakve detalje, izgleda da je ono pobijeno jednostavnim uvidom da vreme mora da ima delove te da stoga mnoštvo, celina i deo prethode svakoj teoriji vremena. Možemo reći da je celokupna matematika – a kao dokaz našeg tvrđenja može da posluži njen celokupni aktualni razvoj – izvodiva iz primitivnih iskaza formalne logike, a kada se to prizna nikakve dalje pretpostavke više nisu potrebne.

Ali, ako priznamo da su *rasuđivanja* u geometriji čisto formalna, kantovac i dalje može da tvrdi da mu *a priori* opažaj osigurava da je definicija trodimenzionalnog euklidskog prostora, jedina među definicijama mogućih prostora, definicija nečeg postojećeg, ili barem nekog entiteta koji stoji u nekoj relaciju prema postojećim stvarima, a u kojoj drugi prostori ne stoje. Ovo mišljenje je, strogo uzev, irelevantno za filozofiju matematike, pošto je matematika u potpunosti indiferentna prema pitanju da li njeni entiteti postoje. Kant je smatrao da je stvarno *rasuđivanje* u matematici različito od onog u logici; predložena ispravka odbacuje ovo mišljenje i umesto toga podržava samo jedan nov primitivni iskaz koji vodi tome da je euklidski prostor prostor stvarnog sveta. Tako, iako ne verujem u bilo kakav neposredni opažaj koji je garancija za bilo koji primitivni iskaz, neću se baviti pobijanjem ovog mišljenja. Za moju svrhu je dovoljno da pokažem da nikakav takav opažaj nije relevantan u bilo kojem strogo matematičkom iskazu.

435. Ostaje da razmotrimo matematičke antinomije. One se tiču beskonačnosti i kontinuiteta i za njih Kant pretpostavlja da su na poseban način prostorno-vremenske. Već smo videli da je ovo gledište pogrešno pošto se i beskonačnost i kontinuitet javljaju u čistoj aritmetici. U Petom delu (a posebno u Glavi XLII) takođe smo videli da su pretpostavljene antinomije beskonačnosti i kontinuiteta, u njihovoj aritmetičkoj formi, rešive, te preostaje da dokažemo da isti zaključak važi i u pogledu Kantove prostorno-vremenske forme. Treća i četvrta antinomija ovde nisu relevantne pošto uključuju uzročnost; stoga ću razmotriti samo prve dve.

Prva antinomija. Teza. – „Svet ima početak u vremenu, a u pogledu prostora takođe je zatvoren u granice". Ovaj iskaz se ne odnosi na čisto vreme i na čist prostor, već na stvari u njima. Ovaj dokaz, takav kakav je, primenjuje se prvenstveno samo na vreme, a izveden je uz pomoć *reductio ad absurdum*. „Jer, pretpostavimo", kaže se u dokazu, „da svet nema početak u vremenu, onda je protekla (*abgelaufen*) večnost pre svakog datog trenutka vremena i, sledstveno, dogodio se beskonačan niz uslova za stvari u svetu. Ali, beskonačnost nekog niza sastoji se upravo u tome što on nikada ne može da se završi sukcesivnom sitezom. Prema tome, beskonačno protekli niz stvari u svetu (*Weltreihe*) je nešto nemoguće, te je početak sveta nužan uslov njegove egzistencije, a to je bila prva stvar koju je trebalo dokazati".

Ovaj argument je teško slediti, i sugeriše prikriveno pozivanje na uzročnost i pretpostavljenu nužnost prvog uzroka. Zanemarujući ovaj aspekat argumenta, izgledalo bi, slično kao i u slučaju većine argumenata protiv beskonačnosti, da tu nedostaje razumevanje upotrebe klasnog pojmai reči *bilo koji.* Pretpostavljeno je – barem tako izgleda – da bi događaji koji prethode nekom datom događaju trebalo da budu definljivi ekstenzionalno, što, ako je njihov broj beskonačan, očigledno nije slučaj. „Kompletiranje putem sukcesivne sinteze" izgleda grubo ekvivalentno nabrajanju; a istina je da je nabrajanje beskonačnog niza praktično nemoguće. Ali, niz ipak može da bude savršeno definljiv kao klasa termina koja stoji u određenoj relaciji prema određenom terminu. Onda preostaje pitanje, kao i sa svim klasama, da li je klasa konačna ili beskonačna, a u ovom drugom slučaju, kao što smo videli u Petom delu, nema ničeg samoprotivrečnog. U stvari, da bi se se razjasnila protivrečnost, bilo bi neophodno da kao aksiom istaknemo da svaka klasa mora da ima konačan broj termina – aksiom koji može da se pobije i koji je neutemeljen. Međutim, izgleda da Kant prethodne događaje smatra *uzrocima* kasnijih događaja, kao i da uzrok logički prethodi učinku (posledici, *effect*)*. Nema sumnje da je ovo razlog da govorimo o *uslovima* i da ograničimo antinomiju na događaje umesto na trenutke. Ako bi uzrok logički prethodio učinku, mislim da bi ovaj argument bio validan; ali, kao što ćemo u Sedmom delu videti, uzrok i učinak su na istom logičkom nivou. Tako teza prve antinomije, u meri u kojoj se tiče vremena, mora da se odbaci kao lažna, a argument koji se tiče prostora, pošto i on zavisi od argumenta koji se odnosi na vreme, takođe mora da propadne.

Antiteza. – „Svet nema ni početak u vremenu niti granice u prostoru već je beskonačan, kako u pogledu vremena, tako i u pogledu prostora". Dokaz ovog iskaza pretpostavlja beskonačnost čistog prostora i vremena i pokazuje da oni impliciraju događaje i stvari koje ih ispunjavaju. Ovo gledište je u pogledu prstora osporeno u prethodnoj glavi, a u pogledu vremena može da se ospori posve sličnim argumentima; u svakom slučaju, on je irelevantan u našem sporu pošto nijedan dokaz nije ponuđen u prilog tome da su sami vreme i prostor beskonačni. Ovo zapravo i ne može da se dokaže pošto zavisi od puke samoočiglednosti aksioma – da postoji trenutak pre bilo kog drugog trenutka i tačka izvan bilo koje date tačke. Ali, pošto nijedan

---

* Opredelili smo se da pojmovni par *cause* i *effect* prevodimo sa „uzrok" i „učinak", a ne sa „uzrok" i „posledica" uprkos tome što je to već ustaljen način prevođenja u stručnoj i filozofskoj literaturi. Ovakvo prevodilačko rešenje motivisano je težnjom da se izbegnu eventualne nejasnoće zato što je prethodno u tekstu Raselovo *consequence* prevođeno sa (logička) „posledica". Budući da sam Rasel pravi razliku između *consequence* i *effect*, te da slične razlike postoje, između ostalog, i u francuskom, nemačkom i italijanskom jeziku, smatrali smo poželjnim da se slična razlika napravi i u srpskom jeziku. Ovo je naročito relevantno u Glavi LV *infra* posvećenoj problemu uzročnosti (prim. stručnih redaktora prevoda).

konverzni dokaz nije valjan, u ovom slučaju možemo da ovu samoočiglednost smatramo istinitom. Da li su događaji imali početak i da li je materija ograničena praznim prostorom, to su pitanja o kojima, ako je naša filozofija prostora i vremena ispravna, nikakvi argumenti nezavisni od uzročnosti ne mogu da odluče.

Druga antinomija. *Teza*. – „Svaka složena supstancija u svetu sastoji se od prostih delova, i nigde ništa ne postoji izuzev prostog ili onog što je sastavljeno od prostih delova“. Ovde se ponovo argument primenjuje na stvari *u* prostoru i vremenu, a ne na same prostor i vreme. Mi možemo da ga proširimo na prostor i vreme i na sve kolekcije, bilo postojeće ili ne. Zapravo je očigledno da se ovaj iskaz, bilo da je istinit ili lažan, tiče samo celine i dela i nema nikakve posebne veze s prostorom i vremenom. Umesto složene supstancije, možemo da razmatramo brojeve između 1 i 2 ili bilo koju drugu definljivu kolekciju. A uz ovo proširenje, mislim da dokaz ovog iskaza mora da se prizna, s tim što bi *termini* i *pojmovi* zamenili *supstancije*, i što bismo umesto sa argumentom da su relacije između supstancija slučajne (*zufallig*), morali da se zadovoljimo tvrđenjem da relacije impliciraju termine, a da složenost implicira relacije.

Antiteza. – „Nijedna složena stvar u svetu se ne sastoji od prostih delova i u njemu nigde ne postoji ništa prosto “. Dokaz ovog iskaza, kao i u slučaju prve antiteze, pretpostavlja ono što nas ovde jedino i interesuje, neku odgovarajuću osobinu prostora. „Prostor “, kaže Kant „se ne sastoji od delova, već od prostora“. Ova dogma je smatrana samoočiglednom, iako svekolika upotreba tačaka pokazuje da ona nije univerzalno prihvaćena. Izgleda mi da se argument teze, proširen onako kako sam upravo predložio, primenjuje kako na čist prostor tako i na bilo koju drugu kolekciju i da dokazuje egzistenciju prostih tačaka koje sačinjavaju prostor. Pošto ova dogma nije dokazana, možemo samo da pretpostavljamo razloge na kojima je ona počivala. Uobičajeni argument zasnovan na beskonačnom deljenju verovatno je uticao na Kanta. Na ma koliko delova delili prostor, ti delovi će i dalje biti prostori, a ne tačke. Ali, na koliko god delova delili prostiranje odnosa između 1 i 2, ti delovi su i dalje prostiranja, a ne pojedinačni brojevi. Stoga argument protiv tačaka dokazuje da ne postoje brojevi, a jednako će dokazivati da ne postoje ni boje ni tonovi. Sve ove apsurdnosti počivaju na jednoj prikrivenoj upotrebi aksioma konačnosti, to jest aksioma kojim se tvrdi da, ako se prostor sastoji od tačaka, on mora da se sastoji od nekog konačnog broja tačaka. Kada se ovo jednom ospori, onda možemo da priznamo da nijedan konačan broj podela prostora neće voditi tačkama, a da ipak smatramo da se svaki prostor sastoji od tačaka. Konačan prostor predstavlja celinu koja se sastoji od prostih delova, ali ne od nekog konačnog broja prostih tačaka. Potpuno ista stvar je istinita i za prostiranje između 1 i 2. Tako ova antinomija nije specifično prostorna i svaki odgovor koji je primenljiv u aritmetici, biće primenljiv i ovde. Ova teza koja predstavlja suštinski postulat logike morala bi da se prizna, dok bi antiteza morala da se odbaci.

Tako Kantove antinomije ne podrazumevaju specifično prostor i vreme: bilo koji drugi kontinuirani niz, uključujući i niz realnih brojeva, izaziva iste probleme. Štaviše, svojstva prostora i vremena na koja se Kant poziva, predstavljaju opšta svojstva takvih nizova. Antinomije različite od Kantovih – na primer one koje se tiču apsolutnog i relativnog položaja ili prave linije shvaćene i kao relacije i kao kolekcije tačaka – bile su razrešene u prethodnim glavama ovog dela. Kantove antinomije koje se tiču teškoća vezanih za beskonačnost su daleko najozbiljnije i one su kao suštinski artimetičke već razrešene u Petom delu.

436. Pre nego što pređemo na materiju i kretanje, rezimirajmo ukratko rezultate ovog dela. Rekli smo da se geometrija stastoji u izučavanju nizova koji imaju više od jedne dimenzije, a takvi nizovi se javljaju svuda gde imamo niz čiji su termini i sami nizovi. Ovaj predmet je značajan u čistoj matematici zato što nam daje nove vrste poretka i nove metode generisanja poretka. Značajan je i u primenjenoj matematici zato što barem jedan niz od nekoliko dimenzija postoji, naime, prostor. Videli smo da je apstraktan logički metod zasnovan na logici relacija, koji je do sada služio, bio i dalje adekvatan i da nam je omogućio da definišemo sve klase entiteta koje matematičari nazivaju prostorima, kao i da iz definicija dedukujemo sve iskaze koji odgovaraju geometriji. Utvrdili smo da kontinuitet i beskonačnost prostora uvek mogu da se definišu aritmetički, kao i da se nijedna nova nedefinljiva ne javlja u geometriji. Videli smo da na sve filozofske primedbe koje je većina filozofa uputila tačkama, može da se odgovori jednom poboljšanom logikom, kao i da su Kantovo verovanje u specifičnost geometrijskog rasuđivanja i u postojanje izvesnih antinomija koje su svojstvene prostoru i vremenu, pobijeni modernim shvatanjem Lajbnicove univerzalne karakteristike. Tako, iako nismo diskutovali o problemima koji se specifično tiču onoga što stvarno postoji, usputno smo odgovorili na sve argumente koji su uobičajeno navođeni protiv postojanja apsolutnog prostora. Pošto zdrav razum potvrđuje postojanje apsolutnog prostora, izgleda da nema više nikakvog razloga da ga pobijamo, a ovaj zaključak će, kao što ćemo videti, pružiti najveću moguću pomoć u filozofiji dinamike.

Sedmi deo

MATERIJA I KRETANJE

Glava LIII

MATERIJA

437. Priroda materije, čak više nego priroda prostora, oduvek je bila smatrana kardinalnim problemom filozofije. Međutim, u ovom radu nećemo se baviti pitanjem: kakva je priroda materije koja stvarno postoji? Bavićemo se samo analizom racionalne dinamike posmatrane kao grana čiste matematike koja uvodi svoj predmet na osnovu definicije a ne na osnovu opažanja aktualnog sveta. Tako se ne ograničavamo na zakone kretanja koji su empirijski potvrđeni: nenjutnovska dinamika, kao i neeuklidska geometrija, za nas moraju da budu jednako zanimljive kao i ortodoksni sistem. Istina je da filozofski argumenti protiv realnosti materije uobičajeno nastoje da istaknu logičke primedbe koj se tiču pojma materije, a ove primedbe su, kao one koje se tiču apsolutnog prostora, relevantne za diskusiju o matematičkim principima. Ali, one ne moraju da nas se mnogo tiču u ovoj fazi, pošto smo se njima već dovoljno bavili tokom prethodne diskusije o prostoru. Oni koji su tvrdili da je prostor sastavljen od tačaka moguć, verovatno će tvrditi i da je materija moguća. Ali, pitanje mogućnosti je u svakom slučaju sekundarno u odnosu na pitanje koje nas ovde neposredno interesuje, a koje glasi: Šta je materija? A ovde materija treba da znači materija onako kako se javlja u racionalnoj dinamici, sasvim nezavisno od svih pitanja u pogledu njenog stvarnog postojanja.

438. Ne postoje – tako smo barem zaključili u Šestom delu – nikakve logičke implikacije koje bi se ticale drugih entiteta u prostoru. Ne sledi da samo zato što postoji prostor postoje i stvari u njemu. Ako u ovo treba da verujemo, onda moramo to učiniti na novim osnovama ili, još bolje, na osnovu onoga što se naziva evidencijom čula. Tako ovde preduzimamo jedan potpuno nov korak. Možemo reći da termini za koje izgleda da postoje mogu da se grupišu u četiri velike klase: (1) trenuci, (2) tačke, (3) termini koji zauzimaju trenutke ali ne i tačke, (4) termini koji zauzimaju i tačke i trenutke. Izgleda da je činjenica da ne postoje termini koji zauzimaju tačke, ali ne i trenutke. Ono što se podrazumeva pod *zauzimanjem* tačke, ili trenutka analiza ne može da nam objasni; to je fundamentalna relacija, izražena pomoću *u* i *na*, asimetrična i intranzitivna, nedefinljiva i prosta. Očigledno je da su čestice materije među terminima iz klase (4). Materija ili sama materijalnost, klasni pojam, jeste među terminima koji ne postoje, ali čestice materije postoje i u vremenu i u prostoru. Međutim, one ne formiraju celu klasu (4): pored njih postoje i takozvani sekundarni kvaliteti, barem boje, koji postoje u vremenu i u prostoru, ali nisu materijalni. Mi ne moramo da odlučimo u pogledu subjektivnosti sekundarnih kvaliteta, ali u svakom slučaju moramo da tvrdimo da se oni razlikuju od materije. Kako bi onda trebalo definisati materiju?

439. Postoji jedan izlizan tradicionalni odgovor na ovo pitanje. Materija je, kaže nam se, supstancija, stvar, subjekat čiji su sekundarni kvaliteti predikati. Ali, ovaj tradicionalni odgovor ne može da nas zadovolji. Celokupno učenje o subjektu i predikatu je, kao što smo već imali priliku da istaknemo, radikalno pogrešno i mora biti napušteno. Možemo se zapitati da li bez njega bilo koji drugi smisao osim onog iz Glave IV može da se da pojmu *stvar*. Ponekada nam se kaže da su stvari organska jedinstva sastavljena od mnogo delova koji izražavaju celinu ili su izraženi u celini. Ovaj pojam je pogodan da zameni stariji pojam supstancije ali ne, barem ja tako mislim, ne na dobit u pogledu preciznosti u mišljenju. Jedina vrsta jedinstva kojoj mogu da pridam neki precizan smisao – osim jedinstva onoga što je apsolutno jednostavno – jeste jedinstvo celine koja je sastavljena od delova. Ali, ovaj pojam jedinstva ne može biti ono što nazivamo organskim jedinstvom; jer, ako delovi izražavaju celinu ili druge delove, onda oni moraju biti složeni, a onda i sami sadrže delove; a ako su ti delovi izanalizirani dokle god je to moguće, oni moraju da budu jednostavni termini koji ne mogu da izraze ništa izuzev sebe same. U prilog organskom jedinstvu načinjeno je razlikovanje između pojmovne analize i realne podele na delove. Ono što je realno nedeljivo, kaže nam se, može biti pojmovno analizirano. Ova razlika, ako se pojmovna analiza posmatra kao subjektivna, izgleda mi potpuno neprihvatljivo. Sva složenost je pojmovna u smislu da potiče od celine koja može logički da se analizira, ali je realna u smislu da ne zavisi od duha već samo od prirode objekta. Tamo gde duh može da razlikuje elemente, tu mora *biti* različitih elemenata za razlikovanje, ali avaj! često postoje različiti elementi koje duh ne može da razlikuje. Analiza konačnog prostora preko tačaka nije objektivnija od analize (recimo) uzročnosti na vremenski sled + razlog i posledicu, ili jednakosti preko istovetnosti relacije prema nekoj datoj veličini. U svakom slučaju analize postoji celina koja se sastoji od delova u relacijama; različiti slučajevi se razlikuju samo na osnovu prirode delova i relacija. Tako pojam organske celine u gorenavedenom smislu mora da se pripše defektnoj analizi i ne može da se upotrebi za objašnjenje stvari.

Takođe se kaže da analiza krivo predstavlja ono što analizira utoliko što kompleks nije ekvivalentan zbiru svojih konstituenata i što se menja kada se na njih izanalizira. Ovo učenje, kao što smo videli u Prvom i u Drugom delu, sadrži zrno istine kada je ono što se analizira jedinstvo. Neki iskaz ima izvesno nedefinljivo jedinstvo na osnovu kojeg predstavlja tvrđenje; a ono je potpuno izgubljeno analizom, tako da nikakvo nabrajanje konstituenata ne može ponovo da ga uspostavi, čak i da je ono sâmo navedeno kao konstituent. Mora se priznati da ova činjenica ukazuje na ozbiljnu logičku teškoću jer teško je ne verovati da celinu ne konstituišu njeni konstituenti. Međutim, za nas je dovoljno da primetimo da su sva jedinstva iskazi ili iskazni pojmovi, te da sledstveno ništa što postoji nije jedinstvo. Ako se stoga tvrdi da su stvari jedinstva, moramo odgovoriti da onda nikakve stvari ne postoje.

440. Tako izgleda da nijedan oblik pojma supstancije nije primenljiv na definiciju materije. Preostaje pitanje: Kako i zašto se materija razlikuje od takozvanih sekundarnih kvaliteta? Mislim da ne može da se razlikuje time što bi pripadala različitoj logičkoj klasi pojmova; čini se da su jedine klase stvari, predikati i relacije, a i materija i sekundarni kvaliteti pripadaju prvoj klasi. Uprkos tome, dinamički svet se oštro razlikuje od sveta sekundarnih kvaliteta, a elementarna svojstva materije su sasvim različita od svojstava boja. Ispitajmo ova svojstva s obzirom na definiciju.

Najfundamentalnija karakteristika materije leži u prirodi njene povezanosti sa prostorom i vremenom. Dva dela materije ne mogu da zauzimaju isto mesto u istom trenutku, a isti deo ne može da zauzima dva mesta u istim trenutku, iako može da zauzima dva trenutka na istom mestu. To će reći, šta god je u nekom datom trenutku protežno, nije nedeljivi deo materije: deljenje prostora uvek implicira deljenje materije koja taj prostor zauzima, ali odgovarajuća implikacija za vreme ne važi. (Ova svojstva se uobičajeno pripisuju materiji: ne želim da tvrdim da ona njoj stvarno pripadaju). Na osnovu ovih svojstava materija se razlikuje od svega drugoga što je u prostoru. Razmotrimo, na primer, boje: one su neprobojne, tako da nikoje dve boje ne mogu da budu na istom mestu u isto vreme, ali boje nemaju ono drugo svojstvo materije, pošto ista boja može da bude na više mesta odjednom. Drugi parovi kvaliteta, poput boje i tvrdoće, takođe mogu da postoje na jednom mestu. Prema gledištu koje je tretiralo materiju kao subjekat kome se ovi kvaliteti pripisuju, komad boje se razlikovao od nekog drugog posredstvom materije čiji je atribut ta boja bila, čak i kada su te dve boje o kojima je reč bile potpuno slične. Ja bih radije rekao da je boja ista i da nije u nekoj direktnoj vezi sa materijom u prostoru. Ova veza je indirektna i sastoji se u zauzimanju istog mesta. (Ne želim da odlučujem o nekim spornim pitanjima u vezi sa sekundarnim kvalitetima, već samo da pokažem u čemu se sastoji razlika između zdravorazumskih pojmova o njima i pojma materije). Tako izgleda da neprobojnost i njen konvers karakterišu materiju dovoljno da bi se ona razlikovala od svega drugog što postoji u prostoru. Dva komada materije ne mogu da zauzimaju isto mesto u isto vreme, a jedan deo materije ne može da zauzima dva mesta u isto vreme. Ali, ovo poslednje svojstvo mora da se shvati tako kao da je reč o prostom delu materije, komadu koji ne može da se analizira ili da se deli.

Druga svojstva materije proizlaze iz prirode kretanja. Svaki deo materije istrajava kroz vreme; ako jednom postoji, izgleda kao da bi uvek morao da postoji. Taj deo ili održava svoj prostorni položaj ili ga kontinuirano menja, tako da njegovi položaji u različitim trenucima formiraju kontinuirani niz u prostoru. Oba ova svojstva zahtevaju opsežno razmatranje koje ćemo sprovesti kasnije. Ona su čisto kinematička, to jest ne podrazumevaju ništa što bi se ticalo takozvanih zakona kretanja već jedino prirodu samog kretanja.

Oduvek je postojala kontroverza, još iz vremena stare Grčke, u pogledu mogućnosti vakuuma. Mislim da o pitanju da li postoji vakuum ne može da se odluči na osnovu čisto filozofskih razloga, to jest, nije moguće odlučiti bilo šta u tom pogledu na osnovu prirode materije ili kretanja. Odgovor na ovo pitanje zapravo pripada nauci te stoga ovde ništa nećemo sugerisati.

Ono što je prethodno rečeno o prirodi materije možemo da rezimiramo na sledeći način. *Materijalna jedinica* je klasni pojam koji je primenljiv na sve što ima sledeće karakteristike: (1) Prosta materijalna jedinica zauzima prostornu tačku u bilo kom trenutku; dve jedinice ne mogu da zauzimaju istu tačku u istom trenutku, a jedna ne može da zauzima dve tačke u istom trenutku. (2) Svaka materijalna jedinica istrajava u vremenu; njeni položaji u prostoru u bilo koja dva trenutka mogu da budu ili isti ili različiti; ali, ako su različiti, ti položaji u vremenima koja su intermedijarna između dva izabrana, moraju da formiraju kontinuirani niz. (3) Dve materijalne jedinice se razlikuju na isti neposradan način na koji se razlikuju i dve tačke ili dve boje; one se slažu s obzirom na to da stoje u relaciji uključivanja u klasu prema opštem pojmu *materije* ili, još bolje, prema opštem pojmu *materijalne jedinice*. Izgleda da je sama materija kolektivno ime za sve komade materije, kao što je i prostor za sve tačke, a vreme za sve trenutke. Tako, posebna veza sa prostorom i vremenom jeste ono čime se materija razlikuje od drugih kvaliteta, a ne bilo koja logička razlika poput one subjekta i predikata ili supstancije i atributa.

441. Sada možemo pokušati da apstraktno logički izrazimo čime bi racionalna dinamika trebalo da se bavi. Prvo, vreme i prostor mogu da se zamene sa jednodimenzionalnim i n-dimenionalnim nizovima. Zatim, jasno je da je jedina relevantna funkcija materijalne tačke da se ustanovi korelacija između svih trenutaka vremena i nekih tačaka prostora; a ta korelacija treba da bude mnogo-jedan. Tako, čim je ta korelacija data, stvarna materijalna tačka prestaje da ima bilo kakav značaj. Zato možemo da zamenimo materijalnu tačku sa mnogo-jedan relacijom čiji je domen izvesni jedno-dimenzionalni niz, a čiji je konverzni domen sadržan u nekom trodimenzionalnom nizu. Kako bi se dobio materijalni univerzum, u meri u kojoj se to tiče kinematičkih razmatranja, treba samo uzeti u obzir klasu takvih relacija koje podležu uslovu da logički proizvod bilo koje dve relacije te klase bude nula. Ovaj uslov nam osigurava neprobojnost. Ako tome dodamo da i jednodimenzionalni i trodimenzionalni nizovi treba da budu kontinuirani i da svaka mnogo-jedan relacija bude definisana kontinuiranom funkcijom, onda imamo sve kinematičke uslove koji su potrebni za sistem materijalnih čestica, uopšten i izražen pomoću logičkih konstanti.

Glava LIV

KRETANJE

442. Mnogo je pisano o zakonima kretanja, mogućnosti oslobađanja od uzročnosti u dinamici, relativnosti kretanja i o drugim srodnim pitanjima. Ali, ima nekoliko preliminarnih pitanja koja su veoma teška i veoma značajna, a o kojima je malo toga rečeno. Ipak, logički govoreći, ova pitanja moraju da se reše pre nego što složenijim problemima koji su uobičajeno razmatrani uopšte može da se pristupi sa ikakvom nadom u uspeh. Najveći deo relevantne moderne filozofske literature ilustrovaće istinu ovih zapažanja: predlagane teorije uobičajeno počivaju na jednoj zajedničkoj dogmatskoj osnovi, i lako je uvideti da su nezadovoljavajuće. Sve dok se neki autor ograničava na rušenje svojih protivnika, on sam ostaje neosporiv, a kada konstruiše svoju vlastitu teoriju, onda se on po pravilu izlaže sličnom rušenju od strane nekog drugog autora. U ovim okolnostima moramo da tražimo neki drugi put, čije prečice ostaju neobjašnjene. „Natrag Njutnu“ predstavlja moto reforme u ovoj stvari. Njutnov sholijum za definicije sadrži argumente koji su neosporeni, i koliko znam, neosporivi: oni su na uvidu svetu već dve stotine godina i tokom tog perioda bili su osporavani ili prihvatani. Pošto sam nedorastao prvoj alternativi, prihvatio sam drugu. Pojam kretanja je logički sekundaran u odnosu na pojam zauzimanju prostora u vremenu, a takođe i u odnosu na pojam promene. Kretanje predstavlja zauzimanje, od strane jednog entiteta, kontinuiranog niza mesta u kontinuiranom nizu vremena. Promena je razlika s obzirom na istinitost ili lažnost, između iskaza koji se odnosi na entitet i vreme *T* i iskaza koji se odnosi na taj isti entitet i na neko drugo vreme *T'*, pod uslovom da se ta dva iskaza razlikuju samo na osnovu toga što se u jednom javlja *T*, a u drugom *T'*. Promena je kontinuirana kada iskazi navedene vrste formiraju kontinuirani niz koreliran sa kontinuiranim nizom trenutaka. Tako promena uvek podrazumeva (1) fiksirani entitet i (2) trougaonu relaciju između tog entiteta, nekog drugog entiteta i nekih ali ne svih trenutaka vremena. Ovo predstavlja goli minimum. Puko postojanje nekih, ali ne svih, trenutaka konstituiše promenu prema ovoj definiciji. Razmotrimo, na primer, zadovoljstvo. Znamo da ono postoji u nekim trenucima i možemo pretpostaviti da postoje trenuci u kojima ono ne postoji. Tako postoji relacija između zadovoljstva, postojanja i nekih trenutaka, koja ne važi između zadovoljstva, postojanja i nekih drugih trenutaka. Dakle, u skladu sa definicijom zadovoljstvo se menja prelazeći od postojanja prema nepostojanju i obratno. Ovo pokazuje da definicija zahteva popravku kako bi bila saglasna sa upotrebom. Upotreba nam ne dozvoljava da govorimo o promeni, osim onda kada ono što se menja postoji sve vreme ili kada je barem klasni pojam čije pojedinačne instance uvek postoje. Tako bi u slučaju zadovoljstva trebalo da kažemo da je moj duh ono što se menja kada zadovoljstvo prestaje da postoji. Sa druge strane, ako je moje zdovoljstvo različite veličine u različitim vremenima, trebalo bi da kažemo da zadovoljstvo menja njegovu količinu, mada smo se u Trećem delu složili da samo određene količine zadovoljstva mogu da postoje, ali ne i samo zadovoljstvo. Slično bismo mogli da kažemo da se boja menja, u smislu da postoje različite boje u različitim vremenima u nekom sklopu, mada mogu da postoje samo određene nijanse boje, a ne sama boja. I, uopšte, u slučajevima u kojima su i klasni pojam i pojedinačne instance prosti, uobičajena upotreba bi nam dozvolila da kažemo da, ako neki niz pojedinačnih instanci postoji u nekom kontinuiranom nizu vremena, onda se klasni pojam menja. I zaista, izgleda da je bolje ovo smatrati jedinom vrstom promene, a smatrati nepromenljivim termin koji sam postoji tokom celog datog perioda vremena. Ali ako ovo treba da učinimo, moramo da kažemo da celine koje se sastoje od postojećih delova ne postoje, ili još da celina ne može da očuva svoj identitet ako se bilo koji njen deo promeni. Ovo drugo je tačna alternativa, ali je potrebna izvesna suptilnost kako bi se to tvrdilo. Tako, ljudi kažu da se njihov duh menja: oni kažu da se duh menja kada zadovoljstvo u njemu prestaje da postoji. Ako ovaj iskaz treba da bude tačan, duh ne sme da bude zbir svojih konstituenata. Jer, ako bi bio zbir *svih* svojih konstituenata tokom celog vremena, onda bi očigledno bio takav da se ne menja; a ako bi bio zbir svojih konstituenata u jedno vreme, duh bi izgubio svoj identitet čim bi neki raniji konstituent prestao da postoji, ili neki novi počeo da postoji. Tako, ako je duh nešto, i ako može da se menja, onda duh mora da bude nešto perzistentno i konstantno, prema čemu svi konstituenti psihičkih stanja stoje u jednoj istoj relaciji. Lični identitet bi mogao da se konstituiše posredstvom perzistencije termina prema kojem bi sva stanja osobe (i ništa drugo) stajala u fiksiranoj relaciji. Promena duha bi se onda sastojala naprosto u činjenici da ta stanja nisu ista u svim vremenima.

Tako možemo reći da se termin menja kada stoji u fiksiranoj relaciji prema nekoj kolekciji drugih termina, od kojih svaki postoji u nekom delu vremena, dok ne postoje svi u tačno istom nizu trenutaka. Možemo li na osnovu ove definicije reći da se univerzum menja? Univerzum je jedan donekle dvosmislen termin: on može da označava sve stvari koje postoje u nekom pojedinačnom trenutku, ili sve stvari koje su oduvek postojale ili će postojati, ili zajednički kvalitet bilo čega što postoji. U prva dva smisla, univerzum ne može da se menja; a u poslednjem, ako bi bio nešto različito od egzistencije, može da se menja. Za samu egzistenciju se ne može reći da se menja, mada različiti termini postoje u različitim vremenima, zato što je egzistencija uključena u pojam promene onako kako se on uobičajeno upotrebljava, a koji se primenjuje samo na osnovu razlike između stvari koje postoje u različitim vremenima. U celini ćemo onda ostati najbliže uobičajenoj upotrebi ako kažemo da fiksirana relacija, koja je pomenuta na početku ovog paragrafa, mora da bude relacija prostog klasnog pojma prema prostim pojedinačnim instancama koje su u njemu sadržane.

443. Pojam promene je u velikoj meri bio zamagljen učenjem o supstanciji i to razlikovanjem između prirode neke stvari i njenih spoljašnjih relacija, uz pretpostavljenu subjekat-predikatsku formu iskaza. Pretpostavljano je da bi jedna stvar, na neki način, mogla da bude različita, a da ipak bude ista: da jedna stvar, iako je definišu predikati, ipak može da ima različite predikate u različitim vremenima. Otuda razlikovanje esencijalnog i akcidentalnog, kao i izvestan broj beskorisnih drugih distinkcija, koje su (nadam se) upotrebljavane precizno i svesno od strane sholastičara, ali nejasno i nesvesno od strane modernih filozofa. Promenu u ovom metafizičkom smislu uopšte ne priznajem. Takozvani predikati nekog termina uglavnom su izvedeni iz relacija prema drugim terminima; na kraju, promena počiva na tome da mnogi termini stoje u relacijama prema nekim delovima vremena u kojima ne stoje prema nekim drugim. Ali, svaki termin je večan, bezvremen i nepromenljiv; relacije u kojima on stoji prema delovima vremena takođe su nepromenljive. Činjenica da su različiti termini u odnosima prema različitim vremenima pravi razliku između onoga što postoji u jednom vremanu i onoga što postoji u drugom. I, mada termin može da prestane da egzistira, on ne može da prestane da bude; on je i dalje entitet koji može da se broji kao *jedan* i s obzirom na koji su neki iskazi istiniti, a neki lažni.

444. Vidimo, dakle, da je važna stvar odnos termina prema vremenima koja oni zauzimaju i prema egzistenciji. Može li termin da zauzima vreme a da ne egzistira? Na prvi pogled bi se reklo da može. Teško je negirati da Vejverlijeve pustolovine obuhvataju vreme od 1745. ili da su priče iz 1001 noći obuhvatale period Haruna al Rašida. Ne bi trebalo da kažem, kao što kaže gospodin Bredli, da ova vremena nisu delovi realnog vremena; naprotiv, morao bih da im dam određeni položaj u hrišćanskoj eri. Ali, rekao bih da *događaji* nisu realni u smislu da nisu nikada postojali. Uprkos tome, kada neki termin postoji u neko vreme, postoji jedna osnovna triangularna relacija, nesvodiva na kombinaciju odvojenih relacija prema egzistenciji i prema vremenu. Ovo može da se pokaže na sledeći način. Ako „*A* sada postoji" može da se izanalizira na „*A* je sada" i „*A* postoji", pri čemu *postoji* nije upotrebljeno ni u kojem glagolskom vremenu, moraćemo da tvrdimo da je „*A* je onda" logički moguće, čak i da *A* nije onda postojalo; jer, ako je zauzimanje vremena odvojivo od egzistencije, termin mora da zauzima vreme u kojem ne postoji, čak i ako postoje druga vremena kada on postoji. Ali, prema teoriji o kojoj je reč, „*A* je onda" i „*A* postoji" konstituišu pravo značenje „*A* postoji onda" i, prema tome, kada su ova dva iskaza istinita, *A* mora da je postojalo onda. Ovo može da se izbegne samo na osnovu negiranja mogućnosti analiziranja „*A* postoji sada" u kombinaciji sa dvoterminskim relacijama; i, otuda je neegzistencijalno zauzimanje vremena, ako je uopšte moguće, radikalno različito od egzistencijalne vrste zauzimanja vremena.

Međutim, moglo bi da se primeti da prethodna diskusija ima puko filozofski značaj i da je strogo uzev irelevantna za našu temu. Jer, pošto je egzistencija konstantan termin, sa matematičkog stanovišta nije potrebno da se ona navodi pri definisanju trenutaka koje neki termin zauzima. Sa matematičke tačke gledišta, promena proizlazi iz činjenice da postoje iskazne funkcije koje su istinite za neke ali ne za sve trenutke vremena, a ako one uključuju egzistenciju, to je onda jedan dalji aspekt kojim matematika kao takva ne mora da se bavi.

445. Pre nego što primenimo ova zapažanja na kretanje, moramo da ispitamo teškoću koja je sadržana u ideji zauzimanja mesta u neko vreme. Izgleda da je ovde ponovo u pitanju jedna nesvodiva triangularna relacija. Ako uopšte treba da bude kretanja, ne smemo da analiziramo relaciju na zauzimanje mesta i zauzimanje vremena. Jer, čestica koja se kreće zauzima mnoga mesta, a suština kretanja počiva na činjenici da se ta mesta zauzimaju u različitim vremenima. Ako bi „*A* je ovde sada“ bilo analizabilno na „*A* je ovde“ i „*A* je sada“ sledilo bi da je „*A* je onde onda“ analizabilno na „*A* je onde“ i „*A* je onda“. Ako bi svi ovi iskazi bili nezavisni, mogli bismo da ih različito kombinujemo: iz „*A* je sada“ i „*A* je onde“ mogli bismo da izvedemo „*A* je onde sada“, za šta znamo da je lažno ako je *A* materijalna tačka. Predložena analiza je stoga neprihvatljiva. Ako smo rešeni da izbegnemo relaciju tri termina, moramo da svedemo „*A* je ovde sada“ na „*A*-ovo zauzimanje ovog mesta je sada“. Tako imamo relaciju između *ovo vreme* i kompleksnog termina *A*-ovo zauzimanje ovog mesta. Ali, izgleda da ovo naprosto zamenjuje drugim ekvivalentnim iskazom onaj iskaz koji ovaj drugi pretenduje da objasni. Međutim, matematički posmatrano, ceo neophodni zaključak je da s obzirom na dati termin koji zauzima mesto postoji korelacija između mesta i vremena.

446. Sada možemo da razmotrimo prirodu kretanja, za koju mislim da ne mora da predstavlja neku veliku teškoću. Složili smo se da prosta jedinica materije može da zauzima samo jedno mesto u jedno vreme. Tako, ako je *A* materijalna tačka, „*A* je ovde sada“ isključuje „*A* je onde sada“, ali ne i „*A* je ovde onda“. Tako svaki dati trenutak stoji u jedinstvenoj relaciji, ne direktno već preko *A*, prema nekom pojedinačnom mestu koje *A* zauzima u datom trenutku; ali, nema potrebe da postoji jedinstvena relacija datog mesta prema datom vremenu, pošto zauzimanje mesta može da ispuni nekolika vremena. Neki trenutak, takav da za neki interval koji sadrži taj trenutak, a koji nije njegov poslednji trenutak, važi da je u bilo kom njegovom trenutku *A* na istom mestu, predstavlja trenutak kada je *A* u mirovanju. Trenutak kada ovo ne važi ni za jedan interval jeste trenutak kada je *A* u kretanju, pod uslovom da *A* zauzima *neko* mesto u susednim trenucima na jednoj i na drugoj strani od datog trenutka. Trenutak kada postoje takvi intervali, i kada svi oni imaju dati trenutak kao krajnji termin, jeste trenutak prelaza iz mirovanja u kretanje ili obratno. Kretanje se sastoji u tome da se zauzimanjem mesta u neko vreme ustanovljava korelacija između mestâ i vremenâ; onda kada su različita vremena u toku bilo kog, ma koliko kratkog perioda vremena, korelirana sa različitim mestima, tada govorimo o kretanju; kada su sva različita vremena u toku bilo kog, ma koliko kratkog perioda vremena, korelirana sa istim mestom, tada govorimo o mirovanju.

Sada možemo da nastavimo time što ćemo naše učenje o kretanju izraziti apstraktnim logičkim terminima, imajući na umu da su materijalne čestice zamenjene sa mnogo-jedan relacijama svih vremena prema nekim mestima, ili svih termina kontinuiranog jednodimenzionalnog niza *t* prema nekim terminima kontinuiranog trodimenzionalnog niza *s*. Kretanje se uopšte uzev sastoji u korelaciji različitih vremena *t* sa različitim mestima *s*. Relacija *R* koja ima jedan jedini termin *s* za svoj konverzni domen odgovara materijalnoj čestici koja je u mirovanju tokom celog vremena. Relacija *R* koja korelira sve termine *t* u izvesnom intervalu sa jednim jedinim terminom *s* odgovara materijalnoj čestici koja je u mirovanju tokom celog intervala, sa mogućim izuzimanjem krajnjih termina tog intervala (ako ih uopšte ima), koji mogu da budu termini prelaza između mirovanja i kretanja. Vreme trenutnog mirovanja dato je nekim terminom za koji je diferencijalni količnik nula. Kretanje je kontinuirano ako korelirajuća relacija *R* definiše kontinuiranu funkciju. Treba uzeti kao deo definicije keratanja da je ono kontinuirano, kao i da ima prve i druge diferencijalne količnike. Ovo je jedna sasvim nova pretpostavka koja uopšte nije nnužna, ali naprosto služi tome da dobijemo predmet istraživanja kao što je onaj racionalne dinamike.

447. Može se primetiti da, kao posledica poricanja infinitezimala i s tim u vezi prihvatanja čisto tehničkog gledišta o izvodu funkcije, možemo potpuno da odbacimo pojam *stanja* kretanja. Kretanje se sastoji *isključivo* u zauzimanju različitih mesta u različitim vremenima, tako da je podložno kontinuitetu na način kako je objašnjeno u Petom delu. Ne postoji prelaz od mesta ka mestu, niti uzastopni trenutak ili uzastopni položaj, niti neka takva stvar kao što je brzina, osim u smislu realnog broja koji predstavlja granicu izvesnog skupa količnika. Ovakvo odbacivanje brzine i ubrzanja kao fizičkih činjenica (to jest kao svojstava koja pripadaju *u svakom trenutku* tački koja se kreće, a nisu puki realni brojevi koji izražavaju granice izvesnih odnosa), uključuje, kao što ćemo videti, neke teškoće prilikom formulisanja zakona kretanja; ali, reforma koju je uveo Vajerštras u infinitezimalnom računu učinila je ovo odbacivanje imperativom.

Glava LV

UZROČNOST

448. Velika kontroverza se u skorašnje vreme razvila između onih koji se interesuju za principe dinamike, a u vezi s pitanjem da li se pojam uzročnosti javlja u ovom predmetu istraživanja ili ne. Kirhof (Kirchoff)[1] i Mah (Mach), a u našoj zemlji Karl Person (Karl Pearson), zastupali su gledište da je dinamika strogo deskriptivna, dok oni koji su naklonjeni tradicionalnijem mišljenju smatraju da ona ne samo što registruje sledove, već ujedno i otkriva uzročne veze. Ovu kontroverzu je na veoma interesantan način razmatrao profesor Džejms Vord (James Ward) u knjizi *Naturalizam i agnosticizam*, u kojoj je deskriptivna teorija korišćena da bi se dokazalo da dinamika ne može da pruža metafizičke istine o realnom svetu. Ali, ni u Vordovoj knjizi niti bilo drugde, ne vidim da je sasvim jasno izraženo u čemu se tačno sastoji spor između ove dve škole. Praktični matematički oblik ovog pitanja nastaje tek s obzirom na *silu*, i kada se ono uzme u tom obliku onda ne može biti sumnje da je deskriptivna škola u pravu: pojam sile je pojam koji ne bi trebalo da se uvodi u principe dinamike. Razlozi u prilog ovom tvrđenju su sasvim konkluzivni. Sila je pretpostavljeni uzrok ubrzanja:

---

[1] *Vorlesungen über mathematische Physik*, Leipzig, 1883, Predgovor.

pretpostavlja da se mnoge sile javljaju radi proizvođenja rezultirajućeg ubrzanja. Sada, ubrzanje je, kao što je istaknuto pri kraju prethodne glave, puka matematička fikcija, naime, broj a ne fizička činjenica; a ubrzanje koje ima komponente je dvostruka fikcija jer, slično kao i komponenta svakog drugog zbira vektora, ono nije deo rezultante za koju bi jedino moglo da se pretpostavi da postoji. Stoga je sila, ako bi bila uzrok, bila uzrok učinka[*]koji se nikada ne događa. Ali, ovaj zaključak nije dovoljan kako bi se pokazalo da se uzročnost nikada ne javlja u dinamici. Ako bi deskriptivna teorija bila strogo tačna, izvođenja iz onoga što se javlja u nekim vremenima ka onome što se javlja u nekim drugim, bila bi nemoguća. Takva izvođenja moraju da uključe relaciju implikacije između događaja u različitim vremenima, a svaka takva relacija je u opštem smislu uzročna. Izgleda da je slučaj samo to da uzročnost koja se javlja u dinamici zahteva potpunu konfiguraciju materijalnog sveta kao datost, a da ne daje relacije partikularija prema partikularijama, a koje se relacije uobičajeno nazivaju uzročnim. U ovom pogledu postoji teškoća u interpretaciji takvog navodnog uzrokovanja partikularija partukularijama, kao recimo kod zakona gravitacije. Za objašnjenje ove teškoće biće neophodno da se bavimo uzročnošću detaljnije, ispitujući najpre značenje koje se pridaje uzrokovanju partikularija partikularijama, onako kako se ono uobičajeno shvata, a onda i značenje uzročnosti koje je suštinsko za racionalnu dinamiku, i konačno teškoću koja se tiče ubrzanja koje ima komponente.

449. Predmet ove glave je pre svega logička priroda iskaza o uzročnosti. Tu se javlja jedna priličnа teškoća zbog toga što vremensko sledovanje nije relacija između događaja direktno, nego između trenutaka[1]. Ako bi dva događaja mogla da budu sukcesivna, mogli

---

[*] Videti redaktorsku napomenu uz §435 iz Glave LII (prim. stručnih redaktora prevoda).

[1] Vidi moj članak u *Mind*, N.S, br. 39, „Is position in time and space absolute or relative?“

bismo da smatramo uzročnost relacijom sledovanja između dva događaja, a da pritom uzmemo u obzir vreme kada se oni javljaju. Ako je „*A* prethodi *B*“ istinit iskaz (gde su *A* i *B* stvarni ili mogući temporalno postojeći entiteti) koji ne uključuje pozivanje na neki stvarni deo vremena već samo na vremenski sled, onda možemo da kažemo da *A uzrokuje B*. Zakon uzročnosti bi se onda sastojao u tvrđenju da među stvarima koje aktualno prethode datom pojedinačnom postojećem *B sada*, uvek postoji niz događaja u sukcesivnim trenucima koji bi nužno morali da prethode *B onda*, na potpuno isti način kao i *B sada*; vremenske relacije od *B* prema terminima ovog niza onda mogu da se apstrahuju od svih pojedinačnih vremena i da se tvrde *per se*.

Takvo bi moralo da bude objašnjenje uzročnosti ako prihvatimo da događaji mogu da budu sukcesivni. Ali ako to poričemo, onda nam je potrebna drugačija i komplikovanija teorija. Ispitajmo preliminarno neke karakteristike uzročne relacije.

Uzročna relacija između dva događaja, ma kakva da je njihova priroda, ne uključuje pozivanje na konstantne pojedinačne delove vremena. Nemoguće je da imamo neki takav iskaz poput „*A* uzrokuje *B* sada, ali ne onda“, takav jedan iskaz bi naprosto značio da *A postoji* sada, ali ne onda, i da će stoga *B* postojati u neznatno kasnijem trenutku, mada neće postojati u vremenu koje neznatno sledi prethodnom vremenu. Ali, sama uzročna relacija je večna: ako bi *A postojalo* u nekom drugom trenutku, *B* bi postojalo u sledećem trenutku. Tako „*A* uzrokuje *B*“ ne uključuje pozivanje na konstantne pojedinačne delove vremena.

Dalje, niti *A* niti *B* nisu morali ikada da postoje, mada, ako bi *A* trebalo da postoji u bilo kom trenutku, *B* bi moralo da postoji u sledećem trenutku i obratno. U celokupnoj dinamici se bavimo (a što ću dokazati kasnije) uzročnim vezama; ipak, naši termini neće postojati osim onda kada su primenjeni na konkretne slučajeve. Njihovo nepostojanje je zapravo obeležje onoga što nazivamo racionalnom dinamikom. Uzmimo drugi primer: svako odlučivanje i biranje, sve odluke u vezi sa politikom, zahtevaju valjanost uzročnog niza čiji termini ne postoje i neće postojati. Jer, racionalni izbor zavisi od konstrukcije dva uzročna niza od kojih samo jedan može da se učini postojećim. Ukoliko oba ne bi bili valjani, izbor ne bi imao nikakvu osnovu. Odbačeni niz se sastoji od podjednako valjanih uzročnih veza, samo što povezani događaji ne mogu da se pronađu među postojećim stvarima. Tako se celokupno državništvo i celokupno racionalno vođenje života zasnivaju na metodi frivolnih istorijskih igara u kojima raspravljamo o tome kakav bi svet bio da je Kleopatrin nos bio pola inča duži.

Videli smo da uzročna relacija ne sadrži nikakvo suštinsko pozivanje na egzistenciju, kao ni na pojedinačne delove vremena. Ali uprkos tome ona ipak ima neku vrstu veze sa oba. Ako jedan od njenih termina postoji, takav će biti i drugi; a ako jedan ne postoji, ni drugi takođe ne postoji. Ako je jedan od njenih termina u jednom trenutku, drugi je ili u kasnijem ili u ranijem trenutku. Tako, ako *A* uzrokuje *B*, onda takođe važi „postojanje *A* implicira postojanje *B*" i „to što je *A* u ovom trenutku implicira da je *B* u sledećem trenutku". Ova dva iskaza su implicirana iskazom „*A* uzrokuje *B*"; onaj drugi u svakom slučaju implicira „*A* uzrokuje *B*" tako da ovde imamo uzajamnu implikaciju. Da li i prvi iskaz implicira „*A* uzrokuje *B*" teško je pitanje. Neki bi tvrdili da dva trenutka vremena ili dve tačke prostora impliciraju egzistenciju jednog drugim; ipak, ne može se reći da je relacija između njih uzročna.

Izgledalo bi da bilo šta što postoji u nekom delu vremena stoji u uzročnim relacijama s ostalim. To nije ono što odlikuje ono što postoji pošto smo već videli da dva nepostojeća termina mogu da budu uzrok i učinak. Ali, odsustvo ove karakteristike omogućava razlikovanje termina koji ne mogu da postoje od termina koji bi mogli da postoje. Isključujući prostor i vreme, kao *moguće* postojeći termin možemo da definišemo svaki termin koji stoji u uzročnoj relaciji prema nekom drugom terminu. Ova definicija isključuje brojeve i takozvane apstraktne ideje. Ali, ona priznaje entitete racionalne dinamike koji bi mogli da postoje, mada nemamo razlog da to pretpostavimo.

Ako priznamo (a što izgleda nepobitno) da je bilo šta što zauzima neko dato vreme i uzrok i učinak, onda dobijamo razlog ili za beskonačnost ili za cirkularnost vremena, kao i dokaz da je, ako postoje događaji u nekom delu vremena, tu uvek bilo i da će uvek biti događaja. Ako pored toga priznamo da pojedinačno postojeće *A* može da se izoluje kao uzrok nekog drugog pojedinačno postojećeg *B* koje sa svoje strane uzrokuje *C*, onda se svet sastoji od onoliko nezavisnih uzročnih nizova koliko ima postojećih stvari u bilo kom vremenu. Ovo vodi apsolutnom lajbnicovskom monadizmu – gledištu za koje se uvek tvrdilo da je paradoksalno i da ukazuje na grešku u teoriji iz koje izvire. Vratimo se onda značenju uzročnosti, i nastojmo da izbegnemo paradoks nezavisnih uzročnih nizova.

450. Iskaz „*A* uzrokuje *B*" je, onako kako glasi, nepotpun. Jedino značenje koje on izgleda može da ima jeste „postojanje *A* u bilo kojem vremenu implicira postojanje *B* u nekom budućem vremenu". Uobičajeno se pretpostavljalo da uzrok i učinak treba da zauzimaju uzastopne trenutke; ali, ako se vreme uzme kao kompaktan niz, ne može biti nikakvih uzastopnih trenutaka, a interval između bilo koja dva trenutka biće uvek konačan. Tako, da bismo dobili potpuniji iskaz o uzročnosti, moramo da specifikujemo interval između *A* i *B*. Uzročna veza onda tvrdi da postojanje *A* u bilo kom vremenu implicira postojanje *B* posle nekog intervala koji je nezavisan od toga koje je vreme ono u kojem je *A* postojalo. Drugačije rečeno, mi tvrdimo: „Postoji interval t takav da postojanje *A* u bilo kom vremenu t_1 implicira postojanje *B* u vremenu t_1+t". Ovo zahteva merenje vremena i samim tim podrazumeva ili vremensko rastojanje ili veličinu deljivosti u vezi sa kojima smo se poslednji put složili da ih smatramo pojmom čiste matematike. Tako, ako naše merenje treba da bude ostvareno pomoću rastojanja, onda naš iskaz može da se generalizuje onako kako to zahteva jedan čisto logički iskaz.

451. Preostaje jedno veoma teško pitanje, pitanje kojim se, kada se problem precizno izrazi, najjasnije razlikuje monizam od monadizma. Da li uzročna relacija može da važi između pojedinačnih događaja ili ona važi samo između celog sadašnjeg stanja univerzuma i njegovog celokupnog sledećeg stanja? Ili možemo da zauzmemo srednju poziciju i smatramo da je jedna grupa događaja sada uzročno povezana s jednom drugom grupom u neko drugo vreme, ali ne i sa nekim drugim događajima u to drugo vreme?

Ilustrovaću ovu teškoću slučajem čestica koje se gravitaciono privlače. Neka su date tri čestice *A*, *B* i *C*. Mi kažemo da i *B* i *C* uzrokuju ubrzanja u *A*, i slažemo ta dva ubrzanja pomoću zakona paralelograma. Ali, ovo slaganje nije pravo sabiranje zato što komponente nisu *delovi* rezultante. Rezultanta je novi termin, jednako prost kao i komponente, ali nipošto nije njihov zbir. Tako, učinci pripisani *B* i *C* nikada nisu proizvedeni nego je proizveden treći termin koji se razlikuje od oba. Možemo reći da je taj termin proizveden od *B* i *C* uzetih zajedno kao jedna celina. Ali, učinak koji oni proizvode kao celina može da se otkrije samo na osnovu pretpostavke da svaki od njih proizvodi jedan odvojeni učinak: ako se ovo ne bi pretpostavilo, bilo bi nemoguće da postoje dva ubrzanja čija je rezultanta aktualno ubrzanje. Izgleda da smo stigli do antinomije: celina nema učinak, izuzev onoga što proizlazi iz učinaka delova, ali učinci delova nisu postojeći.

Ispitivanje ove teškoće će grubo uzdrmati naše dugo negovane predrasude o uzročnosti. Kao što ćemo videti, zakoni kretanja zapravo protivreče uobičajenom gledištu i zahtevaju sasvim različito i znatno komplikovanije gledište. U dinamici ćemo videti da (1) uzročna relacija stoji između događaja u tri vremena, a ne u dva, (2) da je celo stanje materijalnog univerzuma u dva od tri vremena nužno za iskaz o uzročnoj relaciji. Da bi se obezbedio ovaj zaključak, ispitajmo uzročnost u manje konvencionalnom duhu.

452. Uzročnost je uopšte uzev princip na osnovu kojeg iz dovoljnog broja događaja u dovoljnom broju trenutaka može da se izvede jedan ili više događaja u jednom ili više novih trenutaka. Pretpostavimo, na primer, da pomoću ovog principa, ako nam je dat izvestan broj događaja e_1 u vremenu t_1, događaja e_2 u vremenu t_2, …, događaja e_n u vremenu t_n, onda možemo da izvedemo događaje e_{n+1} u vremenu $t_{n+1.}$ Onda, ako $e_{r+1} \gtreqless e_r$ i ako su vremena t_r proizvoljan izuzev što je t_{r+1} posle t_r, sledi da iz prvobitnih činjenica možemo da izvedemo izvesne događaje u svim budućim vremenima. Jer, možemo da izaberemo e_1 iz događaja e_2, …, e_n, a njih iz događaja e_{n+1} i možemo da izvedemo događaje e_{n+1} u novom vremenu t_{n+2}. Time je pomoću našeg pretpostavljenog zakona osigurano izvođenje o budućim vremenima. I ako za bilo koju vrednost od r, e_{r+1}>e_r, onda o više nego događaja e_{n+1} može da se zaključi u vreme t_{n+2} pošto ima više načina da se izabere e_r iz događaja e_{r+1}. Ali, ako za bilo koju vrednost r važi e_{r+1}>e_r, onda se izvođenje o prošlosti ispostavlja kao generalno nemoguće. Da bi *nedvosmisleno* izvođenje o prošlosti bilo moguće, nužno je da ova implikacija bude recipročna, toj jest, da događaji e_1 u vreme t_1 budu implicirani sa e_2 u t_2…e_{n+1} u t_{n+1}. Ali, izvesno izvođenje o prošlosti je moguće i bez ovog uslova, naime, da su u vreme t_1 postojali događaji e_1 koji impliciraju zajedno sa drugim sve do t_n, događaje e_{n+1} u vremenu $t_{n+1.}$ Ali, i ovo izvođenje uskoro propada ako, za bilo koju vrednost od r, e_{r+1}>e_r pošto, posle zaključivanja o događajima e_1 u vremenu t_1, e_r u sledećem izvođenju zamenjuje e_{r+1} što je isuviše slabo da bi se omogućilo traženo izvođenje. Tako, ako nedvosmisleno izvođenje nekog dela vremena treba da bude moguće, nužno je i dovoljno (1) da bilo koji iz n+1 grupe događaja bude impliciran drugim $\overline{n}$ grupama; (2) da je $e_r = e_{r+1}$ za sve vrednosti od r. Pošto uzročnost zahteva mogućnost takvog izvođenja, možemo da uzmemo da su ovi uslovi zadovoljeni.

Još jedna donekle komplikovana stvar je sledeća. Ako $e_1e_2…e_n$ uzrokuje e_{n+1}, a e_2...e_{n+1} uzrokuje e_{n+2} itd., onda imamo nezavisan uzročni niz i povratak monadizmu, iako je monada sada kompleks pošto je u svakom trenutku grupa događaja. Ali, ovaj rezultat nije nužan. Može se desiti da samo izvesne grupe $e_1e_2...e_n$ omogućavaju izvođenje e_{n+1}, i da $e_2e_3...e_n$ nije takva grupa. Tako, pretpostavimo da $e'_1e'_2...e'_4$ istovremeno sa $e_1...e_n$ uzrokuju e'_{n+1}. Može biti da $e_2e_3...e_n\,e'_{n+1}$ i $e'_2e'_3...e'_ne_{n+1}$ formiraju uzročne grupe koje uzrokuju redom e_{n+2} i e'_{n+2}. Na ovaj način ne nastaje nikakav nezavisan uzročni niz uprkos pojedinačnim uzročnim nizovima*. Ovo pak ostaje puka mogućnost koja, koliko ja znam, nema nijednu instancu.

Da li opšte primedbe na logičku prirodu iskaza o uzročnosti i dalje važe? Mora li se pretpostaviti da uzročne relacije stoje direktno između *događaja* $e_1e_2... e_{n+1}$ i da prosto impliciraju njihov vremenski sled? I ovo gledište pati od teškoća. Jer, pošto smo prihvatili da su uzastopni termini nemogući, postalo je nužno da pretpostavimo konačne intervale vremena između e_1 i e_2, e_2 i e_3 itd. Stoga dužina ovih intervala mora da se specifikuje, te tako puko pozivanje na događaje bez uzimanja u obzir vremenskog položaja postaje nemoguće. Sve što možemo reći jeste to da je samo relativan položaj relevantan. Ako je data uzročna relacija u kojoj su vremena označena sa t_r, ta relacija će i dalje biti valjana za vremena $T + t_r$. Tako izgleda da je poslednje što može da se kaže: ako su dati događaji *m* u bilo kojem trenutku, *m* drugih događaja u trenutku čije je rastojanje od prvog trenutka specifikovano i tako dalje sve dok ne budemo imali *n* grupa događaja, onda se *m* novih događaja može izvesti u bilo kom novom trenutku čije je rastojanje od prvog trenutka specifikovano, pod uslovom da *m* i *n* imaju podesne vrednosti i da su grupe dogadjaja podesno izabrane – pri čemu, međutim, vrednost koja

* Rasel na ovom mestu po prvi put pravi preciznu i strogu razliku između nizova u smislu nabrajanja termina (eng. *series*) i nizova u tehničkom, matematičkom smislu u kojem kasniji članovi zavise od prethodnih (eng. *sequences*), a što je ovde slučaj zbog postojanja uzročne veze. Zbog toga se čak i u navođenju termina u ovom drugom slučaju ne pojavljuju zarezi u samoj notaciji (prim. stručnih redaktora prevoda).

mora da se pripiše m i n može da zavisi od prirode događaja o kojem je reč. Na primer, u materijalnom sistemu čestica koji se sastoji od N čestica imaćemo $m = N$ i $n = 2$. Ovde m zavisi od prirode materijalnog sistema o kojem je reč. Šta od ovoga važi u psihologiji, za sada je nemoguće reći, pošto psiholozi nisu uspeli da ustanove neke stroge uzročne zakone.

Tako racionalna dinamika pretpostavlja da u jednom nezavisnom materijalnom sistemu konfiguracije u bilo koja dva trenutka impliciraju konfiguraciju u bilo kom drugom trenutku. Ovaj iskaz može da se prevede na jezik čiste matematike, a što ćemo videti u sledećoj glavi. Ali, preostaje pitanje šta možemo da kažemo u vezi sa onim uzrokovanjem partikularija partikularijama koje je *izgleda* uključeno u takve principe kao što je zakon gravitacije. Ali, ova rasprava mora da se odloži za kasnije, sve dok ne ispitamo takozvane zakone kretanja.

Glava LVI

DEFINICIJA DINAMIČKOG SVETA

453. Pre nego što pređemo na zakone kretanja koji uvode nove komplikacije, od kojih neke teško mogu da se izraze pomoću čiste matematike, želim da ukratko u logičkom jeziku definišem dinamički svet, onakav kakavim se ispostavlja na osnovu razmatranja iz prethodnih glava.

Neka je t jedno-dimenzionalni kontinuirani niz, a s trodimenzionalni kontinuirani niz, za koje još nećemo pretpostaviti da su euklidski. Ako je R mnogo-jedan relacija čiji je domen t i čiji je konverzni domen sadržan u s, onda R definiše kretanje materijalne čestice. Nemogućnost uništenja i stvaranja materije izražena je činjenicom da je ceo niz t polje relacije R. Pretpostavimo još i da R definiše kontinuiranu funkciju u s.

Kako bi se definisala kretanja materijalnog sistema, neophodno je samo da razmotrimo klasu relacija koje su takve da imaju svojstva prethodno pripisana relaciji R i da je logički proizvod bilo koje dve od njih nula. Ovaj poslednji uslov izražava neprobojnost. Jer, njime se tvrdi da nikoje dve od naših relacija ne povezuju isti trenutak sa istom tačkom, to jest da nikoje dve čestice ne mogu da budu na istom mestu u isto vreme. Skup relacija koji zadovoljava ove uslove nazvaćemo klasom *kinematičkih kretanja*.

Sa ovim uslovima imamo sve što kinematika zahteva za definiciju materije; a ako bi deskriptivna škola bila u pravu, naša definicija ne bi dodavala neki novi uslov koji bi nas od kinematike odveo u kinetiku. Nezavisno od toga, ovaj uslov je suštinski za izvođenje od događaja u jednom vremenu događajima u nekom drugom vremenu, bez čega bi dinamika izgubila svoju distinktivnu odliku.

454. Uopštena forma iskaza o uzročnosti koja se ovde zahteva je sledeća: klasa *kinetičkih kretanja* je klasa kinematičkih kretanja takvih da, ako su dati relati različitih komponentnih relacija u n datih vremena, ti relati su onda u svim vremenima određeni. U običnoj dinamici imamo n=2, i ta pretpostavka može da se načini a da se ne izgubi ma koja značajna opštost. Naše tvrđenje je onda jednako tome da postoji izvesna specifična mnogo-jedan relacija koja važi između bilo koje dve konfiguracije i njihovih vremena i bilo kog trećeg vremena, kao referencije, i konfiguracije u tom trećem vremenu kao relata; rečeno običnim jezikom, ako su date dve konfiguracije u dva data vremena, konfiguiracija u nekom trećem vremenu je određena. Formalno, princip uzročnosti u ovom obliku može da se izrazi na sledeći način. Ako je R relacija koja je bilo koje od naših kretanja, a t neko vreme, neka R_t bude relacija koja važi samo između t i termina prema kojem t stoji u relaciji R. Ako je K cela klasa kretanja, neka K_1 bude cela klasa takvih termina kao što je R_t. Onda K_t izražava konfiguraciju sistema u vreme t. Sada, neka su t' i t'' bilo koja druga dva termina. Onda je K klasa kinetičkih kretanja ako postoji mnogo-jedan relacija S koja je ista za bilo koja tri vremena i koja važi između klase čiji su termini t, t', t'', K_t i $K_{t'}$ referencija, a konfiguracija $K_{t''}$ relat.

Pojedinačni uzročni zakoni razmatranog pojedinačnog univerzuma, dati su kada je dato S i obratno[1]. Možemo da tretiramo ceo skup univerzuma s obzirom na posedovanje iste relacije S, to jest, istih

[1] U dinamici koja je primenljiva na aktualni svet, specifikacija S zahteva pojam mase.

uzročnih zakona, tako da se univerzumi razlikuju samo u pogledu distribucije metarije, to jest u pogledu klase *K*. Ovo je uobičajen postupak u racionalnoj dinamici na osnovu kojeg se uobičajeno definiše njeno *S* na način za koji se veruje da će biti primenljiv na aktualni svet, a koristi svoju slobodu samo kako bi zamišljao različite materijalne sisteme.

Može se primetiti da je zahvaljujući odbacivanju infinitezimala nužno dati integrisanu formu našem opštem zakonu uzročnosti. Mi ne možemo da uvodimo brzine i ubrzanja prilikom formulisanja opštih principa, mada ona postaju neophodna čim počnemo da se bavimo zakonima kretanja. Kao što ćemo videti u sledećoj glavi, veliki deo Njutnovih zakona sadržan je u gorenavedenoj definiciji, ali treći zakon uvodi jednu radikalnu novinu i izaziva teškoću u pogledu uzrokovanja partikularija partikularijama koju smo već pomenuli, ali je još nismo ispitali.

Glava LVII

NJUTNOVI ZAKONI KRETANJA

455. U ovoj glavi ćemo za trenutak usvojiti jedan naivan odnos prema Njutnovim zakonima. Nećemo da ispitujemo da li oni stvarno važe, ili da li zaista postoje drugi osnovni zakoni koji važe za etar; ovde je problem samo to da ovim zakonima damo značenje.

Prva stvar koje se treba setiti jeste – a što će savremeni fizičari teško osporiti – da je *sila* matematička fikcija, a ne fizički entitet. Druga stvar se sastoji u tome da je na osnovu filozofije kalkulusa ubrzanje puka matematička granica, i da ono sâmo ne izražava određeno stanje ubrzane čestice. Možemo se prisetiti da smo prilikom razmatranja izvoda ispitivali da li ih je moguće posmatrati na neki drugi način nego kao granicu – da li bi zapravo oni sami mogli da se tretiraju kao razlomci. Utvrdili smo da je to nemoguće. U tom zaključku nije bilo ničeg novog, ali njegova primena u dinamici će dati mnogo toga što je karakteristično novo. Bilo je uobičajeno smatrati brzinu i ubrzanje fizičkim činjenicama i tako dobiti zakone kretenja povezivanjem konfiguracije i ubrzanja. Ali, to je za nas kao krajnje objašnjenje zabranjeno. Postaje nužno tražiti neku integrisaniju formu za zakone kretanja, a kao što je očigledno, ta forma mora da bude povezivanje tri konfiguracije.

456. Prvi zakon kretanja ponekad se smatra definicijom jednakih vremena. Ovo gledište je sasvim apsurdno. Prvo, jednaka vremena nemaju nikakvu definiciju, osim kao vremena čija je veličina ista. Drugo, osim ako nam prvi zakon ne bi rekao *kada* ne postoji nikakvo ubrzanje (što on ne čini), to nam ne bi omogućilo da otkrijemo koja kretanja su ravnomerna. Treće, ako bi uvek imalo smisla reći da je neko dato kretanje ravnomerno, onda ne bi moglo da postoji nijedno kretanje koje bi definisalo ravnomernost. Četvrto, nauka kaže da nijedno kretanje koje se javlja u prirodi nije ravnomerno; stoga mora da postoji značenje ravnomernosti nezavisno od svih aktualnih kretanja – a ova definicija predstavlja opis jednakih apsolutnih rastojanja u jednakim apsolutnim vremenima.

Prvi zakon u Njutnovom obliku tvrdi da se brzina ne menja u odsustvu uzročnog dejstva od strane nekog drugog dela materije. Ovako kako je formulisan, ovaj zakon je potpuno konfuzan. On nam ne kaže ništa u pogledu toga kako se otkriva to uzročno dejstvo, niti išta o okolnostima u kojima se to uzročno dejstvo javlja. Ali, može se pronaći jedno važno značenje ovoga zakona ako se prisetimo da je brzina fikcija i da su jedini događaji koji se javljaju u bilo kom materijalnom sistemu različiti položaji njegovih različitih čestica. Onda, ako pretpostavimo (kao što svi zakoni kretanja to prećutno i čine) da mora da postoji neka relacija između različitih konfiguracija, ovaj zakon kaže da jedna takva relacija može da važi samo između *tri* konfiguracije, a ne između dve. Jer, dve konfiguracije se zahtevaju i za brzinu, a još jedna za promenu brzine, i upravo to je ono za šta zakon tvrdi da je relevantno. Tako, u svakom dinamičkom sistemu, kada su specifikovani posebni zakoni koji regulišu taj sistem (različiti od zakona kretanja), konfiguracija u bilo kom datom vremenu može da se izvede onda kada su poznate *dve* konfiguracije u *dva* data vremena.

457. Drugi i treći zakon uvode novu ideju *mase*, a treći takođe pruža i jedan smisao u kojem ubrzanje zavisi od konfiguracije.

Drugi zakon, onako kako je formulisan, jeste bezvredan. Jer, mi ne znamo ništa o sili koja je delovala izuzev da ona proizvodi promenu kretanja, te bi tako zakon mogao da izgleda kao puka tautologija. Ali, povezivanjem sile koja je delovala, sa konfiguracijom, može da se otkrije jedan značajan zakon koji glasi: U materijalnom sistemu koji se sastoji od n čestica, postoje izvesni konstantni koeficijenti (mase) m_1, m_2, ..., m_n koje treba povezati sa ovim česticama; a kada se ovi koeficijenti uzmu kao da formiraju deo kofiguracije, onda je m_1 pomnoženo sa odgovarajućim ubrzanjem izvesna funkcija trenutne konfiguracije; ova funkcija je ista za sva vremena i za sve konfiguracije. Ona je takođe funkcija koja zavisi samo od relativnih položaja: ista konfiguracija u nekom drugom delu prostora vodiće istim ubrzanjima. To znači, ako su x_r, y_r i z_r koordinate od m_r u neko vreme t, onda važi $x_r = f_r(t)$ itd. i

$$m_1 \ddot{x}_1 = F(m_1, m_2, m_3, \ldots, m_n, x_2 - x_1, x_3 - x_1, \ldots, x_n - x_1, y_2 - y_1, \ldots).$$

Ovo uključuje pretpostavku da je $x_1 = f_1(r)$ funkcija koja ima drugi diferencijalni količnik $\ddot{x}_1$*; upotreba ove jednačine dalje uključuje pretpostavku da $\ddot{x}_1$ ima prvi i drugi integral. Međutim, gorenavedeni izraz predstavlja krajnje specijalizovanu formu drugog zakona; u opštem obliku, funkcija F može da uključuje koeficijente različite od masa, i brzine kao i položaje.

458. Treći zakon je veoma zanimljiv**;** on omogućava analiziranje F na vektorski zbir funkcija od kojih svaka zavisi samo od m_1 i od

* Zanimljivo je da Rasel na ovom mestu koristi notaciju koju je Njutn uveo 1671. u spisu *Tractatus de Methodis Serierum et Fluxionum* u kojem je izneo svoj metod to jest teoriju fluksije (jedna od ranijih verzija Njutnovog infinitezimalnog računa koja je prethodila tzv. računu prvih i poslednjih odnosa iz *Principia*). Njutn je fluksijama nazivao kvantitete u stanju nastajanja (*in statu nascendi*), a nastale kvantitete nazivao je fluentama. Kao što je Lajbnic razlikovao diferencijale višeg reda, tako je i Njutn razlikovao fluksije višeg reda i koristio je simbole $\dot{x}$, $\ddot{x}$, $\dddot{x}$, $\ddddot{x}$, itd. (gde je x fluenta). Njutnovske fluksije i lajbnicovski diferencijali su u savremenoj matematičkoj analizi zamenjeni izvodima funkcija (prim. stručnih redaktora prevoda)

neke druge čestice m_r i njihovog relativnog položaja. On tvrdi da je ubrzanje m_1 sačinjeno od komponentnih ubrzanja koja se sepcifično redom odnose na $m_2, m_3, \ldots, m_n$; a ako su ove komponente $f_{12}, f_{13}, \ldots, f_{1n}$ onda se zakonom tvrdi da ubrzanje neke druge čestice m_r ima odgovarajuću komponentu f_{r1}, takvu da

$$m_r f_{r1} = -\, m_1 f_{1r}.$$

Ovaj zakon vodi uobičajenim svojstvima centra mase. Jer, ako je $\ddot{x}_{12}$ x-komponenta od f_{12}, onda $m_1\ddot{x}_{12} + m_2\ddot{x}_{21} = 0$ i tako

$$\sum_r \sum_s m_r \ddot{x}_{rs} = 0$$

Dalje, poseban odnos f_{12} prema m_2 može biti samo pozivanje na masu m_2, rastojanje r_{12} i smer linije 12; jer, samo ovo su intrinsične relacije između dve čestice. Često se kao deo trećeg zakona specifikuje da je ubrzanje u smeru 12, i izgleda da to vredi uključiti kao specifikaciju zavisnosti f_{12} od linije 12. Tako je f_{12} duž 12 i važi

$$f_{12} = \phi\,(m_1, m_2, r_{12}),$$
$$f_{21} = \phi\,(m_2, m_1, r_{12})$$

i

$$m_1\phi\,(m_1, m_2, r_{12}) = m_2\phi\,(m_2, m_1, -r_{12}),$$

ili će merenja f_{12} od 1 prema 2 i f_{21} od 2 prema 1 imati isti znak, i

$$m_1\phi\,(m_1, m_2, r_{12}\,) = m_2\phi\,(m_2, m_1, r_{12}).$$

Otuda je $m_1\phi\,(m_1, m_2, e_{12})$ simetrična funkcija od m_1 i m_2, recimo

$$\psi\,(m_1, m_2, r_{12}).$$

Tako imamo:

$$f_{12} = \frac{1}{m_1}\,\psi(m_1, m_2, r_{12}),$$
$$f_{21} = \frac{1}{m_2}\,\psi(m_1, m_2, r_{12}).$$

Vidimo da je rezultujuće ubrzanje svake čestice analizabilno na komponente koje zavise samo od same te čestice i od neke druge čestice; ali, ova analiza primenjuje se samo na taj iskaz s obzirom na ubrzanje. Nijedna takva analiza nije moguća kada ne upoređujemo konfiguraciju i ubrzanje već tri konfiguracije. U svakom trenutku, iako promena rastojanja i prave linije 12 ne zavisi samo od m_1 i m_2, ipak se ubrzanje m_1 sastoji od komponenata od kojih bi svaka bila ista kakva bi bila da postoji samo jedna druga čestica u polju. Ali, kada je u pitanju konačno vreme, ovo više nije slučaj. Ukupna promena položaja m_1 tokom vremena t nije ono što bi bilo da je m_2 najpre delovalo samo u neko vreme t, zatim m_3 samo itd. Tako ne možemo da govorimo o nekom ukupnom učinku m_2 ili od m_3; a pošto su trenutni učinci fikcije, ne postoje stvarno nezavisni učinci izdvojenih čestica na m_1. Iskaz formulisan preko ubrzanja treba smatrati matematičkom domišljatošću, a ne kao da bi stvarno postojalo ubrzanje neke čestice koje je uzrokovano ubrzanjem neke druge. Tako izbegavamo veoma ozbiljnu teškoću na koju bismo inače morali da naiđemo, naime, da komponentna ubrzanja, pošto (uopšte uzev) nisu delovi rezultirajućeg ubrzanja, ne bi bila stvarna, čak i ako bismo dozvolili da je ubrzanje stvarna činjenica.

459. Prva dva zakona su u potpunosti sadržana u sledećem stavu: u svakom nezavisnom sistemu, konfiguracija u bilo kom vremenu je funkcija tog vremena i konfiguracija u dva data vremena, pod uslovom da u konfiguraciju uključimo mase različitih čestica koje čine taj sistem. Treći zakon dodaje još činjenicu da konfiguracija može da se izanalizira na rastojanja i prave linije; funkcija konfiguracije koja predstavlja ubrzanje neke čestice jeste vektorski zbir funkcija koje sadrže samo jedno rastojanje, jednu pravu liniju i dve mase svaka – pored toga što, ako prihvatimo dopunu trećeg zakona o kojoj je prethodno bilo reči, svaka od ovih funkcija jeste vektor koji se pruža duž spoja dve čestice koje u taj spoj ulaze. Ali, za ovaj zakon bi moglo da se desi da ubrzanje m_1 uključuje površinu trougla 123 ili zapreminu tetraedra 1234; a da nije ovog zakona, ne bismo imali uobičajena svojstva centra mase.

Ova tri zakona zajedno, izložena na ovakav način, pružaju nam veći dao sadržaja zakona gravitacije; ovaj zakon nam samo kaže da je, u meri u kojoj se to tiče gravitacije, gorenavedena funkcija $\psi(m_1m_2/r_{12}) = m_1m_2/r_{12}^2$. Treba se prisetiti da na osnovu zakona kretanja ne znamo ništa o obliku funkcije ψ i da bismo mogli imati, na primer, $\psi = 0$ ako $r_{12}>R$. Ako bi ψ imalo ovaj oblik, pod uslovom da je R malo u poređenju sa opažljivim rastojanjima, svet bi izgledao kao da nema nikakvog dejstva na daljinu.

Treba primetiti da prva dva zakona, u skladu sa gore sprovedenom analizom, izražavaju samo opšti oblik zakona uzročnosti koji smo objasnili u Glavi LV. Iz ovoga proizlazi da ćemo uz uobičajenu pretpostavku koja se tiče kontinuiteta i postojanja prvog i drugog izvoda moći da u potpunosti odredimo kretanje kada su nam dati konfiguracija i brzine u nekom datom trenutku; a posebno, ovi podaci će nam omogućiti da odredimo ubrzanje u datom trenutku. Treći zakon i zakon gravitacije zajedno dodaju još i svojstvo da trenutna ubrzanja zavise samo od trenutne konfiguracije, a ne od trenutnih brzina, kao i da je rezultujuće ubrzanje bilo koje čestice vektorski zbir komponenata od kojih svaka zavisi samo od masa i rastojanja date i neke druge čestice.

Pitanje da li se njutnovska dinamika primenjuje na takve probleme kao što su problemi kretanja etra, jeste zanimljivo i značajno pitanje; ali, ukoliko se bavimo istinitošću i lažnošću zakona kretanja s obzirom na stvarni svet, to pitanje je za nas irelevantno. Za nas kao čiste matematičare, zakoni kretanja i zakon gravitacije nisu u pravom smislu uopšte zakoni, već delovi definicije izvesne vrste materije.

460. Prethodno objašnjenje upereno je protiv stanovišta o uzročnosti koje je uobičajeno zadovoljavalo filozofe (1) s obzirom na to što relacija koja figurira u zakonu uzročnosti ne važi između tri događaja, već između dva; (2) s obzirom na to što zakon uzročnosti ima jedinstvo formule ili funkcije, to jest jedne konstantne relacije, a ne ono jedinstvo koje bi naprosto bilo izvedeno iz ponavljanja istog uzroka. Prvo je učinjeno nužnim modernim teorijama infinitezimalnog računa; a drugo je oduvek bilo nužno, a barem od Njutnovog vremena. Oba zahtevaju razjašnjenje.

(1) Suština dinamičkog uzrokovanja u celosti je sadržana u sledećoj jednačini: ako su t_1 i t_2 neka specifikovana vremena, a C_1 i C_2 odgovarajuće konfiguracije bilo kog samodovoljnog sistema, a C konfiguracija u bilo koje vreme t, onda

$$C = F\,(C_1, t_1, C_2, t_2, t)$$

(sažeta forma za onoliko jednačina koliko C ima koordinata). Oblik od F zavisi samo od broja čestica i od dinamičkih zakona datog sistema, a ne od izbora C_1 ili C_2. Mora se pretpostaviti da su uzrok *dve* konfiguracije C_1 i C_2, a interval $t_2 - t_1$ koji može biti bilo koji. Dalje, t može da bude između t_1 ili t_2 ili pre oba. Učinak je bilo koja od koordinata sistema u vreme t ili bilo koja kolekcija tih koordinata; ali, izgleda da je bolje posmatrati svaku koordinatu kao jedan učinak, pošto je svaka data jednom jednačinom. Stoga jezik uzroka i učinaka mora strašno da se nategne da bi zadovoljio slučaj i izgleda da je jedva vredno truda čuvati ga. Uzrok predstavlja dva stanja celog sistema u vemenima koja su odvojena onoliko koliko se želi; učinak je koordinata sistema u bilo koje vreme pre, posle ili između ovih vremena u uzroku. Ništa nije manje verovatno od gledišta koja su filozofi voleli da zastupaju. Stoga u celini nije vredno truda zadržati reč *uzrok*: dovoljno je reći, a što je ujedno i daleko manje pogrešno, da nam bilo koje dve konfiguracije dopuštaju da izvedemo bilo koju drugu.

(2) Uzročni zakon koji reguliše bilo koji sistem sadržan je u obliku funkcije F. Ovaj zakon ne tvrdi da će događaj A uvek slediti neki drugi događaj B; ako je A konfiguracija sistema u neko vreme, ništa ne može da se izvede o konfiguraciji tog sistema u neko drugo vreme; konfiguracija bi mogla da se ponovi a da se ne ponovi nijedna konfiguracija koja joj je prethodno sledila. Ako A predstavlja dve konfiguracije čija su rastojanja u vremenu data, onda nam uzročni zakon zaista kaže koje konfiguracije će iza njih slediti, a ako se A

ponovi, ponoviće se i ono što je sledilo A. Ali, ako bi to bilo sve što nam naš uzročni zakon kaže, to bi bila slaba uteha, pošto se nijedna konfiguracija zapravo nikada ne ponavlja. Pored toga, bilo bi nam potrebno beskonačno mnogo kauzalnih zakona kako bi se zadovoljili zahtevi sistema koji sukcesivno ima beskonačan broj konfiguracija. Naš zakon zapravo tvrdi da u beskonačnoj klasi učinaka svaki ima isti funkcionalni odnos prema jednoj od beskonačnih klasa uzroka, a to je izraženo pomoću formule. Formula povezuje *bilo koje* tri konfiguracije i upravo zbog toga kontinuirana kretanja ne bi bila podložna uzročnim zakonima koji se sastoje u specifikacijama ove formule.

461. Do sada sam govorio o nezavisnim sistemima od n čestica. Preostaje da se ispita da li se bilo kakve teškoće uvode time što u dinamičkom svetu nema nezavisnih sistema izuzev materijalnog univerzuma. Videli smo da nikakav učinak ne može da bude pripisan unutar nekog materijalnog sistema bilo kom delu tog sistema; ceo sistem je neophodan za svako izvođenje o tome šta će se dogoditi nekoj čestici. Jedini učinak koji je tradicionalno pripisivan dejstvu neke pojedinačne čestice na neku drugu, jeste komponentno ubrzanje; ali (α) ovo nije deo rezultujućeg ubrzanja, (β) samo rezultujuće ubrzanje nije događaj ili fizička činjenica već puka matematička granica. Stoga ništa ne može da se pripiše pojedinačnim česticama. Ali, može se prigovoriti da mi ne možemo poznavati ceo materijalni univerzum, i da, pošto nikakav učinak ne može da se pripiše bilo kom delu kao takvom, ne možemo, sledstveno tome, znati bilo šta o učinku celine. Na primer, prilikom izračunavanja kretanja planeta mi zanemarujemo stajaće zvezde, praveći se da je sunčev sistem ceo univerzum. Sa kojim pravom, onda, pretpostavljamo da su učinci ovog fingiranog univerzuma na bilo koji način slični učincima aktualnog univerzuma?

Odgovor na ovo pitanje pronalazi se u zakonu gravitacije. Možemo pokazati da ako uporedimo kretanja čestice u nekom broju univerzuma koji se razlikuju samo u pogledu materije na većem rastojanju od *R*, dok podosta unutar tog rastojanja svi oni sadrže dosta materije, onda će kretanje čestice o kojoj je reč relativno prema materiji koja je podosta unutar rastojanja *R* biti aproksimativno isto u svim univerzumima[1]. Ovo je moguće zato što je prema trećem zakonu neka vrsta fiktivne analize na parcijalne učinke moguća. Tako možemo približno da izračunamo učinak univerzuma čiji je samo jedan deo poznat. Ne smemo reći da je učinak stajaćih zvezda neosetan zato što pretpostavljamo da one nemaju nikakav učinak *per se*; moramo reći da se učinak univerzuma u kojem one postoje malo razlikuje od učinka univerzuma u kojem one ne postoje; a to možemo da dokažemo i u slučaju gravitacije. Uopšteno govoreći, potrebno nam je (posežući ponovo za našom prethodnom funkcijom ϕ) da, ako je ε bilo koji ma koliko mali broj, treba da postoji neko rastojanje *R* takvo da, vraćajući se na našu funkciju ϕ, ako $\frac{d}{ds}$ označava diferencijaciju u bilo kom pravcu, onda

$$\frac{d}{ds}\int_r^\infty \phi\,(r)dr < \epsilon \text{ ako } r > R$$

Kada je ovaj uslov zadovoljen, razlika između relativnih ubrzanja dve čestice unutar izvesne oblasti, koja proizlazi iz pretpostavljanja različitih rasporeda materije na rastojanju većem od *R* od izvesne tačke unutar te oblasti, imaće pripisivu gornju granicu, te će otuda postojati gornja granica greške koja je izazvana fingiranjem da nema materije izvan prostora čiji je prečnik *R*. Stoga aproksimacija postaje moguća uprkos činjenici da je ceo univerzum uključen u egzaktno određivanje bilo kog kretanja.

Ovo vodi dvama zapažanjima od izvesnog značaja. Prvo, nijedan zakon koji ne zadovoljava gorenavedenu nejednakost ne može praktično da se primeni ili proveri. Na primer, pretpostavka da gravitacija varira kao direktno rastojanje mogla bi da se proveri samo u

[1] Ovo je istinito jedino za *relativna*, ali ne i za apsolutna kretanja.

konačnom univerzumu. A u svim fenomenima, poput elektriciteta, u slučajevima u kojima je ukupni učinak zbir ili integral ili je pak izračunat pomoću zbira ili integrala, moramo pretpostaviti da je udeo koje velike vrednosti doprinose relativnim kretanjima *r* mali**.** Drugo, osporavanje nekog parcijalnog učinka nekog dela sasvim je neophodno ukoliko želimo da primenimo naše formule na beskonačni univerzum u obliku integrala. Jer, integral nije realno beskonačan zbir već granica konačnog zbira. Tako, ako bi svaka čestica imala parcijalni učinak, ukupni učinak beskonačno mnogo čestica *ne* bi bio integral. Ali, iako integral ne može da predstavlja beskonačan zbir, izgleda da nema nikakvog razloga zašto on ne bi predstavljao učinak univerzuma koji ima beskonačno mnogo delova. Ako bi postojale konačne zapremine koje sadrže beskonačan broj čestica, pojam mase bi morao da se modifikuje tako da se više ne primenjuje na pojedinačne čestice, već isključivo na beskonačne klase čestica. Gustina u jednoj tački onda neće biti masa te tačke već diferencijalni količnik, u toj tački, mase s obzirom na zapreminu.

Trebalo bi primetiti da nemogućnost nezavisnog sistema bez celog univerzuma ne proizlazi iz zakona kretanja već iz posebnih zakona poput zakona gravitacije, na koje su nas zakoni kretanja naveli da ih tražimo.

462. Da zaključimo, zakoni kretanja nisu zaodenuti samoočiglednošću; naprotiv, oni osporavaju onaj oblik uzročnosti koji se uobičajeno smatrao očiglednim. Da li su oni na kraju krajeva valjani, ili su samo približne generalizacije, to mora ostati sumnjivo, a tim više što u svim njihovim uobičajenim oblicima oni pretpostavljaju istinitost aksioma o paralelama za koji trenutno nemamo nikakav dokaz. Zakoni kretanja, slično aksiomu o paralelama s obzirom na prostor, mogu da se smatraju ili delovima definicije klase mogućih materijalnih univerzuma ili empirijski verifikovanim tvrđenjima koja se odnose na stvarni materijalni univerzum. Ali, oni ni na koji način ne mogu da se uzmu kao *a priori* istine koje su nužno primenljive na bilo koji mogući materijalni svet. *A priori* istine koje se javljaju u dinamici jesu samo istine logike: kao sistem deduktivnog rasuđivanja, dinamika ne zahteva ništa više, dok kao nauka o onome što postoji, ona zahteva eksperiment i posmatranje. Oni koji su priznali sličan zaključak u geometriji verovatno ga neće ovde dovoditi u pitanje; ali, značajno je zasebno ustanoviti svaku instancu principa da znanje u pogledu onoga što postoji nikada nije izvodivo iz opštih filozofskih razmatranja, već je uvek u celosti empirijsko.

Glava LVIII

APSOLUTNO I RELATIVNO KRETANJE

463. U opravdano čuvenom sholijumu za definicije, Njutn je sa zadivljujućom preciznošću izneo učenje o apsolutnom prostoru, vremenu i kratanju. Budući da nije bio vešt filozof, nije mogao da izloži razloge u prilog svojim gledištima, pored empirijskog argumenta koji je izveo iz aktualne dinamike. A Lajbnic, budući filozofski potkovan kao niko drugi, pobijao je Njutnovu poziciju u prepisci koju je vodio sa Klarkom (Clarke)[1]; po mišljenju kasnijih filozofa, pobeda je bila potpuno na Lajbnicovoj strani. Iako je izgledalo da Kant u transcendentalnoj estetici naginje prihvatanju aspolutnog položaja u prostoru, on u *Metafizičkim principima prirodne nauke* sasvim jasno i definitivno usvaja relacionističko gledište. Ne samo filozofi nego i ljudi od nauke su bili jedinstveni u odbacivanju apsolutnog kretanja, ovi drugi iz razloga što ne može da se opazi, te da stoga ne može ni da bude podatak u empirijskom istraživanju.

Ali, uvek bi preostala jedna velika teškoća, a to je argument na osnovu apsolutne rotacije koji je formulisao sam Njutn. Ovaj argument je uprkos ustanovljenom tvrđenju da je svo kretanje relativno,

[1] *Phil. Werke*, Ed. Gerhardt, Vol. VII.

prihvatio i prigrlio Klark Maksvel (Clerk Maxwell)[1]. Njutnov argument obnovio je i isticao Hejmans (Heymans)[2], pobijali su ga Mah[3], Karl Person (Pearson)[4] i mnogi drugi, učinivši ga osnovom opšteg napada na dinamiku u knjizi *Naturalizam i agnosticizam* profesora Vorda. Izrazimo najpre ovaj argument u različitim oblicima, a potom ispitajmo neke od pokušaja da se na njega odgovori. Za nas, pošto smo priznali apsolutno vreme i prostor, nema potrebe za izbegavanjem apsolutnog kretanja, a zapravo niti bilo koje mogućnosti da se to i učini. Ali, ako je apsolutno kretanje u svakom slučaju neizbežno, to pruža novi argument u prilog ispravnosti naše logike koja, nasuprot logici koja je u opticaju među filozofima, usvaja i čak insistira na njegovoj mogućnosti.

464. Ako se kofa s vodom zarotira, Njutn primećuje da voda postaje konkavna i da se penje uz zid kofe. Ali ako kofa miruje u sudu koji sam rotira, površina vode će ostati ravna uprkos relativnoj rotaciji. Tako apsolutna rotacija biva uključena u fenomen o kojem je reč. Slično tome, na osnovu Fukoovog klatna i drugih sličnih eksperimenata, rotacija Zemlje može da se dokaže, a mogla bi da se dokaže čak i ako ne bi bilo nebeskih tela s obzirom na koja rotacija postaje opažljiva. Ali, to zahteva da prihvatimo da je Zemljina rotacija apsolutna. Moguće je navesti i jednostavnije primere poput slučaja čestica koje se uzajamno privlače zavhaljujući gravitaciji. Ako bi kretanje kojim se bavi dinamika bilo sasvim relativno, ove čestice bi, ako bi konstituisale ceo univerzum, mogle da se kreću samo po liniji koja ih povezuje, a stoga bi na kraju pale jedna na drugu. Ali, dinamika nas uči da ako one inicijalno imaju relativnu brzinu, ali ne duž linije koja ih povezuje, one bi opisivale konusne preseke oko

---

[1] *Matter and Motion*, kontrastirati Art. CV i Art. XXX.

[2] *Die Gesetze und Elemente des wissenschaftlichen Denkens*, Leyden, 1890.

[3] *Die Mechanik in ihrer Entwickelung*, Leipzig, 1883 (prevod, London, 1902).

[4] *Grammar of Science*, London, 1892 (drugo izdanje, 1900).

svog centra gravitacije kao žiže. I generalno, ako je ubrzanje izraženo pomoću polarnih koordinata, biće termina koji ubrzavaju a koji umesto da sadrže različite diferencijale sadrže kvadrate ugaonih brzina: ovi termini zahtevaju apsolutnu ugaonu brzinu i neobjašnjivi su ukoliko se držimo relativnog kretanja.

Ako se zakon gravitacije tretira kao univerzalan, ovaj problem može da se izrazi na sledeći način. Zakoni kretanja treba da budu izraženi pozivanjem na ono što se naziva *kinetičkim* osama: ovo su zapravo ose koje nemaju apsolutno ubrzanje i nikakvu apsolutnu rotaciju. Na primer, tvrdi se da kada se treći zakon kombinuje sa pojmom mase, ako su m i m' mase dve čestice, između kojih postoji sila, komponentna ubrzanja te dve čestice, koja postoje zahvaljujući ovoj sili, stoje u odnosu $m_2 : m_1$. Ali, ovo će biti tačno samo ako su ubrzanja merena u odnosu na ose koje same nemaju nikakvo ubrzanje. Ovde ne možemo da uvedemo centar mase jer, u skladu s principom da dinamičke činjenice moraju da budu, odnosno da budu izvedene iz opažljivih podataka, masa a stoga i centar mase mora da se dobije na osnovu ubrzanja, a ne obratno. Otuda, svako dinamičko kretanje, ako podleže zakonima kretanja, mora da se poziva na ose koje ne podležu bilo kakvim silama. Ali, ako treba prihvatiti zakon gravitacije, nikakve *materijalne* ose neće zadovoljiti ovaj uslov. Stoga ćemo morati da pretpostavimo *prostorne* ose, a kretanja koja se na njih odnose biće naravno apsolutna kretanja.

465. Kako bi izbegao ovaj zaključak, Nojman (C. Neumann)[1] kao suštinski deo zakona kretanja pretpostavlja postojanje, negde, apsolutno krutog „Tela *Alfa*“, pozivanjem na koje sva kretanja treba da se procenjuju. Ovaj predlog previđa suštinu rasprave koja se (ili treba da se) odnosi na logičko *značenje* dinamičkih iskaza, a ne na način na koji su oni otkriveni. Izgleda dovoljno očigledno da je, ako je nužno izumeti fiksirano telo, da bi čisto hipotetički služilo nikakvoj drugoj svrsi sem da bude fiksirano, razlog za to taj da se ima

[1] *Die Galilei-Newtonsche Theorie*, Leipzig, 1870, str. 15.

fiksirano *mesto*, što je jedino relevantno, dok je telo koje ga zauzima irelevantno. Tačno je da Nojman ne rizikuje zapadanje u začarani krug koji bi bio sadržan u tome što bi se reklo Telo *Alfa* fiksirano, dok su sva kretanja relativna prema njemu; on tvrdi da je ono kruto, ali ispravno izbegava svaki izraz koji bi se ticao njegovog mirovanja ili kretanja, što bi u njegovoj teoriji bilo potpuno besmisleno. Uprkos tome, izgleda očevidno da je pitanje da li neko telo miruje ili da li se kreće mora da ima isto tako dobro značenje kao i isto pitanje koje bi se ticalo bilo kog drugog tela; ovo deluje dovoljno kako bi Nojmanovo predloženo oslobađanje od apsolutnog kretanja bilo osuđeno na propast.

466. Razvijanje Nojmanovog gledišta preduzeo je Štrajnc (Streintz)[1] koji tretira kretanja s obzirom na ono što naziva „fundamentalnim telima" i „fundamentalnim osama". Ova su definisana kao tela ili ose koja ne rotiraju i koja su nezavisna od svih spoljašnjih uticaja. Štrajnc sledi Kantove *Principe* smatrajući da je moguće prihvatiti apsolutnu rotaciju, a poreći apsolutnu translaciju. Ovo je gledište koje ću ukratko da razmotrim i koje je, kao što ćemo videti, iako fatalno po ono što se traži od relacione teorije, ipak logički održivo, mada Štrajnc ne pokazuje da je to slučaj. Ali, pored ovog pitanja, ovoj teoriji mogu da se upute i sledeće dve primedbe. (1) Ako kretanje *znači* kretanje u odnosu na fundamentalna tela (a ako ne, njihovo uvođenje ne daje nikakvu dobit s logičke tačke gledišta), onda zakon gravitacije postaje strogo besmislen ako se pretpostavi da je univerzalan – gledište koje je izgleda nemoguće odbraniti. Ova teorija zahteva da bi trebalo da bude materije koja ne podleže nikakvim silama, a to je osporeno zakonom gravitacije. Problem nije toliko u tome da tvrđenje o univerzalnoj gravitaciji mora da bude *istinito*, koliko u tome da ono mora da ima smisla – da li je ono istinito ili lažno irelevantno je pitanje. (2) Već smo videli da su apsolutna ubrzanja

[1] *Die physikalischen Grundlagen der Mechanik*, Leipzig, 1883; videti naročito str. 24 i 25.

neophodna čak i u vezi s translacijama, a neuspeh da se ovo uvidi posledica je previđanja činjenice da centar mase nije parče materije već prostorna tačka koja je određena samo pomoću ubrzanjâ.

467. Donekle slične primedbe odnose se i na članak gospodina Makolija (W. H. Macaulay) „Njutnova teorija kinetike“[1]. Gospodin Makoli tvrdi da je pravi način da se iskaže Njutnova teorija (izostavljajući mesta koja su ovde irelevantna) sledeći: „Referentne ose mogu tako da se izaberu, a pripisivanje masa tako uredi da je izvesna dekompozicija stepena promene impulsa u odnosu na ose svih čestica univerzuma moguća, naime, dekompozicija u kojoj se komponente javljaju u parovima, tako da članovi svakog para pripadaju dvema česticama i da su suprotni po smeru duž linije koja spaja čestice, a jednaki po veličini“ (str. 368). I ovde preostaje jedan čisto logički problem. Izgleda da navedenom stavu ne mogu da se upute primedbe, ali on ne pokazuje da je apsolutno kretanje nužno. Ose ne mogu da budu materijalne, jer sva materija jeste ili može da bude podložna silama, a stoga nepodobna za našu svrhu; ose čak ne mogu da se definišu ni bilo kojim fiksiranim geometrijskim odnosom prema materiji. Tako će naše ose stvarno biti prostorne, a ako ne bi bilo apsolutnog prostora, predložene ose ne bi mogle da postoje. Jer, nezavisno od apsolutnog prostora ma koje, ose bi morale da budu ili materijalne ili da ne budu ništa. Ose u jednom smislu mogu da se definišu na osnovu odnosa prema materiji, ali ne i na osnovu nekog konstantnog geometrijskog odnosa; a kada pitamo koje svojstvo je promenjeno kretanjem spram ovakvih osa, jedini mogući odgovor bio bi da je promenjen apsolutni položaj. Stoga apsolutni prostor i apsolutno kretanje nisu izbegnuti gospodin Mekolijevom formulacijom Njutnovih zakona.

[1] *Bulletin of the American Math. Soc.*, Vol. III. (1896–7). Za kasniju formulaciju Mekolijevog gledišta vidi odrednicu Art, *Motion*, *Laws of*, u novim tomovima *Encycl. Brit*. (Vol. XXXI).

468. Ako bi samo apsolutna rotacija ovde bila u pitanju, bilo bi moguće očuvati logičku suštinu relacione teorije netaknutu napuštanjem svega onoga što nju preporučuje kako filozofima tako i ljudima od nauke. Ono na šta se cilja – jeste iskazivanje principa dinamike pomoću čulima dostupnih entiteta. Među ovima tako nalazimo metrička svojstva prostora, ali ne i prave linije i ravni. Kolinearnost i koplanarnost mogu da se uključe, ali ako skup kolinearnih materijalnih tačaka menja njihovu pravu liniju, onda ne postoji čulima opaziva intrinsična promena. Otuda su svi zastupnici relacione teorije, onda kada su temeljni, kao i Lajbnic[1], nastojali da izvedu pravu liniju iz rastojanja. Za ovo takođe postoji razlog koji se sastoji u tome što je polje datog rastojanja celokupan prostor, pri čemu je polje generišuće relacije prave linije linija, koja sama, a ne polje, čini intrinsičnu razliku između tačaka prostora koju relaciona teorija nastoji da izbegne. Ipak, mogli bismo da smatramo pravu liniju relacijom između *materijalnih* tačaka, a apsolutna rotacija bi onda bila promena relacije između materijalnih tačaka, što je logički kompatibilno sa relacionom teorijom prostora. Međutim, morali bismo da priznamo da prava linija ne bi bila *čulno opazivo* svojstvo dve čestice koje bi ona povezivala; a u svakom slučaju, nužnost apsolutnih translacionih ubrzanja ostaje fatalna za svaku relacionu teoriju kretanja.

469. Mah[2] ima jedan neobičan argument na osnovu kojeg nastoji da pobije razloge u prilog apsolutne rotacije. On primećuje da u aktualnom svetu Zemlja rotira relativno spram stajaćih zvezda, i da univerzum nije dat dvaput u različitim oblicima, već samo jedanput, i to onako kako ga nalazimo. Otuda je svaki argument u prilog tome da bi rotacija Zemlje mogla da se izvede *kada* ne bi bilo nebeskih tela zaludan. Ovaj argument sadrži samu suštinu empirizma u smislu u kojem je empirizam radikalno suprotan filozofiji koja se zastupa u

---

[1] Vidi moj članak „Recent Work on Leibniz“, *Mind*, 1903.

[2] *Die Mechanik in ihrer Etwickelung*, prvo izdanje, str. 216.

ovoj knjizi[1]. Logička osnova ovog argumenta sastoji se u tome da se svi iskazi suštinski odnose na aktualno postojeće stvari, a ne na entitete koji mogu da postoje ili mogu da ne postoje. Jer ako, kao što sve vreme zastupano u prethodnim diskusijama, ceo dinamički svet sa njegovim zakonima može da se razmatra bez obzira na egzisteciju, onda ne može biti deo *značenja* ovih zakona tvrđenje da materija na koju se oni primenjuju postoji, i stoga oni mogu da se primene i na univerzum koji ne postoji. Nezavisno od opštih argumenata, očigledno je da se zakoni tako primenjuju u celoj racionalnoj dinamici, i da u svim egzaktnim izračunavanjima, pretpostavljeni raspored materije nije onaj aktualnog sveta. Deluje nemoguće osporavati značenje takvih izračunavanja, a ipak, ako ona imaju značenje, ako uopšte sadrže iskaze, bilo istinite ili lažne, onda nipošto ne može biti nužan deo njihovog *značenja* to da ona tvrde postojanje materije na koju se primenjuju. A ako je to tako, univerzum je onda dat kao entitet, ne samo dvaput, već onoliko puta koliko ima mogućih rasporeda materije i Mahov argument pada na toj osnovi. Ova poenta je važna zato što ilustruje način na koji filozofija koja se zatupa u ovoj knjizi može da se smatra idealističkom a ne empirističkom, uprkos tvrđenju da ono što postoji može biti saznato samo empirijski.

Tako, da zaključimo: apsolutno kretanje je nužno za dinamiku i podrazumeva apsolutni prostor. Ova činjenica, koja predstavlja teškoću u postojećim filozofskim sistemima, za nas predstavlja snažnu portvrdu logike na kojoj su naša razmatranja zasnovana.

---

[1] Cf. odrednicu „Nativism“ u *Dictionary of Philosophy and Psychology*, Boldvinovo izdanje, Vol. II, 1902.

Glava LIX

HERCOVA DINAMIKA

470. Videli smo da Njutnovim zakonima potpuno nedostaje samoočiglednost – u tolikoj meri, zapravo, da oni protivreče zakonu uzročnosti u obliku u kojem se on uobičajeno smatra nesumnjivim. Takođe smo videli da je zakon gravitacije ono na šta ovi zakoni specijalno ukazuju. Da bismo razdvojili ono što je u elementarnoj dinamici specifično njutnovsko od onoga što je zapravo suštinsko za ovaj predmet istraživanja, biće dobro da ispitamo neke pokušaje reformulisanja fundamentalnih principa u obliku u kojem su primenljiviji na takve nauke kao što je nauka o elektricitetu. Izgleda da je u tu svrhu najpodesniji Hercov (Hertz) rad[1].

Fundamentalni principi Hercove teorije su tako jednostavni i zadivljujući da je vredno truda ukratko ih izložiti. Hercov cilj jeste da slično većini skorašnjih autora konstruiše jedan sistem u kojem ima samo fundamentalnih pojmova: prostor, vreme i masa. Eliminacija četvrtog pojma poput sile ili energije, iako se očigledno zahteva u ovoj teoriji, teško je izvodiva matematički. Međutim, izgleda da je Herc savladao ovu teškoću na zadovoljavajući način. U njegovom sistemu postoje tri faze specifikacije kretanja. U prvoj fazi se samo relacije prostora i vremena uzimaju u obzir: ova faza je čisto

[1] *Principien der Mechanik*, Leipzig, 1894.

kinematička. Materija se ovde javlja samo kao sredstvo da bi se ustanovila, preko kretanja čestice, jedan-jedan korelacija između niza tačaka i niza trenutaka. U ovoj fazi kolekcija od *n* čestica ima 3*n* koordinata, koje su za sada sve nezavisne: kretanja koja se dobijaju kada se sve posmatraju kao nezavisne su sva *zamisliva* kretanja sistema. Ali, pre nego što dođe do kinetike, Herc uvodi jednu međufazu. Bez uvođenja vremena, u svakom slobodnom materijalnom sistemu postoje direktne relacije između prostora i mase koje formiraju geometrijske veze sistema. (Pomoću njih može da se uvede vreme u smislu koji uključuje brzine, ali one su nezavisne od vremena u smislu da su izražene u svim vremenima preko istih jednačina i da ne sadrže vreme eksplicitno). Ona od zamislivih kretanja, koja zadovoljavaju jednačine povezivanja, nazivaju se *moguća* kretanja. Za veze među delovima sistema se još pretpostavlja da su kontinuirane u izvesnom dobro definisanom smislu (str. 89). Onda sledi da one mogu da se izraze pomoću homogenih linearnih diferencijalnih jednačina prvog reda koje važe među koordinatama. Ali, sada je potreban još jedan princip koji pravi razliku između mogućih kretanja i tu Herc uvodi njegov jedini zakon kretanja koji glasi:

„Svaki slobodan sistem ostaje u stanju mirovanja ili ravnomernog kretanja duž najpravije putanje“.

Ovaj zakon zahteva izvesno objašnjenje. Prvo, kada u sistemu ima nejednakih čestica, svaka je podeljena na neki broj čestica proporcionalan njenoj masi. Na ovaj način sve čestice postaju jednake. Sada, ako postoji *n* čestica, njihove 3*n* koordinate smatraju se koordinatama neke tačke u prostoru od 3*n* dimenzija. Gorenavedeni zakon onda tvrdi da je u slobodnom sistemu brzina te reprezentativne tačke konstantna i da njena putanja od neke date tačke do neke druge susedne tačke u nekom datom smeru jeste ona od mogućih putanja koja ide kroz ove dve tačke i koja ima najmanju zakrivljenost. Takva putanja se naziva *prirodnom* putanjom, a kretanje po njoj naziva se *prirodnim* kretanjem.

471. Videćemo da se ovaj sistem, iako je daleko jednostavniji i više filozofski po formi od Njutnovog, ipak ne razlikuje mnogo od

Njutnovog, s obzirom na probleme o kojima je bilo reči u prethodnoj glavi. Oba sistema sadrže ono što smo otkrili kao suštinu zakona inercije, naime, potrebu za tri konfiguracije kako bi se odredila uzročna relacija. Ova opšta činjenica mora da se javlja u svakom sistemu koji uopšte liči na običnu dinamiku, a izražava je neophodnost upotrebe diferencijalnih jednačina drugog reda koje prožimaju celokupnu fiziku. Ali, postoji jedna prava materijalna razlika između Hercovog i Njutnovog sistema – razlika koja, kao što to ističe Herc, čini eksperimentalno presuđivanje između ove dve teorije barem teorijski mogućim. Posebni zakoni, drugačiji od zakona kretanja, koji regulišu bilo koji pojedinačni sistem, za Njutna su zakoni koji se tiču uzajamnih ubrzanja, kakvo je uostalom i sama gravitacija. Za Herca su ovi posebni zakoni svi skupa sadržani u geometrijskim vezama sistema i izraženi su pomoću jednačina koje uključuju samo brzine (videti str. 48). Ovo je jedno znatno uprošćenje, a Herc je pokazao da je ono više u skladu sa fenomenima u svim oblastima, izuzev kada je reč o gravitaciji. Veliko uprošćenje je takođe to što ovde imamo samo jedan zakon kretanja umesto Njutnova tri. Ali, sve dok ovaj zakon uključuje diferencijale drugog reda (koji su uvedeni preko zakrivljenja), za filozofa će biti manje važno to što bi posebni zakoni posebnih sistema trebalo da budu prvog reda.

Definicija mase kao broja čestica, trebalo bi primetiti, jeste čisto matematički trik, i mislim da ni Herc ne smatra da je išta više (videti str. 54). Ne samo što moramo da dopustimo mogućnost nesamerljivih masa, već i kad bi ova teškoća bila prevaziđena, i dalje bi bilo značajno tvrditi da su sve čestice kojima se na kraju bavimo jednake. Prema tome, masa bi i dalje bila vrsta veličine, samo što bi se ispostavilo da su sve čestice iste veličine s obzirom na njihovu masu. Ovo ne bi proizvelo bilo kakvo teorijsko uprošćenje, te bi stoga bilo bolje da zadržimo masu kao intenzivni kvantitet čija izvesna veličina pripada izvesnoj čestici, bez ikakvih implikacija po to da li je ta čestica deljiva. Naposletku, zapravo, nema valjanog razloga za osporavanje da različite čestice imaju različite mase. Čitavo ovo pitanje je u stvari čisto empirijsko, i filozof bi u ovoj stvari trebalo da pasivno prihvati ono što fizičar smatra potrebnim.

Izgleda da jedna slična primedba može da se primeni i na etar i njegove relacije prema materiji. Etar je, naravno, materija u filozofskom smislu; ali teško da će nam sadašnje stanje nauke dozvoliti da idemo dalje od toga. Međutim, trebalo bi primetiti da su u nauci o elektricitetu, kao i drugde, naše jednačine drugog reda, što upućuje na to da se zakon inercije, onako kako je interpretiran u prethodnoj glavi, i dalje dobro drži. Izgleda da je ova opšta činjenica za filozofiju, zaista, glavni rezultat našeg razmatranja dinamičkih principa.

472. Tako, da rezimiramo, imamo dva glavna rezultata:

(1) U bilo kom nezavisnom sistemu postoji relacija između konfiguracija u tri data vremena, koja je takva da je, ako su date konfiguracije u dva od ta tri vremena, i konfiguracija u trećem vremenu takođe određena.

(2) Ne postoji nezavisan sistem u akuelnom svetu izuzev celog materijalnog univerzuma; ali, ako se dva univerzuma koji imaju iste uzročne zakone kao i aktualni univerzum razlikuju samo u pogledu materije na velikom rastojanju od neke date oblasti, relativna kretanja unutar te oblasti biće približno ista u oba univerzuma – to će reći, može da se pronađe gornja granica za razliku između dva skupa kretanja.

Ova dva principa se podjednako primenjuju i na Njutnovu i na Hercovu dinamiku. Kada se ovi principi napuste, drugi principi će dati nauku koja ima vrlo malo sličnosti sa dinamikom kakvu znamo.

473. Jedan opšti princip koji se uobičajeno navodi kao vitalan za dinamiku, zaslužuje da se ovde makar usput pomene. To je princip kojim se tvrdi da su uzrok i učinak jednaki. Usled preokupiranosti kvantitetom i neznanja matematičke logike, izgleda da nije zapaženo da je ovo tvrđenje ekvivalentno tvrđenju da je implikacija između uzroka i učinka uzajamna. Sve jednačine su u suštini logičke jednačine, to jest, uzajamne implikacije: kvantitativna jednakost između promenljivih, kao što su uzrok i učinak, podrazumeva uzajamnu formalnu implikaciju. Tako princip o kome je reč može da se tvrdi samo ako su uzrok i učinak postavljeni na istu logičku ravan, a što s obzirom na interpretaciju uzročnosti koju smo bili navedeni da formulišemo, više nije moguće učiniti. Uprkos tome, kada je jedno stanje univerzuma dato, bilo koja druga dva se onda uzajamno impliciraju; a ovo je izvor različitih zakona održanja koji prožimaju dinamiku i koji pružaju istinu koja leži u osnovi pretpostavljene jednakosti uzroka i učinka.

474. Sada možemo da damo pregled celokupnog toka argumentacije koji je sadržan u ovoj knjizi. U Prvom delu pokušali smo da sprovedemo analizu prirode dedukcije i logičkih pojmova koji su u njoj sadržani. Od ovih, najzagonetniji je pojam *klase*, a s obzirom na protivrečnost koja je razmatrana u Glavi X (mada je ona možda rešiva teorijom tipova[1]), izgledalo je veoma teško dobiti jednu održivu teoriju o prirodi klasa. U narednim delovima je pokazano da postojeća čista matematika (uključujući tu geometriju i racionalnu dinamiku) može u potpunosti da se izvede iz nedefinljivih i nedokazivih koje se javljaju u Prvom delu. U ovom postupku su naročito značajne dve stvari: definicije i teoreme egzistencije. Definicija je uvek ili definicija neke klase ili definicija nekog jedinog člana jedinične klase: ovo nužno proizlazi iz toga što definicija očigledno može da se dobije samo pripisivanjem svojstva objektu ili objektima koje treba definisati, to jest, navođenjem iskazne funkcije koju ti objekti zadovoljavaju. Jedna vrsta gramatike kontroliše definicije čineći, na primer, nemogućom definiciju euklidskog *prostora*, ali mogućom definiciju klase euklidskih *prostora*. A gdegod se upotrebljava princip apstrakcije, to jest gdegod je objekat koji treba definisati dobijen iz tranzitivne simetrične relacije, neka klasa klasâ će uvek biti taj zahtevani objekt. Kada se upotrebljavaju simbolički izrazi, zahtevi onoga što se može nazvati gramatikom postaju očigledni, i jasno se vidi da logički tip definisanog entiteta nije ni na koji način proizvoljan.

Teoreme egzistencije u matematici – dokazi da različite definisane klase nisu nulte – gotovo su sve dobijene iz aritmetike. Bilo bi

---

[1] Vidi Apendiks B.

dobro da ovde skupimo one najznačajnije. Egzistencija nule izvedena je iz činjenice da je nulta klasa jedan njen član; egzistencija 1 iz činjenice da je nula jedinična klasa (jer je nulta klasa jedini član te klase). Stoga, iz činjenice da, ako je n konačan broj, a $n+1$ broj brojeva od 0 do n (uključujući i 0 i n), teorema egzistencije sledi za sve konačne brojeve. Stoga iz klase samih konačnih kardinalnih brojeva sledi egzistencija α_0, najmanjeg od beskonačnih kardinalnih brojeva; a iz niza konačnih kardinala uređenih po veličini sledi postojanje ω, najmanjeg od beskonačnih ordinala. Iz definicije racionalnih brojeva i njihovog poretka po veličini sledi egzistencija η, tipa beskrajnog kompaktnog prebrojivog niza; a odatle, iz segmenata niza racionalnih brojeva, sledi egzistencija realnih brojeva, kao i θ, tip kontinuiranog niza. Dokazano je da termini niza dobro uređenih tipova postoje na osnovu sledeće dve činjenice: (1) da je $\alpha + 1$ broj dobro uređenih tipova od 0 do α, (2) da, ako je u klasa dobro uređenih tipova koji nemaju maksimum, sam niz svih tipova ne većih od svakog u i sam jeste tip veći od svakog u. Iz egzistencije θ, pomoću definicije kompleksnih brojeva (Glava XLIV), dokazujemo postojanje klase euklidskih prostora bilo kog broja dimenzija; a odatle, postupkom iz Glave XLVI, dokazujemo postojanje klase projektivnih prostora, a odatle, premeštanjem tački izvan zatvorenog kvadrika, dokazujemo postojanje klase neeuklidskih deskriptivnih (hiperboličkih) prostora. Metodama iz Glave XLVIII dokazujemo postojanje prostorâ sa različitim metričkim svojstvima. Na kraju, koreliranjem nekih od tačaka prostora sa svim terminima kontinuiranog niza na način kako je to objašnjeno u Glavi LVI, dokazujemo postojanje klase dinamičkih svetova. U celom ovom postupku nisu upotrebljeni nikakvi drugi entiteti osim onih koji su definljivi pomoću fundamentalnih logičkih konstanti. Tako je lanac definicija i teorema egzistencije potpun, a čista logička pririda matematike je ustanovljena svuda.

APENDIKSI

Lista skraćenica

Bs. *Begriffsschrift*. Eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens. Halle, a/S, 1879.

Gl. *Grundlagen der Arithmetik*. Eine logisch-mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl. Breslau, 1884.

FT. *Ueber formale Theorien der Arithmetik*. Sitzungsberichte der Jenaischen Gesellschaft für Medicin und Naturwissenschaft, 1885.

FuB. *Function und Begriff.* Vortrag gehalten in der Sitzung vom 9. Januar, 1891, der Jenaischen Gesellschaft für Medicin und Naturwissenschaft, Jena, 1891.

BuG. *Ueber Begriff und Gegenstand*. Virteljahrschrift für wiss. Phil. XVI 2 (1892).

SuB. *Ueber Sinn und Bedeutung*. Zeitschrift für Phil. und phil. Kritik, vol. 100 (1892).

KB. *Kritische Beleuchtung einiger Punkte in E. Schröder's Vorlesungen über die Algebra der Logik*. Archiv für syst. Phil., Vol. I (1895).

BP. *Ueber die Begriffsschrift des Herrn Peano und meine eigene.* Berichte der math.-physischen Classe der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig (1896).

Gg. *Grundgesetze der Arithmetik.* Begriffsschriftlich abgeleitet. Vol. I, Jena, 1893, Vol. II 1903.

Apendiks A

FREGEOVO UČENJE O LOGICI I ARITMETICI

475. Fregeovo delo, koje je izgleda mnogo manje poznato nego što zaslužuje, sadrži mnoge od teorija koje sam izložio u delovima I i II ove knjige, a ona mesta u pogledu kojih se Fregeova gledišta razlikuju od onih koja ja zastupam zahtevaju dalje razmatranje. Fregeovo delo obiluje suptilnim distinkcijama i izbegava sve one uobičajene greške u koje zapadaju logičari. Njegov simbolizam, iako nažalost toliko nezgrapan da ga je vrlo teško upotrebiti u praksi, zasnovan je na analizi logičkih pojmova koja je mnogo dublja od Peanove, a i sa filozofske tačke gledišta se ispostavlja kao znatno superiorniji od ovog svog podesnijeg rivala. U nastavku ću nastojati da ukratko izložim najznačajnija mesta u Fregeovim teorijama, kao i moje razloge neslaganja sa njim tamo gde se razlikujemo. Ali, ova mesta neslaganja su malobrojna i neznatna u odnosu na ona u pogledu kojih se slažemo. Ona sva proizlaze iz razlike u pogledu tri stvari: (1) Frege ne smatra da ima ikakve protivrečnosti u koncepciji pojmova koji ne mogu da se učine logičkim subjektima (vidi §49 *supra*); (2) on smatra da, ako se termin *a* javlja u iskazu, taj iskaz uvek može da se izanalizira na *a* i na tvrđenje koje se odnosi na *a* (vidi Glavu VII); (3) Frege nije svestan protivrečnosti koju smo razmatrali u Glavi X. Ovo su krajnje fundamentalne stvari i biće poželjno da ih razmotrimo ponovo pošto je celo prethodno razmatranje sprovedeno uz skoro potpuno nepoznavanje Fregeovog dela.

Frege je primoran, kao što sam i ja bio primoran, da upotrebljava obične reči u tehničkom smislu koji manje ili više odstupa od uobičajene upotrebe. Pošto su njegova odstupanja često različita od mojih, teškoća nastaje u prevođenju Fregeovih termina. Da bi se izbegla zbrka, neke od njih ću ostaviti neprevedenim, pošto sam svaki ekvivalent u englekom jeziku koji mi pada na pamet već ja sam upotrebio u neznatno različitom smislu.

Glavne rubrike pod kojima Fregeova učenja mogu da se razmatraju su sledeće: (1) značenje i ukazivanje; (2) istinosne vrednosti i sud; (3) *Begriff* i *Gegenstand*; (4) klase; (5) implikacija i simbolička logika; (6) definicija celih brojeva i princip apstrakcije; (7) matematička indukcija i teorija progresija. Ove teme ću razmatri po redu kojim su navedene.

476. *Značenje i ukazivanje**. Razlika između značenja (*Sinn*) i ukazivanja (*Bedeutung*)[1] je grubo uzev, mada ne i tačno, ekvivalentna mojoj razlici između pojma kao takvog i onoga što taj pojam označava (§96). Frege ne pravi ovu razliku u prva dva od njegovih dela koja ovde razmatramo (*Begriffsschrift* i *Grundlagen der Arithmetik*); ona se po prvi put javlja u BuG (cf. str. 198), a posebno se njome bavi u SuB. Pre nego što je došao do ove razlike, Frege je smatrao da identitet mora da se tiče imena objekata (Bs. str. 13): „*A* je identično sa *B*“ znači, kaže on, da znak *A* i znak *B* znače istu stvar

* Fregeove tehničke termine *Sinn* i *Bedeutung* Rasel prevodi sa značenje (*meaning*) i ukazivanje (*indication*), dok je u srpskom jeziku uobičajeni prevod ovih termina smisao (za *Sinn*) i referencija ili značenje (za *Bedeutung*), što odgovara kasnijem prevođenju ovih termina na engleski jezik (*sense* i *reference*). Zbog Raselovog insistiranja na ovoj razlici, mi smo u redakciji prevoda postupali u skladu sa Raselovim insistiranjem (prim. stručnih redaktora prevoda).

[1] Ne prevodim *Bedeutung* sa *denotacija* zato što ova reč ima tehničko značenje koje se razlikuje od Fregeovog, a i zato što *bedeuten* za njega nije sasvim isto kao *denoting* za mene.

(Bs. str. 15) – što je definicija koja, barem verbalno, pati od cirkularnosti. Ali, on kasnije identitet objašnjava na skoro isti način na koji je objašnjen u §64. „Identitet“, kaže on, „zahteva razmišljanje o pitanjima koja su sa njim povezana i na koja nije sasvim lako odgovoriti. Da li je to relacija? Relacija između *Gegenstände* ili između imena ili znakova za *Gegenstände*?“ (SuB. str. 25). On kaže da moramo da razlikujemo značenje u kome je sadržan način na koji je nešto dato (*of being given*) od onoga na šta je ukazano (*Bedeutung*). Tako „zvezda večernjača“ i „zvezda zornjača“ ukazuju na isto, ali nemaju isto značenje. Reč uobičajeno izražava ono na šta ukazuje; ako želimo da govorimo o njenom značenju, moramo da upotrebimo navodnike ili neko drugo sredstvo (str. 27–8). Ukazivanje vlastitog imena jeste objekat na koji ono ukazuje; predstava koja prati to ime je sasvim subjektivna, a između toga nalazi se značenje koje nije subjektivno, ali ipak nije objekat (str. 30). Vlastito ime *izražava* svoje značenje, a *ukazuje* na ono na šta ukazuje.

Ova teorija ukazivanja je radikalnija i opštija od moje, što proizlazi iz činjenice da se za *svako* vlastito ime pretpostavlja da ima dve strane. Izgleda mi da se samo za takva vlastita imena koja su izvedena iz pojmova pomoću određenog člana (*the*) može reći da imaju značenje, a da takve reči kao što je *Džon* samo ukazuju a nemaju značenje. Ako se dopusti, kao što ja to činim, da pojmovi mogu da budu objekti i da mogu da imaju vlastita imena, izgleda sasvim očigledno da će, po pravilu, njihova vlastita imena na njih da ukazuju a da nemaju bilo kakvo značenje; ali suprotno gledište, iako vodi beskonačnom regresu, izgleda da nije logički nemoguće. Dalje razmatranje ove teme moramo da odložimo sve dok ne pređemo na Fregeovu teoriju o *Begriffe*.

477. *Istinosne vrednosti i sud*. – Problem koji ćemo razmatrati u ovom paragrafu isti je kao i onaj kojim smo se bavili u §52[1], a koji se

[1] Ovo je logička strana problema *Annahmen* (nem. pretpostavki – prim. stručnih redaktora prevoda) koju je istakao Majnong u svom vrednom radu o

ticao razlike između tvrđenih i netvrđenih iskaza. Ali, Fregeova pozicija po ovom pitanju je suptilnija od moje i podrazumeva radikalniju analizu suda. Njegov *Begriffsschrift* usled odsustva razlikovanja između značenja i ukazivanja sadrži jednostavniju teoriju od njegovih kasnijih radova. Stoga ću da je izostavim iz ovih razmatranja.

Frege nam kaže (Gg. str. x) da postoje tri elementa suda: (1) uviđanje istine, (2) *Gedanke**, (3) istinosna vrednost (*Wahrheitswerth*). Ovde *Gedanke* označava ono što sam ja nazvao netvrđenim iskazom – ili bolje, ono što sam nazvao ovim imenom pokriva i *Gedanke* sâmo i *Gedanke* uzeto zajedno sa njenom istinosnom vrednošću. Korisno je imati posebno ime za svaki od ova dva različuta pojma; sâmo *Gedanke* nazvaću *iskaznim pojmom*, a istinosnu vrednost *Gedanke* nazvaću asumpcijom[1]. Barem formalno, asumpcija ne zahteva da njen sadržaj bude iskazni pojam: šta god da je *x*, „istinitost od *x*“ je jedan određen pojam. Ovo označava istinito ako je *x* istinito, a ako je *x* lažno ili ako uopšte nije iskaz, onda označava lažno (FuB. str. 51). Na sličan način, prema Fregeu, postoji „lažnost od *x*“; ovo nisu tvrđenja i negacije iskaza već samo tvrđenja istinitosti ili lažnosti, to jest, negacija pripada onome što je tvrđeno i ne predstavlja suprotnost tvrđenju[2]. Tako najpre imamo iskazni pojam, zatim njegovu istinitost ili lažnost u zavisnosti od slučaja, a na kraju

---

ovom predmetu, Leipzig, 1902. Izgleda da je logički mada ne i psihološki deo Majnongovog rada već u potpunosti anticipirao Frege.

* Reč *Gedanke* se na srpski jezik standardno prevodi sa *misao* (prim. stručnih redaktora prevoda).

[1] Frege kao i Majnong ovo naziva *Annahme*; FuB. str. 21.
Ovu reč (koja inače znači pretpostavka) ovde ostavljamo neprevedenom budući da je sâm Rasel koristi u jednom krajnje specifičnom tehničkom smislu, a ponekad čak koristi i nemački termin *Annahme* ne prevodeći ga (prim. stručnih redaktora prevoda).

[2] Gg, str. 10. Cf. takođe Bs. str. 4.

tvrđenje istinitosti ili lažnosti. Tako u hipotetičkom sudu nije reč o relaciji između dva suda već o relaciji između dva iskazna pojma (SuB. str. 43).

Ova teorija je na vrlo neobičan način povezana sa teorijom značenja i ukazivanja. Uzima se da svaka asumpcija ukazuje na istinito ili lažno (koje nazivamo istinosnim vrednostima), dok je njeno značenje odgovarajući iskazni pojam. Kaže nam se da asumpcija „$2^2 = 4$“ ukazuje na istinito baš kao što „2^2“ ukazuje na 4[1]. (FuB. str. 13; SuB. str. 32). U zavisnoj rečenici, ili kada se javlja ime (kao što je Odisej) koje ne ukazuje ni na šta, rečenica može da ne ukazuje. Ali, kada rečenica ima istinosnu vrednost, to je onda ono na šta ona ukazuje. Tako svaka rečenica koja može da se tvrdi (*Behauptungssatz*) jeste vlastito ime koje ukazuje na istinito ili lažno (SuB. str. 32–4; Gg. str. 7). Znak suda (*Urtheilstrich*) ne kombinuje se sa drugim znacima kako bi označio objekat, a sud ne ukazuje ni na šta, već naprosto nešto tvrdi. Frege ima poseban simbol za sud koji je nešto različito od, a ujedno i nešto povrh istinosne vrednosti iskaznog pojma (Gg. str. 7).

478. Postoje izvesne teškoće u ovoj teoriji i bilo bi dobro da ih razmotrimo. Pre svega izgleda sumnjivo da li uvođenje istinosne vrednosti karakteriše bilo koju stvarnu analizu. Ako, recimo, razmotrimo „Cezar je umro“, izgleda da je ono što je tvrđeno iskazni pojam „Cezarova smrt“ a ne „istina o smrti Cezara“. Izgleda da je ovo drugo samo još jedan iskazni pojam koji je tvrđen u iskazu „Cezarova smrt je istinita“ što nije, barem ja tako mislim, isti iskaz kao „Cezar je umro“. Ovde je veoma teško izbeći psihološke elemente, a moglo bi da izgleda da im je Frege dozvolio da naruše opis suda kao uviđanja istine (Gg. str. x). Ova teškoća počiva na činjenici da postoji psihološki smisao tvrđenja, što je ono što nedostaje Majnongovim *Annahmen*, a što je smisao koji ne ide uporedo sa logičkim smislom.

---

[1] Kada govori o samom terminu koji ukazuje nasuprot onome na šta on ukazuje, Frege upotrebljava navodnike. Cf. §56.

Psihološki posmatrano, bilo koji iskaz, istinit ili lažan, može biti ili puko mišljen ili može biti aktualno tvrđen: ali, što se ove mogućnosti tiče, greška bi bila nemoguća. Ali, logički posmatrano, jedino su istiniti iskazi tvrđeni, iako mogu da se javljaju u netvrđenoj formi kao delovi drugih iskaza. U „*p* implicira *q*" ili jedan ili oba od iskaza *p* i *q* mogu da budu istiniti, a ipak je u ovom iskazu svaki od njih netvrđen u logičkom, a ne samo u čisto psihološkom smislu. Tako tvrđenje ima sasvim određeno mesto među logičkim pojmovima, mada postoji psihološki pojam tvrđenja kojem ne odgovara ništa logičko. Ali, izgleda da tvrđenje nije konstituent tvrđenog iskaza, mada je ono u izvesnom smislu sadržano u tvrđenom iskazu. Ako je *p* iskaz, „*p*-ova istina" je pojam koji ima biće čak i ako je *p* lažno, te tako „*p*-ova istina" nije isto što i tvrđeno *p*. Iz tog razloga ne može da se nađe nijedan pojam koji je ekvivalentan tvrđenom *p,* te stoga tvrđenje nije konstituent u tvrđenom *p*. Ipak, tvrđenje nije termin prema kojem *p*, onda kada je tvrđeno, stoji u spoljašnjoj relaciji, jer bi bilo koja relacija te vrste i sama morala da bude tvrđena da bismo dobili ono što želimo. Teškoća takođe nastaje i usled navodne činjenice u koju, međutim, može da se sumnja, da tvrđeni iskaz nikada ne može da bude deo nekog drugog iskaza: tako, ako je to stvarno činjenica, u slučaju u kojem je formulisana bilo koja rečenica o tvrđenom *p*, ona nije zapravo o tom tvrđenom *p* već samo o tvrđenju *p*-a. Ova teškoća postaje ozbiljna u slučaju Fregeovog jednog jedinog principa zaključivanja (Bs. str. 9): „*p* je istinito i *p* implicira *q*; dakle *q* je istinito[1]". Ovde je od suštinske važnosti da bi trebalo da postoje tri stvarna tvrđenja, jer bi inače tvrđenje iskazâ dedukovanih iz tvrđenih premisa bilo nemoguće; ipak, ta tri tvrđenja zajedno formiraju jedan iskaz čije se jedinstvo iskazuje rečju *dakle*, bez čega *q* ne bi moglo da se izvede nego bi samo bilo tvrđeno kao nova premisa.

Skoro je nemoguće, barem po mom mišljenju, razdvojiti tvrđenje od istine onako kako Frege to čini. Moglo bi da izgleda da tvrđeni

---

[1] Cf. *supra*, §18 (4) i §38.

iskaz mora da bude isti kao istinit iskaz. Možemo da dopustimo da negacija pripada sadržaju iskaza (Bs. str. 4) i smatramo svako tvrđenje kao tvrđenje da je nešto istinito. Onda ćemo korelirati *p* i ne-*p* kao netvrđene iskaze i smatraćamo da „*p* je lažno" znači „ne-*p* je istinito". Ali, razdvajanje tvrđenja od istine izgleda moguće samo ukoliko uzmemo tvrđenje u psihološkom smislu.

479. Fregeova teorija prema kojoj su asumpcije vlastita imena za istinito ili lažno, u zavisnosti od slučaja, takođe mi deluje neodrživa. Izgleda da direktno ispitivanje pokazuje da je relacija iskaza prema istinitom ili lažnom sasvim različita od relacije (recimo) „sadašnji kralj Engleske" prema Edvardu VII. Pored toga, ako bi Fregeovo gledište bilo tačno u ovom pogledu, trebalo bi da smatramo da je u tvrđenom iskazu značenje a ne ukazivanje ono što je tvrđeno, jer bi inače svi tvrđeni iskazi tvrdili sasvim istu stvar, naime, istinito (jer lažni iskazi nisu tvrđeni). Tako se tvrđeni iskazi ni na koji način ne bi razlikovali jedan od drugog nego bi svi bili strogo i naprosto identični. Tvrđeni iskazi ne ukazuju (FuB. str. 21) i mogu da se razlikuju, ako uopšte mogu, na neki način koji je analogan značenju. Tako značenje netvrđenog iskaza zajedno sa istinosnom vrednošću mora da bude ono što je tvrđeno, ako je značenje naprosto odbačeno. Ali izgleda nema nikakve svrhe da ovde uvodimo istinosne vrednosti: sasvim je dovoljno reći da je tvrđeni iskaz onaj čije je značenje istinito, a da je reći da je značenje istinito isto što i reći da je značenje tvrđeno. Onda bismo mogli da zaključimo da su istiniti iskazi, čak i onda kada se javljaju kao delovi drugih iskaza, uvek i suštinski tvrđeni dok su lažni iskazi uvek netvrđeni, čime se izbegava teškoća u vezi sa *dakle*, o kojoj je prethodno bilo reči. Fregeu takođe može da se uputi primedba da „istinito" i „lažno", za razliku od istine i lažnosti, ne označavaju pojedinačne određene stvari već pre klase istinitih i lažnih iskaza. Međutim, na ovu primedbu bi moglo da se odgovori Fregeovom teorijom domena, što približno odgovara mojim klasama; klase su, kaže on, stvari, a istinito i lažno su domeni (*vidi infra*).

480. *Begriff i Gegenstand*[*]. *Funkcije*. – Sada prelazim na nešto zbog čega je Fregeovo delo vrlo značajno i što zahteva pažljivo ispitivanje. Njegova upotreba reči *Begriff* ne odgovara precizno bilo kojem pojmu mog vokabulara, mada je veoma bliska pojmu tvrđenja, onako kako sam ga definisao u §43 i razmatrao u Glavi VII. Sa druge strane, izgleda da *Gegenstand* odgovara tačno onome što sam ja nazvao *stvar* (§48). *Gegenstand* ću stoga prevesti sa *stvar*. Izgleda da je značenje *vlastitog imena* isto za Fregea što i za mene, ali on smatra da je domen vlastitih imena ograničen na stvari, zbog čega jedino one prema njegovom mišljenju mogu da budu logički subjekti.

Fregeova teorija funkcija i *Begriff* je na pristupačan način izložena u FuB. i branjena je od Kerijeve (Kerry)[1] kritike u BuG. On smatra da su funkcije – i u tome se ja s njim slažem– fundamentalnije od predikata i relacija; ali u pogledu funkcija on prihvata teoriju subjekta i tvrđenja koju smo razmatrali i odbacili u Glavi VII. Prihvatanje tog gledišta čini njegovo izlaganje jednostavnijim, što ja nisam uspeo da ostvarim; ali u njegovom delu ne nalazim ništa što bi me ubedilo u legitimnost njegove analize.

Aritmetička funkcija, na primer, $2x^3 + x$ ne denotira rezultat jedne aritmetičke operacije, kaže Frege, jer to je samo broj, što ne bi bilo ništa novo (FuB. str. 5). Suština funkcije je ono što preostaje kada se x otkloni, to jest u ovom primeru to je $2(\ )^3 + (\ )$. Argument x ne pripada funkciji već ovo dvoje zajedno čine celinu (*ib*., str. 6). Funkcija može da bude iskaz za svaku vrednost promenljive; njena vrednost

---

[*] Fregeovi tehnički termini *Begriff* i *Gegenstand* se na srpski jezik standardno prevode kao *pojam* odnosno *predmet* ali, kao što ćemo videti u nastavku (§481), kod Fregea je *Begriff* mnogo bliže onome što Rasel naziva *iskaznom funkcijom* (prim. stručnih redaktora prevoda).

[1] Vierteljahrschrift für wiss. Phil., Vol. XI, str. 249–307.

je onda uvek istinosna vrednost (str. 13). Iskaz može da se podeli na dva dela, kao „Cezar“ i „je osvojio Galiju“. Prvi deo Frege naziva *argumentom*, a drugi *funkcijom*. Bilo koja stvar može da bude argument funkcije (str. 17). (Ova podela iskaza tačno odgovara mom *subjektu* i *tvrđenju*, onako kako je objašnjeno u §43, ali Frege ne ograničava ovaj metod analize onako kako sam ja to učinio u Glavi VII). Stvar je bilo šta što nije funkcija, to jest ono čiji izraz za stvar ne ostavlja nikakvo prazno mesto. Sledeća dva objašnjenja prirode funkcije navedena su iz najranijeg i jednog od poslednjih Fregeovih dela.

(1) „Ako se u nekom izrazu čiji sadržaj ne mora biti iskazni (*beurtheilbar*) javlja jednostavni ili složen znak na jednom ili na više mesta i ako ga mi smatramo zamenljivim na jednom ili na više od tih mesta nečim ali svuda istim, onda deo izraza koji je nepromenljiv u ovom procesu nazivamo *funkcijom*, a zamenljivi deo nazivamo njenim *argumentom*“ (Bs., str. 16).

(2) „Ako iz vlastitog imena isključimo vlastito ime koje je deo ili celina prvog na nekom ili na svim mestima gde se ono javlja, ali tako da ta mesta ostanu prepoznatljiva kao ona koja treba da budu popunjena jednim istim proizvoljnim vlastitim imenom (kao mesta argumenta prve vrste), onda ono što se na taj način dobija nazivam imenom funkcije prvog reda sa jednim argumentom. Takvo ime zajedno sa vlastitim imenom koje popunjava mesta argumenta formira vlastito ime“ (Gg., str. 44).

Druga definicija može da se učini jasnijom pomoću nekih primera. „Sadašnji kralj Engleske“ je prema Fregeu vlastito ime, a „Engleska“ predstavlja vlastito ime koje je njegov deo. Tako ovde možemo da smatramo Englesku argumentom, a „sadašnji kralj“ funkcijom. Tako dobijamo „sadašnji kralj *x*“. Ovaj izraz će uvek imati značenje ali neće uvek i ukazivati, izuzev za one vrednosti *x* koje su sada monarhije. Prethodna funkcija nije iskazna. Ali, „Cezar je osvojio Galiju“ daje „*x* je osvojio Galiju“; u ovom slučaju imamo iskaznu funkciju. Ovde ima jedna manje značajna stvar na koju bi ipak trebalo da obratimo pažnju: tvrđeni iskaz nije vlastito ime, već je samo asumpcija vlastito ime za istinito ili lažno (*vidi supra*); tako je ne „Cezar je osvojio Galiju" kao tvrđen, već samo odgovarajuća asumpcija ono što je uključeno u nastanak iskazne funkcije. Ovo je zaista dovoljno očigledno pošto želimo da x može da bude bilo koja stvar u „x je osvojio Galiju", dok nema nikakvog takvog tvrđenog iskaza osim kada je x zaista osvojio Galiju. Uzmimo još i iskaz „Sokrat je čovek implicira Sokrat je smrtan". Ovaj iskaz (netvrđen) prema Fregeu je vlastito ime za istinito. Variranjem vlastitog imena „Sokrat" možemo da dobijemo tri iskazne funkcije, naime, „x je čovek implicira Sokrat je smrtan", „Sokrat je čovek implicira x je smrtan" i „x je čovek implicira x je smrtan". Od ovih, prvi i treći su istiniti za sve vrednosti x, a drugi je istinit onda i samo onda kada je x smrtnik.

Ako na isti način otklonimo vlastito ime iz imena funkcije prvog reda sa jednim argumentom, onda dobijamo ime funkcije prvog reda sa dva argumenta (Gg., str. 44). Tako, na primer, polazeći od „$1 < 2$" dobijamo najpre „$x < 2$" što je ime funkcije prvog reda sa jednim argumentom, a zatim „$x < y$" što je ime funkcije prvog reda sa dva argumenta. Ako na isti način otklonimo i funkciju, kaže Frege, onda dobijamo ime funkcije drugog reda (Gg., str. 44). Tako, na primer, tvrđenje o egzistenciji u matematičkom smislu predstavlja funkciju drugog reda: „postoji barem jedna vrednost x koja zadovoljava ϕx" nije funkcija od x već može da se posmatra kao funkcija od ϕ. Ovde ϕ nipošto ne sme da bude stvar već može da bude bilo koja funkcija. Ovaj iskaz, uzet kao funkcija od ϕ, sasvim se razlikuje od funkcija prvog reda na osnovu toga što su njegovi mogući argumenti različiti. Tako, ako je dat bilo koji iskaz, recimo $f(a)$, možemo da razmatramo ili funkciju prvog reda $f(x)$ koja se dobija variranjem a i držanjem f konstantnim, ili funkciju drugog reda $\phi(a)$ koja se dobija variranjem f i držanjem a fiksiranim; ili, konačno, možemo da razmatramo $\phi(x)$

gde su i f i a zasebno varirani. [Primetimo da su izrazi poput $\phi(a)$ u kojima razmatramo bilo koji iskaz koji se odnosi na a uključeni u identitet nerazlučivih onako kako je formulisano u §43]. Funkcija prvog reda sa dve promenljive, ističe Frege, izražava relacije (Bs., str. 17); i referencija i relat su subjekti u relacionom iskazu (Gl., str. 82). Relacije, potpuno isto kao i predikati, pripadaju, s pravom kaže Frege, čistoj logici (*ib*., str. 83).

481. Frege koristi reč *Begriff* kako bi označio skoro istu stvar koju označava *iskazna funkcija* (na primer, FuB., str. 28)[1]; kada imamo dve promenljive, *Begriff* je relacija. Stvar je bilo šta što nije funkcija, to jest sve ono, čega izraz ne ostavlja nikakvo prazno mesto (*ib*., str. 18). Fregeovoj teoriji o postojanju suštinskog jaza između stvari i *Begriffe* Keri prigovara (*loc. cit.,* str. 272ff) da *Begriff*e takođe mogu da se javljaju kao subjekti. Na ovaj prigovor Frege daje dva odgovora. On kaže da je, pre svega, značajno uvideti razliku da između toga što neki termini mogu da se jave samo kao subjekti, dok drugi mogu da se jave i kao pojmovi, čak i ako *Begriffe* takođe mogu da se jave kao subjekti (BuG., str. 195). U ovome se potpuno slažem sa Fregeom; ovu razliku smo koristili u §§48 i 49. Ali, on ovome dodaje i drugu stvar koja mi izgleda pogrešno. Mi možemo, kaže on, da imamo pojam koji potpada pod neki viši pojam (kao što Sokrat potpada pod pojam čovek, ali ne onako kao što Grk potpada pod pojam čovek); ali u takvim slučajevima, nije reč o samom pojmu već o njegovom imenu (BuG., str. 195). „Pojam konja“, kaže on, nije pojam nego stvar; specifičnost ove upotrebe indicirana je znacima navoda (*ib*., str. 196). Ali nekoliko stranica dalje, Frege kaže nešto što izgleda kao da ukazuje na drugačije stanovište. Pojam je, kaže on, suštinski predikativan, čak i onda kada se o njemu nešto tvrdi: tvrđenje koje može da se formuliše o pojmu ne može da odgovara

---

[1] „Ovde imamo funkciju čija je vrednost uvek istinosna vrednost. Takve funkcije sa jednim argumentom nazvali smo *Begriffe*, a one koje imaju dva argumenta nazivamo relacijama“. Cf. Gl., str. 82–3.

objektu. Kada se za neku stvar kaže da potpada pod neki pojam i kada se za neki pojam kaže da potpada pod neki viši pojam, dve relacije o kojima je ovde reč, mada slične, nisu iste (*ib*., str. 201). Meni je teško da ovo usaglasim sa onim što je Frege rekao na str. 195, ali ću se uskoro vratiti na ovaj problem.

Frege prepoznaje jedinstvo iskaza: on kaže da ne mogu svi delovi iskaznog pojma da budu potpuni, već barem jedan mora da bude nepotpun (*ungäsattigt*) ili predikativan, inače, delovi ne bi mogli da prianjaju jedni uz druge (*ib*., str. 205). On takođe uviđa, iako ih ne razmatra, neobičnosti koje proizlaze iz izraza *bilo koji* i *svaki* i sličnih reči: tako on primećuje da je svaki pozitivan ceo broj zbir četiri kvadrata, ali „svaki pozitivan ceo broj“ nije moguća vrednost *x* u „*x* je zbir četiri kvadrata“. On kaže da značenje izraza „svaki pozitivan ceo broj“ zavisi od konteksta (Bs., str. 17) – ova primedba je nesumnjivo ispravna, ali ona ne iscrpljuje predmet razmatranja. Samoprotivrečni pojmovi su priznati kao pojmovi: *F* je pojam ako je „*a* potpada pod pojam *F*“ iskaz, ma koja stvar da je *a* (Gl., str. 87). Pojam jeste ono na šta ukazuje predikat, a stvar je ono što nikada ne može biti ono na šta predikat u celosti ukazuje, iako može biti ono na šta u celosti ukazuje subjekat (BuG. str. 198).

482. Prethodno izložena teorija se uprkos velikoj sličnosti ipak razlikuje u nekim značajnim aspektima od teorije koju smo izložili u Prvom delu. Pre ispitivanja ovih razlika, ukratko ću da rekapituliram moju sopstvenu teoriju.

Ako je dat bilo koji iskazni pojam ili bilo koje jedinstvo (vidi §136), koje u određenoj granici može da bude jednostavno, njegovi konstituenti su uopšte uzev dvojake vrste: (1) oni koji mogu da se zamene bilo čime drugim, a da se ne razori jedinstvo celine; (2) oni koji nemaju ovo svojstvo. Tako u „smrt (od) Cezara“ („*the death of Caesar*“), Cezar može da se zameni bilo kojim imenom, ali se *smrt* ne sme zameniti vlastitim imenom, a teško da bilo šta može da zameni ono *od* (*of*). Prva klasa konstituenata ovog jedinstva biće nazvana *termini*, a druga *pojmovi*. Onda u vezi sa bilo kojim jedinstvom treba razmotriti sledeće objekte:

(1) Ono što ostaje od jedinstva o kojem je reč kada se jedan od njegovih termina jednostavno ukloni ili, ako se taj termin javlja nekoliko puta, kada se ukloni sa jednog ili sa više mesta na kojima se javlja, ili, ako jedinstvo ima više od jednog termina, kada se dva ili više termina uklone sa nekih ili sa svih mesta na kojima se javljaju. Ovo je ono što Frege naziva funkcijom.

(2) Klasa jedinica koje se razlikuju od jedinstva o kome je reč, ako se uopšte razlikuju, samo na osnovu toga što je jedan od termina zamenjen na jednom ili na više mesta na kojima se javlja nekim drugim terminima ili na osnovu toga što su dva ili više termina na taj način zamenjeni drugim terminima.

(3) Bilo koji član klase (2).

(4) Tvrđenje da je svaki član klase (2) istinit.

(5) Tvrđenje da je neki član klase (2) istinit.

(6) Relacija nekog člana klase (2) prema vrednosti koju promenljiva ima u tom članu.

Fundamentalan slučaj jeste onaj u kojem je jedinstvo iskazni pojam. Odatle je izveden uobičajeni matematički pojam funkcije koji na prvi pogled može da deluje jednostavnije. Ako $f(x)$ nije iskazna funkcija, njena vrednost za neku datu vrednost x [pri čemu se pretpostavlja da je $f(x)$ jednovrednosno] jeste termin y koji zadovoljava iskaznu funkciju $y = f(x)$, to jest termin koji za datu vrednost x zadovoljava neki relacioni iskaz; ovaj relacioni iskaz je uključen u defniciju $f(x)$, a neka takva iskazna funkcija se zahteva za definiciju bilo koje funkcije koja nije iskazna.

Što se tiče (1), ako se ograničimo na jednu promenljivu, u Glavi VII je tvrđeno da izuzev tamo gde je iskaz od kojeg polazimo predikativan ili tvrdi fiksiranu relaciju prema fiksiranom terminu, takav entitet ne postoji: analiza na argument i tvrđenje ne može da se izvrši na zahtevani način. Tako je ono što Frege naziva funkcijom, ako je naš zaključak ispravan, uopšte uzev neentitet. Drugi aspekt u pogledu kojeg se razlikujem od Fregea jeste onaj u kojem izgleda da je Frege u pravu, tiče se činjenice da ja ne ograničavam variranje promenljive, dok Frege, u skladu sa prirodom funkcije, ograničava promenljivu na stvari, funkcije prvog reda sa jednom promenljivom, funkcije prvog reda sa dve promenljive, funkcije drugog reda sa jednom promenljivom itd. Tako za njega postoji beskonačan broj različitih vrsta promenljivosti. To proizlazi iz činjenice da on razlikuje pojam koji se javlja kao takav od pojma koji se javlja kao termin, a što sam ja (u §49) poistovetio. Sa moje tačke gledišta, funkcije koje ne mogu da budu vrednosti promenljivih u funkcijama prvog reda jesu neentiteti i lažne apstrakcije. Umesto ostatka iskaza koji se razmatra u (1), ja stavljam (2) ili (3) ili (4) u zavisnosti od okolnosti. Razlog za to da se analiza na argument i funkciju smatra ne uvek mogućom jeste to što kada se neki termin ukloni iz iskaznog pojma, ostatak tada ne može da bude bilo koja vrsta jedinstva, već se raspada na skup nepovezanih termina. Tako ono što je fundamentalno u ovakvim slučajevima jeste (2). Za Fregeov opšti pojam funkcije koji bi trebalo da pokrije i funkcije koje nisu iskazne može se pokazati da je neadekvatan na osnovu razmatranja onoga što možemo nazvati identičnom funkcijom, to jest funkcijom x od x. Ako sledimo Fregeov savet i uklonimo x u nadi da će preostati funkcija, uvidećemo da uopšte ništa nije preostalo; međutim, ništa nije značenje identične funkcije. Frege želi da na neki način bude ukazano na prazna mesta gde treba da se ubaci argument; tako on kaže da je u $2x^3 + x$ funkcija $2(\ )^3 + (\ )$. Ali ovde ne može da se ukaže na njegov zahtev da dva prazna mesta moraju da se popune istim slovom: nema nikakvog načina da se razlikuje ono na šta ovde mislimo od funkcije koja se podrazumeva u slučaju $2x^3 + y$. Izgleda da se ovde zapravo traži pojam bilo kojeg termina neke klase, kao i da je upravo to ono na šta se odnose prazna mesta. Funkcija kao pojedinačni entitet je relacija tipa (6); onda možemo da razmatramo bilo koji relat ove relacije, ili tvrđenje svih ili samo nekih relata, a bilo koja relacija može da se izrazi pomoću odgovarajuće referencije, kao što je „Sokrat je čovek" izraženo pomoću Sokrata. Ali uobičajeni formalni aparat računa relacija ne može da se primeni zato što pretpostavlja iskazne funkcije. Možemo reći da je iskazna funkcija mnogo-jedan relacija koja ima sve termine za klasu svojih referencija, a svi njeni relati sadržani su među iskazima[1]: ili, ako tako više volimo, možemo da nazovemo klasu relata takvih relacija iskaznom funkcijom. Ali utisak da su ova tvrđenja formalne definicije je pogrešan, zato što su iskazne funkcije koje su pretpostavljene u definisanju klase referencija i relata relacije.

Tako se iskazi pomoću iskaznih funkcija grupišu u klase. (Ove klase nisu uzajamno isključujuće). Ali, takođe možemo da ih grupišemo u klase po terminima koji se u njima javljaju: svi iskazi koji sadrže neki dati termin *a* formiraće klasu. Na ovaj način dobijamo iskaze koji se tiču promenljivih iskaznih funkcija. U notaciji $\phi(x)$, ϕ je suštinski promenljivo; ako želimo da ne bude tako, moramo da uzmemo neki poseban iskaz koji se odnosi na x poput „x je klasa" ili „x implicira x". Tako $\phi(x)$ suštinski sadrži dve promenljive. Ali, ako smo odlučili da ϕ nije odvojiv entitet, ne možemo da smatramo sâmo ϕ drugom promenljivom. Biće neophodno da kao našu promenljivu uzmemo ili relaciju x prema $\phi(x)$ ili klasu iskaza $\phi(y)$ za različite vrednosti y ali za konstantno ϕ. Ovo formalno gledano ne smeta, ali je za logiku značajno da budemo načisto u pogledu značenja onoga što se javlja kao varijacija ϕ. Na ovaj način dobijamo drugačiju podelu iskaza na klase, ali ove klase i dalje nisu uzajamno isključujuće.

Moglo bi da izgleda da bismo na gorenavedeni način mogli da koristimo iskazne funkcije bez uvođenja objekata koje Frege naziva funkcijama. Međutim, treba primetiti da je vrsta relacije na osnovu koje su iskazne funkcije definisane manje opšta od klase

[1] Nisu sve relacije koje imaju ovo svojstvo iskazne funkcije; *vidi infra.*

mnogo-jedan relacija čiji je domen koekstenzivan sa terminima i njihovim konverznim domenima koji su sadržani u iskazima. Jer, na ovaj način bi bilo koji iskaz, za podesnu relaciju, bio relat bilo kog termina, dok termin koji je referencija mora, za neku iskaznu funkciju, da bude konstituent iskaza koji je njegov relat[1]. Ova poenta ponovo ilustruje da je klasa relacija o kojima je reč fundamentalna i da nije podložna definisanju. Ali, izgleda da ovo takođe pokazuje da su Fregeove različite vrste promenljivosti neizbežne jer, ako razmatramo (recimo) $\phi(2)$ gde je ϕ promenljiva, promenljiva bi morala da ima kao svoj domen navedenu klasu relacija koje možemo da nazovemo *iskaznim relacijama*. Inače, $\phi(2)$ nije iskaz, i zapravo je besmisleno zato što se bavimo nedefinljivom koja zahteva da $\phi(2)$ bude relat od 2 s obzirom na neku iskaznu relaciju. Protivrečnost koju smo razmatrali u Glavi X izgleda da pokazuje da se neka misterija skriva u variranju iskaznih funkcija; ali za sada, mislim da moramo da prihvatimo Fregeovu teoriju različitih vrsta promenljivih.

483. Ostaje da iznova razmotrimo pitanje da li pojmovi mogu da postanu logički subjekti, a da ne promene značenje. Mislim da Fregeova teorija prema kojoj se onda kada je ovo postignuto zapravo radi o imenu pojma neće izdržati ispitivanje. Pre svega, puko tvrđenje „nije reč o pojmu već o njegovom imenu“ već je učinilo taj pojam subjektom. Drugo, izgleda da je uvek legitimno pitati „Šta je imenovano ovim imenom“? Ako nijedan odgovor ne može da se da na ovo pitanje, ime ne bi moglo da bude ime; ali, ako može da se da neki odgovor, pojam za razliku od imena može da postane subjekat. (Može se primetiti da izgleda da Frege nije jasno razmrsio logičke i lingvističke elemente imenovanja: oni prvi zavise od označavanja i mislim da imaju znatno ograničeniji domen od onog koji Frege dozvoljava). Istina je da teorija prema kojoj sve može da postane logički subjekat nailazi, kao što smo već videli, na teškoće: to je na primer slučaj sa „bilo koje *a*“ i takođe sa množinom. Ali u slučaju

[1] Izgleda da je pojam konstituenta iskaza logički nedefinljv.

„bilo koje *a*“ postoji dvosmislenost koja uvodi novu klasu problema; a s obzirom na množinu postoje izvesni iskazi u kojima se mnoštvo ponaša kao logički subjekat u svakom pogledu, osim što se tu radi o mnogim subjektima, a ne samo o jednom (vidi §§127 i 128). Međutim, u slučaju pojmova nema takvih izvrdavanja. Slučaj tvrđenih iskaza je težak, ali mislim da na njega može da se odgovori insistiranjem da je tvrđeni iskaz naprosto istinit iskaz, te da je stoga tvrđen svuda gde se javlja, pa čak i tamo gde bi gramatika vodila suprotnom zaključku. Sve u svemu, teorija prema kojoj pojmovi ne mogu da postanu subjekti izgleda neodrživo.

484. *Klase*. – Fregeova teorija klasa je vrlo teška i nisam siguran da sam je u potpunosti razumeo. On daje ime *Verthverlauf*[1] entitetu koji izgleda isto kao ono što ja nazivam klasa kao jedno. Pojam klase i klase kao mnogo, ne javlja se u njegovom izlaganju. On se udaljava od teorije koju smo ovde izložili u Glavi VI uglavnom time što prihvata intenzionalnije gledište o klasama od onoga koje ja zastupam, a tome ga je vodila potreba da prihvati nultu klasu i da razlikuje termin od klase čiji je on jedini član. Sasvim se slažem da ova dva objekta ne mogu da se dobiju pomoću ekstenzionalne teorije, iako sam nastojao da pokažem kako mogu da zadovolje zahteve formalizma (§69, 73).

Ekstenzija od *Begriff* je, kaže Frege, domen funkcije čija je vrednost za svaki argument istinosna vrednost (FuB, str. 16). Domeni su stvari, a funkcije nisu (*ib*., str. 19). Nulta klasa ne bi postojala ako bi klase bile uzete ekstenzionalno jer je nulta klasa jedino moguća ako klasa nije kolekcija terminâ (KB., str. 436–7). Ako je x termin, ne možemo da identifikujemo x, kako ekstenzionalno gledište zahteva, sa klasom čiji je x jedini član, jer pretpostavimo da je x klasa koja ima više od jednog člana, i neka su y i z dva različita člana x; onda, ako je x identično sa klasom čiji je jedini član x, i y i z će biti članovi te klase, te će stoga biti identični sa x i međusobno, suprotno

[1] Ovo ću prevesti kao domen.

hipotezi[1]. Ekstenzija od *Begriff* ima svoje biće u samom *Begriff*, a ne u individuama koje potpadaju pod taj *Begriff* (*ib*., str. 451). Kada kažem nešto o svim ljudima, onda ne kažem ništa o nekom nesretniku u sred Afrike na kojeg ni na koji način nije ukazano i koji uopšte ne pripada onome na šta *čovek* ukazuje (str. 454). *Begriffe* prethode njihovoj ekstenziji i greška je nastojati, onako kako Šreder to čini, da se ekstenzija zasnuje na individuama; ovo vodi kalkulusu regija (*Gebiete*), a ne logici (str. 455).

Šta Frege podrazumeva pod domenom i na koji način domen treba da se shvati bez pozivanja na objekte, jeste ono što on nastoji da objasni u *Grundgesetze der Arithmetik*. On počinje odlukom da dve iskazne funkcije treba da imaju isti domen onda kada imaju istu vrednost za svaku vrednost od x, to jest kada su za svaku vrednost od x obe istinite ili obe lažne (str. 7, 14). Ovo se uzima kao primitivan iskaz. Ali to samo određuje jednakost domena, a ne ono što su domeni po sebi. Ako je $X(\xi)$ funkcija koja nikada nema istu vrednost za različite vrednosti od ξ, i ako sa ϕ' označimo domen od $\phi(x)$, imaćemo $X(\phi') = X(\psi')$ onda i samo onda kada su ϕ' i ψ' jednaki, to jest onda i samo onda kada $\phi(x)$ i $\psi(x)$ uvek imaju istu vrednost. Tako uslovi jednakosti domena ne odlučuju sami po sebi šta domeni treba da budu (str. 16). Odlučimo proizvoljno – pošto pojam domena nije još fiksiran – da istinito mora da bude domen funkcije „x je istinito" (kao pretpostavka, a ne kao tvrđeni iskaz) i da lažno mora da bude domen funkcije „x = nije svaki termin identičan samom sebi". Sledi da je domen od $\phi(x)$ istinito onda i samo onda kada istinito i ništa drugo osim istinitog ne spada pod *Begriff* $\phi(x)$; domen od $\phi(x)$ je lažno onda i samo onda kada lažno i ništa drugo osim lažnog ne spada pod *Begriff* $\phi(x)$; u drugim slučajevima domen nije ni istinito niti lažno (str. 17–18). Ako samo jedna stvar potpada pod pojam, ta jedna stvar se razlikuje od domena tog pojma (str. 18, fusnota) – razlog je isti kao onaj gore pomenuti.

---

[1] *Ib*., str. 444. Cf. §74.

Postoji argument (str. 49) koji treba da dokaže da ime domena funkcije uvek ukazuje, to jest da simbol koji je za domen upotrebljen nikada nije besmislen. S obzirom na protivrečnost koju smo razmatrali u Glavi X bio bih sklon da poričem značenje domenu onda kada imamo iskaz oblika $\phi[f(\phi)]$ gde je f konstanta a ϕ promenljiva ili kada imamo iskaz forme $f_x(x)$, gde je x promenljiva a f_x iskazna funkcija koja je određena kada je x dato ali varira od jedne vrednosti x do druge – pod uslovom da se, kada se f_x izanalizira na stvari i na pojmove, deo koji je zavisan od x ne sastoji samo od stvari već da takođe sadrži barem jedan pojam. Ovo je veoma komplikovan slučaj u kojem, rekao bih, ne postoji klasa kao jedno, a moj jedini razlog da tako govorim jeste izbegavanje protivrečnosti.

485. Posredstvom promenljivih iskaznih funkcija, Frege dobija definiciju relacije koju Peano naziva $\in$, naime, relacije termina prema klasi čiji je on član[1]. Ta definicija glasi: „$a \in u$“ znači termin (ili domen terminâ u slučaju da ih nema ili da ih je više) x takav da postoji iskazna funkcija ϕ koja je takva da je u domen od ϕ, a ϕa je identično sa x (str. 53). Primetimo da ovo definiše $a \in u$, ma koje stvari da su a i u. Pre svega pretpostavimo da je u domen. Onda postoji barem jedno ϕ čiji je domen u, a bilo koja dva ϕ čiji je domen u Frege smatra identičnim. Tako možemo da govorimo o tačno određenoj funkciji ϕ čiji je domen u. U ovom slučaju au jeste iskaz ϕa koji je istinit kada je a član od u, a inače je lažan. Ako pak u nije domen, onda ne postoji nikakva takva funkcija poput ϕ te je stoga $a \in u$ domen iskazne funkcije koja je uvek lažna, to jest nulti domen. Tako, $a \in u$ ukazuje na istinito onda kada je u domen, a a član od u; $a \in u$ ukazuje na lažno onda kada je u domen, a a nije član od u; u drugim slučajevima $a \in u$ ukazuje na nulti domen.

Primetimo da iz ekvivalentnosti $x \in u$ i $x \in v$ za sve vrednosti od x možemo da izvedemo identitet u i v samo onda kada su u i v domeni. Kada nisu domeni, ekvivalencija će uvek da važi pošto su $x \in u$ i $x \in v$

[1] Cf. §§21 i 76 *supra.*

nulti domeni za sve vrednosti od x; tako, ako bismo dopustili to izvođenje u ovom slučaju, bilo koja dva objekta koji nisu domeni bili bi identični, što je apsurdno. Mogli bismo biti navedeni da sumnjamo da li u i v moraju da budu identični čak i onda kada su domeni: sa intenzionalnim shvatanjem klasa, to postaje otvoreno pitanje.

Frege, zatim, prelazi (str. 55) na analognu definiciju iskazne funkcije sa tri promenljive, koju sam ja simbolizovao kao xRy, a i ovde on daje definiciju koja ne postavlja nikakva ograničenja na varijabilnost od R. On ovo postiže uvođenjem *dvostrukog domena* koji je definisan iskaznom funkcijom sa dve promenljive: to možemo da posmatramo kao klasu parova sa smerom[1]. Onda, ako je R takva klasa parova, i ako je (x, y) član ove klase, onda xRy važi; u drugim slučajevima, ono će biti ili lažno ili nulto kao i pre. Na ovoj osnovi Frege uspešno gradi onoliko logike relacija koliko mu je potrebno za njegovu aritmetiku; a oslobođen je ograničenja u pogledu varijabilnosti od R koja proizlaze iz intenzionalnog shvatanja relacija koje je prihvaćeno u ovoj knjizi (cf. §83).

486. Glavna teškoća koja proizlazi iz gorenavedene teorije klasa tiče se vrste entiteta koja bi domen trebalo da bude. Razlog koji me je naveo da uprkos mojoj naklonosti prihvatim ekstenzionalno shvatanje klasa bila je neophodnost da se otkrije neki entitet koji je određen za neku datu iskaznu funkciju, a isti za bilo koju ekvivalentnu iskaznu funkciju. Tako je „*x* je čovek“ ekvivalentno sa (pretpostavićemo) „*x* je dvonožac bez perja“, i želimo da otkrijemo neki jedan entitet koji je određen na isti način ovim dvama iskaznim funkcijama. Jedini entitet koji sam ja uspeo da otkrijem bila je klasa kao jedno – izuzev izvedene klase (takođe kao jedno) iskaznih funkcija koje su ekvivalentne bilo kojoj od datih iskaznih funkcija. Ova klasa je očigledno složeniji pojam koji nam neće omogućiti da se oslobodimo opšteg pojma *klase*; ali, u simboličkom predstavljanju, ovim

[1] Zanemarujući za sada naše sumnje u pogledu egzistencije bilo kojeg takvog entiteta kao što je par sa smerom.

složenijim pojmom (kao što smo se složili u §73) mora da se zameni klasa termina ako uopšte treba da postoji bilo koja nulta klasa i ako klasa čiji je jedini član dati termin treba da se razlikuje od tog termina. Zasigurno bi bilo veliko pojednostavljenje da prihvatimo, kako to čini Frege, da je domen nešto različito od celine koja je sastavljena od termina koji zadovoljavaju iskaznu funkciju o kojoj je reč; ali što se mene tiče, ispitivanje mi ne ukazuje ni na kakav takav entitet. Iz tog razloga, a takođe i zbog protivrečnosti, primoran sam da prihvatim ekstenzionalnu teoriju klasa, mada u formi koja se donekle razlikuje od one koja je izložena u Glavi VI.

487. Da su neke modifikacije u ovoj teoriji nužne dokazao nam je argument iz KB, str. 444. Izgleda da ovaj argument može da dokaže da klasa, čak i kao jedno, ne može da se identifikuje sa klasom čija je ona jedini član. U §74 sam tvrdio da na ovaj argument može da se odgovori povlačenjem razlike između klase kao jedno i klase kao mnogo, ali ovo tvrđenje mi sada izgleda pogrešno. Iz ovog razloga je nužno da preispitamo celo učenje o klasama.

Fregeov argument je sledeći. Ako je *a* klasa od više od jednog termina, i ako je *a* identično sa klasom čiji je jedini termin *a*, onda je biti termin od *a* ista stvar kao i biti termin klase čiji je jedini termin *a* onda kada je *a* jedini termin od *a*. Izgleda da ovaj argument dokazuje ne samo da je ekstenzionalno shvatanje klasa neadekvatno, već i da je ono potpuno nedopustivo. Jer, pretpostavimo da je *a* jedna kolekcija, i pretpostavimo da je kolekcija od jednog termina identična sa tim jednim terminom. Tada, ako *a* može da se smatra jednom kolekcijom, prethodni argument dokazuje da je *a* jedini termin od *a*. Mi ne možemo da se izvučemo time što ćemo reći da $\in$ mora da bude relacija prema klasnom pojmu ili prema pojmu klase kao klase ili klase kao mnogo, jer ako postoji bilo koji takav entitet kao što je klasa kao jedno, onda će postojati relacija koju možemo da nazovemo $\in$ koja će važiti između termina i njihovih klasa kao jedno. Tako gornji argument vodi zaključku da ili (α) kolekcija od više od jednog termina nije identična sa kolekcijom čiji je ona jedini termin, ili (β) uopšte ne postoji kolekcija kao jedan termin u slučaju kolekcije od mnogo termina već je kolekcija strogo uzev samo mnogo. Jedna ili druga od ovih alternativa mora da se prihvati na osnovu prethodnog argumenta.

488. (α) I jednom i drugom od ovih gledišta mogu da se upute teške primedbe. Prvo odgovara Fregeovom i Peanovom gledištu. Kako bi se razumela paradoksalna priroda ovog gledišta, mora jasno da se shvati da nije samo kolekcija kao mnogo već i kolekcija kao jedno ono što se razlikuje od kolekcije čiji je to jedini termin. (Govorim o kolekcijama zato što je značajno da ispitamo posledice Fregeovog argumenta po mogućnost ekstenzionalnog stanovišta). Ovo gledište je uprkos njegovoj paradoksalnoj prirodi sasvim sigurno ono što izgleda da se zahteva simbolizmom. Od suštinske je važnosti da možemo da smatramo klasu jednim objektom, da postoji nulta klasa i da termin nije (barem uopšte uzev) identičan sa klasom čiji je on jedini član. *Simboličko* značenje *klase* treba interpretirati s obzirom na ove uslove. Ako se Fregeov pojam domena identifikuje sa kolekcijom kao jedno, onda će sve ići dobro. Ali, veoma je teško pronaći bilo koji entitet koji bi bio poput Fregeovog domena, a argument da takav entitet mora da postoji slabo nam pomaže. Pored toga, zbog protivrečnosti sigurno postoje slučajevi u kojima imamo kolekciju kao mnogo, ali ne i kolekciju kao jedno (§104). Ispitajmo onda (β) i pogledajmo da li to nudi bolje rešenje.

(β) Pretpostavimo da je neka kolekcija od samo jednog termina baš taj jedan termin, a da kolekcija od mnogo termina jeste (ili bolje rečeno jesu) ti različiti termini, tako da uopšte ne postoji pojedinačni termin koji je kolekcija mnogih termina o kojima je reč. U ovom gledištu, barem na prvi pogled, nema ničeg paradoksalnog i ono ima tu zaslugu da dopušta da važi univerzalno ono što protivrečnost [iz Glave X] pokazuje da je samo ponekad slučaj. U tom slučaju, osim ukoliko ne napustimo jednu od naših fundamentalnih dogmi, $\in$ će morati da bude relacija termina prema klasnom pojmu, a ne prema njegovoj klasi; ako je *a* klasni pojam, ono što simbolički izgleda kao klasa čiji je jedini termin *a*, biće (može se tako pretpostaviti) klasni pojam pod koji potpada samo pojam *a* koji je, naravno (uopšte uzev, ako ne i uvek), različit od *a*. Zbog protivrečnosti ćemo smatrati da ne postoji uvek klasni pojam za neku datu iskaznu funkciju $\phi(x)$, to jest da ne postoji uvek, za svako ϕ, neki klasni pojam *a* takav da je $x \in a$ ekvivalentno sa ϕx za sve vrednosti od *x*, a slučajevi u kojima nema takvog klasnog pojma biće slučajevi u kojima je ϕ kvadratne forme.

Do sada je sve išlo dobro. Ali sada više nemamo jedan konkretan entitet koji je određen na jednak način bilo kojom iskaznom funkcijom iz skupa ekvivalentnih iskaznih funkcija, to jest moglo bi se reći da nije preostalo nikakvo značenje *klase* koje je određeno samo pomoću ekstenzije. Tako, da uzmemo slučaj gde ovo vodi konfuziji, ako su *a* i *b* različiti klasni pojmovi takvi da je $x \in a$ i $x \in b$ ekvivalentno za sve vrednosti od *x*, klasni pojam pod koji potpada *a* i ništa drugo neće biti identičan klasnom pojmu pod koji potpada *b* i ništa drugo. Tako ne možemo da nađemo nijedan način da označimo ono što bi simbolički moralo da odgovara klasi kao jedno. Ili pak, ako su *u* i *v* slične ali različite klase, „slično klasi *u*" je različit pojam od „slično klasi *v*"; tako, osim ukoliko ne možemo da pronađemo neko ekstenzionalno značenje *klase*, nećemo moći da kažemo da je broj od *u* isti kao i broj od *v*. A svi uobičajeni elementarni problemi koji se tiču kombinacija (to će reći broja klasa određenih vrsta sadržanih u datoj klasi) postaju nemogući, a čak i besmisleni. Iz ovih različitih razloga bi moglo da se primeti da nešto poput klasa kao jedno mora da se zadrži, kao i da Fregeov domen ispunjava zahtevane uslove. Stoga bi izgledalo da je nužno da prihvatimo domene kao akt vere bez očekivanja da ćemo uvideti da takve stvari postoje.

Ipak, neidentifikacija klase sa klasom kao jedno, bilo u obliku koji ja imam u vidu ili u obliku Fregeovog domena, izgleda neizbežno, a klasa kao mnogo putem isključivanja preostaje kao jedini objekat koji može da igra ulogu klase. Smatram da ćemo modifikacijom logike koju smo do sada zastupali u ovoj knjzi moći najednom da zadovoljimo zahteve koje nameće protivrečnost [iz Glave X] i da održimo harmoniju sa zdravim razumom[1].

489. Počnimo od rekapitulacije različitih mogućih teorija o klasama koje su se do sada javljale. Klasa može da se poistoveti sa (α) predikatom, (β) klasnim pojmom, (γ) pojmom klase, (δ) Fregeovim domenom, (ε) numeričkom konjunkcijom terminâ klase, (ζ) celinom koja je sastavljena od termina klase.

Od ovih teorija, prve tri koje su intenzionalne imaju taj nedostatak da ne čine klasu određenom onda kada su njeni termini dati. Preostale tri nemaju ovaj nedostatak, ali imaju neke druge. (δ) pati od sumnje da li uopšte postoji takav entitet, kao i od toga da je protivrečnost neizbežna ako su domeni termini. (ε) je logički bespogovorno, ali nije pojedinačni entitet, izuzev onda kada klasa ima samo jedan član. (ζ) ne može uvek da postoji kao termin iz istog razloga koji je naveden protiv (δ); osim toga, ono ne može da se poistoveti sa klasom zbog Fregeovog argumenta[2].

Ipak, bez pojedinačnog objekta[3] koji bi predstavljao ekstenziju, matematika se ruši. Dve iskazne funkcije koje su ekvivalentne za sve vrednosti promenljive mogu da ne budu identične, ali je nužno da uvek postoji neki objekat koji obe određuju. Međutim, bilo koji objekat koji može da se predloži pretpostavlja pojam *klase*. *Klasu* možemo da definišemo optativno na sledeći način: klasa je objekat koji je jedinstveno određen iskaznom funkcijom i jednako je određen bilo kojom ekvivalentnom iskaznom funkcijom. Sada, ne možemo kao ovaj objekat da uzmemo (kao i u drugim slučajevima simetričnih

---

[1] Teorija koju ću braniti u nastavku predstavlja direktnu negaciju dogme koja je izložena u §70 u fusnoti.

[2] Archiv, I, str. 444.

[3] O upotrebi reči *objekat* u sledećim razmatranjima vidi §58, fusnota.

tranzitivnih relacija) klasu iskaznih funkcija koja je ekvivalentna datoj iskaznoj funkciji, osim ukoliko već nemamo pojam *klase*. A opet, ekvivalentne relacije, uzete intenzionalno, mogu biti različite: stoga hoćemo da nađemo pojedinačni konkretni objekat jednako određen bilo kojom relacijom iz skupa ekvivalentnih relacija. Ali, jedini objekti koji se ovde nude jesu klasa relacija ili klasa parova koji formiraju njihov zajednički domen, a i jedno i drugo pretpostavlja *klasu*. Bez pojma klase, elementarni problemi poput „koliko kombinacija može da se formira od *m* objekata tipa *n* u nekom vremenu?“ postaju besmisleni. Pored toga, izgleda neposredno očigledno da postoji neki smisao u tome da se kaže da dva klasna pojma imaju *istu* ekstenziju, a ovo zahteva da postoji neki objekat koji može da se nazove ekstenzijom klasnog pojma. Ali, krajnje je teško otkriti bilo koji takav objekat, a proitvrečnost [iz Glave X] konkluzivno dokazuje da čak i kad bi takav objekat ponekada postojao, ima izkaznih funkcija čija ekstenzija nije jedan termin.

Klasa kao mnogo koju smo naveli pod (ε) je besprekorna, ali je mnogo a ne jedno. Možemo, ako tako izaberemo, ovo da predstavimo sa jednim simbolom: tako će $x \in u$ značiti „x je jedno od u-ova“. Ovo ne sme da se tretira kao relacija dva termina x i u zato što u kao numerička konjunkcija nije pojedinačni termin a mi želimo da imamo značenje za $x \in u$ koje bi bilo isto ako bismo u zamenili sa njoj jednakom klasom v, a što nas sprečava da u interpretiramo intenzionalno. Tako možemo smatrati da „x je jedno od u-ova“ izražava relaciju x prema mnogim terminima među koje je uključeno i x. Glavna primedba ovom gledištu, ako samo pojedinačni termini mogu da budu subjekti, jeste da ako je x simbol koji suštinski stoji umesto mnogih termina, onda ne možemo bez rizika od greške da učinimo u logičkim subjektom. Moglo bi se pretpostaviti da ne možemo više da govorimo o klasi klasa zato što je ono što bi trebalo da budu termini takve klase nisu pojedinačni termini već je svaki mnogo termina[1].

[1] Gdegod kontekst to zahteva, čitalac treba da doda „pod uslovom da se

Moglo bi se pretpostaviti da ne možemo da tvrdimo predikat o mnogo izuzev u smislu da ga tvrdimo za svaki od tih mnogo; ali, ono što se ovde zahteva jeste tvrđenje o predikatu koji se odnosi na mnogo kao mnogo, a ne na svaki niti pak na celinu (ako je ima) koju oni sačinjavaju. Tako će klasa klasâ biti mnogo mnogih; njeni konstituenti će svaki biti samo mnogo, i stoga ni u kojem smislu ne mogu da budu, moglo bi se pretpostaviti, pojedinačni konstituenti. Sada sam primoran da uprkos očiglednoj logičkoj teškoći tvrdim da je upravo ovo tačno ono što se traži za tvrđenje o broju. Ako imamo klasu klasâ čiji svaki član ima dva termina, neophodno je da svaki od tih članova bude istinski dvostruk i svaki bi trebalo da ne bude jedan. Ili opet, „Braun i Džons su dva" zahteva da se ne kombinuju Braun i Džons u jednu pojedinačnu celinu, a ipak ovaj iskaz ima subjekat-predikatsku formu. Ali, sada nastaje teškoća u pogledu broja članova klase klasâ. U kom smislu se može govoriti o dva para? Izgleda da ovo zahteva da svaki par bude pojedinačni entitet; ipak, ako bi to bilo slučaj, imali bismo dve jedinice, a ne dva para. Ovde se zahteva jedan smisao za različitost kolekcija, što po svemu sudeći znači da, ako su u i v kolekcije o kojima je reč, onda $x \in u$ i $x \in v$ nisu ekvivalentni za sve vrednosti od x.

490. Logička teorija koja nam se tako nameće jeste ova: subjekat iskaza ne može da bude jedan pojedinačni termin, već suštinski mnogo termina. Ovo je slučaj sa svim iskazima koji tvrde brojeve različite od 0 i 1. Ali predikati ili klasni pojmovi ili relacije koje mogu da se javljaju u iskazima koji imaju subjekte u množini jesu različiti (uz neke izuzetke) od onih koji mogu da se javljaju u iskazima koji imaju pojedinačne termine kao subjekte. Iako je klasa mnogo a ne jedno, ipak postoji istost i različitost među klasama, te stoga klase mogu da se smatraju kao da je svaka od njih istinsko jedinstvo; a u ovom smislu možemo da govorimo o *jednoj* klasi i o klasama koje su članovi klase klasâ. Međutim, *jedan* mora da se smatra kao nešto različito

klasa o kojoj je reč (ili sve klase o kojima je reč) ne sastoji od jednog termina".

kada se tvrdi o klasi od slučaja kada se tvrdi o terminu; to znači da postoji značenje *jednog* koje je primenljivo kada govorimo o *jednom* terminu, i drugo koje je primenljivo kada govorimo o *jednoj* klasi, a takođe i opšte značenje koje je primenljivo u oba slučaja. Fundamentalno učenje na kojem sve počiva jeste učenje da subjekat iskaza može biti u množini, i da su takvi pluralni subjekti ono na šta se misli kada govorimo o klasama koje imaju više od jednog termina[1].

Biće nužno da sada razlikujemo (1) termine, (2) klase, (3) klase klasâ itd. *ad infinitum*; moraćemo da smatramo da nijedan član nekog skupa nije član bilo kojeg drugog skupa, i da $x \in u$ zahteva da x mora da bude iz skupa koji je za jedan stepen niži od skupa kojem u pripada. Tako će $x \in x$ postati besmislen iskaz i na taj način će se izbeći protivrečnost [iz Glave X].

491. Ali, sada moramo da razmotrimo problem klasâ koje imaju jedan član ili nijedan. Slučaj nulte klase bi mogao da se reši jednostavnim poricanjem – to je samo nepodesno ali ne i samoprotivrečno. Ali u slučaju klasa koje imaju samo jedan termin i dalje je nužno da ih razlikujemo od njihovih jedinih članova. Ovo proizlazi iz Fregeovog argumenta koji možemo ukratko da ponovimo na sledeći način. Neka je u klasa koja ima više od jednog termina; neka je ιu klasa klasâ čiji je jedini član u. Tada ιu ima jedan član, u ima više članova, te u i ιu dakle nisu identični. Na prvi pogled bi moglo da se posumnja da li je ovaj argument validan. Relacija od x prema u izražena pomoću $x \in u$ jeste relacija jednog pojedinačnog termina prema mnogim terminima; relacija u prema ιu izražena pomoću $u \in \iota u$ jeste relacija mnogo termina (kao subjekta) prema mnogim terminima (kao predikatu)[2]. Neko bi mogao da prigovori da je ovo drugačija relacija od one prethodne, te da stoga argument propada. Različiti je

---

[1] Cf. §§128 i 132 *supra*.

[2] Reč *predikat* je ovde upotrebljena slobodno, a ne u preciznom smislu koji je definisan u §48.

smisao kada kažemo da je *x* član od *u* i kada kažemo da je *x* član od *ιu*; tako *u* i *ιu* mogu da budu identični uprkos argumentu.

Međutim, ovaj pokušaj da se izbegne Fregeov argument može da se pobije. Da počnemo time, za sve svrhe aritmetike i za mnoge svrhe logike nužno je da imamo značenje za $\in$ koje bi bilo jednako primenljivo na relaciju termina prema klasi, klase prema klasi klasâ itd. Ali, glavna stvar jeste da ako je svaki pojedinačni termin klasa, iskaz $x \in x$ koji proizvodi protivrečnost [iz Glave X] mora biti dopustiv. Protivrečnost može da se izbegne samo ako se razlikuju *x* i *ιx* i ako se insistira na činjenici da *u* u $x \in u$ mora uvek biti za jedan stepen više od *x*. Tako, iako možemo da identifikujemo klasu sa numeričkom konjunkcijom njenih termina svuda gde ima više termina, tamo gde imamo samo jedan termin ipak moramo da prihvatimo Fregeov domen kao objekat koji je različit od jedinog termina klase. A pošto smo to uradili, onda takođe možemo da prihvatimo domen i u slučaju nulte iskazne funkcije. Od Fregea se razlikujemo jedino po tome što ni u kojem slučaju ne smatramo da je domen termin već da je objekat različitog logičkog tipa u smislu u kojem je iskazna funkcija $\phi(x)$ u kojoj *x* može da bude bilo koji termin uopšte uzev besmislena ako *x* zamenimo domenom; a ako *x* može da bude bilo koji domen termina, $\phi(x)$ će uopšte uzev biti besmisleno ako *x* zamenimo ili terminom ili domenom domenâ termina. Domeni su, konačno, ono što, strogo govoreći, treba nazvati *klasama*, i njima se pripisuju kardinalni brojevi.

492. Prema gledištu koje se ovde zastupa, za svaku promenljivu će biti nužno ukazati da li su njeno polje značenja termini, klase, klase klasâ, itd[1]. Promenljiva neće moći, izuzev u posebnim slučajevima, da se širi od jednog od ovih skupova na drugi; a u $x \in u$, *x* i *u* uvek moraju da pripadaju različitim tipovima; $\in$ neće biti relacija između objekata istog tipa, ali će to biti $\in \breve{\in}$ ili $\in \breve{R} \breve{\in}$[2] pod uslovom da je i *R*

[1] Vidi Apendiks B.

[2] O ovoj notaciji vidi §§28 i 97.

takvo. Takođe ćemo morati da razlikujemo relacije prema tipovima kojima pripadaju njihovi domeni i njihovi konverzni domeni; pored toga, promenljive čija polja uključuju relacije, pri čemu su ove shvaćene kao klase parova, po pravilu neće uključivati ništa drugo, a relacije između relacija biće različitog tipa od relacija između termina. Izgleda da nam ovo daje istinu – mada u skroz ekstenzionalnom obliku – koja leži u osnovi Fregeovog razlikovanja između termina i različitih vrsta funkcija. Osim toga, izgleda da je ovde zastupano mišljenje veoma blisko zdravom razumu.

Stoga je krajnji zaključak da je tačna teorija klasa još ekstenzionalnija od teorije iz Glave VI; da je klasa kao mnogo jedini objekat koji je uvek definisan iskaznom funkcijom i da je to adekvatno za sve formalne svrhe; da je klasa kao jedno ili celina koja je sastavljena od termina klase verovatno istinski entitet, izuzev u onim slučajevima u kojima je klasa definisana pomoću kvadratne funkcije (vidi §103), ali u tim slučajevima, a moguće i u nekim drugim slučajevima, klasa kao mnogo jeste jedini objekat koji je jedinstveno definisan.

Teorija da postoje različite vrste promenljivih zahteva reformu teorije formalne implikacije. U formalnoj implikaciji, promenljiva generalno ne uzima sve moguće vrednosti već sve i samo one koje čine iskaznu funkciju o kojoj je reč iskazom. Za sve druge vrednosti promenljive treba smatrati da sve date iskazne funkcije postaju besmislene. Tako u $x \in u$, u mora da bude klasa ili klasa klasâ itd. a x mora da bude termin ako je u klasa, a klasa ako je u klasa klasâ itd; u svakoj iskaznoj funkciji postojaće neki domen koji je dopustiv promenljivoj ali će uopšte uzev biti mogućih vrednosti za druge promenljive koje nisu dopustive u datom slučaju. Ova činjenica će da zahteva izvesnu modifikaciju principa simboličke logike, ali ostaje tačno da su u formalnoj implikaciji svi iskazi koji pripadaju nekoj datoj iskaznoj funkciji tvrđeni.

Sa ovim smo priveli kraju onaj deo Fregeovog dèla koji je više filozofski. Preostaje da ukratko razmotrimo njegovu simboličku logiku i aritmetiku, ali ovde se toliko sa njim slažem da uopšte nije neophodno da činim išta više do da pozdravim njegovo otkriće iskaza za koje sam, kada sam ih pisao, verovao da su novi.

493. *Implikacija i simbolička logika*. – Relacija koju Frege upotrebljava kao fundamentalnu u logici iskaza nije potpuno ista kao ono što sam ja nazvao implikacijom: to je relacija koja važi između *p* i *q* svaki put kada je *q* istinito ili kada *p* nije istinito, dok relacija koju ja upotrebljavam važi svaki put između *p* i *q* kada su iskazi i kada je *q* istinito ili *p* lažno. To će reći, Fregeova relacija važi onda kada *p* uopšte nije iskaz, štagod da je *q*; moja ne važi osim ako *p* i *q* nisu iskazi. Njegova definicija ima formalnu prednost utoliko što izbegava neophodnost hipoteza tipa „*p* i *q* su iskazi", ali ima i taj nedostatak utoliko što ne vodi definiciji *iskaza* i negacije. Negacija se zapravo kod Fregea smatra nedefinljivom; *iskaz* se uvodi posredstvom pojma nedefinljive istinosne vrednosti. Štagod da je *x*, „istinosna vrednost od *x*" mora da ukazuje na istinito ako je *x* istinito, a na lažno u svim drugim slučajevima. Fregeova notacija ima izvesnu prednost nad Peanovom uprkos činjenici da je nezgrapna i teško upotrebljiva. On stalno definiše izraze za sve vrednosti promenljive, dok Peanovim definicijama često prethodi neka hipoteza. On ima specijalan simbol za tvrđenje i za sve vrdenosti od *x* može da tvrdi iskaznu funkciju koja ne izražava formalnu implikaciju, što Peanov simbolizam ne čini. On upotrebom latinskih i nemačkih slova takođe pravi razliku između *bilo kojeg* iskaza izvesne iskazne funkcije i *svih* takvih iskaza. Upotrebljavajući uvek implikacije, Frege izbegava logički proizvod dva iskaza te stoga nema nikakav aksiom koji bi odgovarao importaciji i eksportaciji[1]. Tako združeno tvrđenje *p* i *q* predstavlja negaciju od „*p* implicira ne-*q*".

---

[1] Vidi §18 (7), (8).

494. *Aritmetika*. – Frege daje potpuno istu definiciju kardinalnih brojeva koju sam i ja dao, barem ukoliko poistovetimo njegov *domen* sa mojom *klasom*[1]. Ali sledeći njegovu intenzionalnu teoriju klasa, on broj tretira kao svojstvo klasnog pojma, a ne kao klasu u ekstenziji. Ako je *u* domen, broj od *u* je domen pojma „domen sličan domenu *u*". U *Grundlagen der Arithmetik* ispitane su i odbačene druge moguće teorije broja. Brojevi ne mogu da se tvrde o objektima pošto istom skupu objekata mogu da se pripišu različiti brojevi (Gl., str. 29); na primer, jednu armiju čini toliko i toliko pukova, ali to je neki drugi broj vojnika. Izgleda mi da ovo gledište isuviše uključuje fizičko u pogledu objekata: ja ne smatram da je armija objekat istog tipa kao i pukovi. Može da se navede i jači argument u prilog ovom gledištu, naime, da se 0 ne primenjuje na objekte već samo na pojmove (str. 59). Mislim da je ovaj argument konkluzivan samo do izvesne mere; ali, on je zadovoljen gledištem o tome šta klasa simbolički znači koje smo izložili u §73. Sami brojevi su, slično drugim domenima, stvari (str. 67). Za definisanje brojeva kao domena, Frege daje isti opšti razlog koji sam i ja dao, naime, ono što ja nazivam principom apstrakcije[2]. U *Grundgesetze der Aruthmetik* dokazane su različite teoreme osnova kardinalne aritmetike uz toliku elaboraciju da je često veoma teško otkriti razliku između sukcesivnih koraka u dokazivanju. S obzirom na protivrečnost iz Glave X, očigledno je da se zahteva neko poboljšanje u Fregeovim principima, ali je teško poverovati da tu može da se učini išta više od uvođenja nekog opšteg ograničenja koje ostavlja detalje netaknutim.

495. Pored njegovog rada na kardinalnim brojevima, Frege već u *Begriffschrift* operiše sa jednom zadivljujućom teorijom progresija ili, bolje rečeno, svih nizova koji mogu da se generišu pomoću mnogo-jedan relacija. Frege se ne ograničava na jedan-jedan relacije: sve dok napredujemo samo u jednom pravcu, mnogo-jedan relacija će

[1] Vidi Gl., str. 79, 85; Gg., str. 77; Df. Z.
[2] Gl., str. 79; cf. §111 *supra*.

takođe da generiše niz. U nekim delovima njegove teorije on se bavi čak i opštim relacijama. On započinje razmatranjem, za bilo koju relaciju $f(x, y)$, funkcija F takvih da ako $f(x, y)$ važi, onda $F(x)$ implicira $F(y)$. Ako je ovaj uslov ispunjen, Frege kaže da je svojstvo F nasleđeno u f-nizu (Bs. str. 55–58). Odatle on bez upotrebe brojeva definiše relaciju koja je ekvivalentna sa „neki pozitivan stepen date relacije". Ovo se definiše na sledeći način. Relacija o kojoj je reč važi između x i y ako svako svojstvo od F, koje je nasleđeno u f-nizu i koje je takvo da $f(x, z)$ implicira $F(z)$ za sve vrednosti od z, pripada y (Bs. str. 60). Na ovoj osnovi on je sa uspehom izgradio nenumeričku teoriju nizova koja je primenjena u Gg. za dokazivanje iskaza koji se tiču broja konačnih brojeva i srodnih tema. Ovo je, koliko mi je poznato, najbolji metod obrađivanja takvih pitanja, a izgleda da Fregeova upravo citirana definicija pruža najbolju moguću formu matematičke indukcije. Ali, pošto ovde nema nikakvog sporenja, ja se ovim pitanjima neću dalje baviti.

Fregeovi radovi sadrže sasvim zadivljujuću kritiku psihologističkog stanovišta o logici, kao i formalističke teorije o matematici prema kojoj se veruje da su aktualni simboli predmet kojim se matematika bavi i da njihova svojstva mogu proizvoljno da se odrede definicijom. Što se tiče oba ova stanovišta, u potpunosti se slažem sa Fregeom.

496. Keri (Kerry) je (*loc. cit*). vrlo oštro kritikovao Fregea i tvrdio da je dokazao da je čisto logička teorija aritmetike nemoguća (str. 304). U pogledu pitanja da li pojmovi mogu da postanu logički subjekti i ja sâm se potpuno slažem sa ovim kritikama, dok mi po nekim drugim pitanjima one izgledaju kao da počivaju na pukim nerazumevanjima. Pošto su ove kritike takve da svako ko nije upoznat sa matematičkom logikom sigurno rizikuje da im podlegne, ja ću ih ukratko razmotriti.

Definicija brojeva kao klasâ je, tvrdi Keri, *ὕστερον πρότερον*. Moramo da znamo da svaki pojam ima samo *jednu* ekstenziju i moramo da znamo šta je *jedan* objekat; Fregeovi brojevi su zapravo samo pogodni simboli za označavanje onoga što se uobičajeno naziva brojevima (str. 227). Mislim da se mora priznati da je pojam *termina* nedefinljiv (cf. §132 *supra*) i da je pretpostavljen u definiciji broja 1. Ali Frege argumentiše – i njegov argument barem zaslužuje diskusiju – da *jedan* nije predikat koji se pripisuje svakom zamislivom terminu, već ima manje opšte značenje i pripisuje se pojmovima (Gl. str. 40). Tako se *termin* ne analizira na *jedan* i *termin* i ne pretpostavlja pojam *jednog* (cf. §72 *supra*). Što se tiče pretpostavke da svaki pojam ima samo jednu ekstenziju, nije neophodno da ovo mora da se izrazi u jeziku koji upotrebljava broj 1: sve što nam treba jeste to da, ako su ϕx i ψx ekvivalentni iskazi za sve vrednosti od x, onda oni imaju istu ekstenziju – što je primitivan iskaz čiji simbolički izraz ni na koji način ne pretpostavlja broj 1. Iz ovoga sledi da su, ako su a i b ekstenzije od ϕx, a i b identični što opet formalno ne pretpostavlja broj 1. Druge primedbe na Fregeovu definiciju mogu da se otklone na sličan način.

Keri je na osnovu jednog pasusa (Gl., str. 80, fusnota) naveden na pogrešno verovanje da Frege poistovećuje pojam sa ekstenzijom. Izgleda da se u pasusu o kojem je reč tvrdi da bi broj od u mogao da se definiše kao pojam „biti sličan u“, a ne kao domen ovog pojma; ali, tamo se ne kaže da su ove dve definicije ekvivalentne.

Postoji jedna druga kritika Fregeovog dokaza da je 0 broj koji otkriva fundamentalne greške u pogledu egzistencijalnog sadržaja univerzalnih iskaza. Problem je kako dokazati da su, ako su u i v nulte klase, one slične. Frege definiše sličnost pretpostavljajući da postoji jedan-jedan relacija R takva da „x je jedno u“ implicira „postoji jedno v sa kojim x stoji u relaciji R“ i obratno. (Ove izraze sam prilagodio mojoj terminologiji). Ovo je, kaže on, ekvivalentno sa „postoji jedan-jedan relacija R takva da "x je jedno u" i "ne postoji termin od v sa kojim x stoji u relaciji R" ne mogu oba biti istinita, ma koju vrednost x moglo da ima i obratno“; a ovaj iskaz je istinit ako su „*x* je jedno *u*“ i „*y* je jedno *v*“ uvek lažni. Ovo Keri odbacuje kao apsurdno (str. 287–9). On misli da sličnost klasa implicira da one imaju termine. On tvrdi da je gorenavedeno Fregeovo tvrđenje opovrgnuto jednim njegovom kasnijim tvrđenjem (Gl. str. 89): „ako je *a* jedno *u*, a ništa nije jedno *v*, onda su "*a* je jedno *u*" i "nijedan termin nije jedno *v* koje stoji u relaciji *R* sa *a*" oba istinita za sve vrednosti od *R*“. Ja zaista ne vidim gde Keri ovde nalazi protivrečnost; ali, očigledno je da nije shvatio da lažni iskazi impliciraju sve iskaze i da univerzalni iskazi nemaju egzistencijalni sadržaj, tako da će i „svako *a* je *b*“ i „nijedno *a* nije *b*“ biti istiniti ako je *a* nulta klasa.

Keri upućuje primedbu (str. 290, fusnota) na opštost Fregeovog pojma relacije. Frege tvrdi da bilo koji iskaz koji sadrži *a* i *b* tvrdi relaciju između *a* i *b* (Gl., str. 83); stoga Keri (s pravom) zaključuje da je samoprotivrečno poricati da su *a* i *b* u relaciji. Pojam takve opštosti, kaže on, ne može da ima nikakav smisao niti svrhu. Što se tiče smisla, to da *a* i *b* treba da budu dva konstituenta samo jednog iskaza ima savršeno razumljiv smisao; što se tiče svrhe, celokupna logika relacija, zapravo cela matematika, može da se navede kao odgovor. Međutim, postoji ono što na prvi pogled izgleda kao formalno pobijanje Fregeovog gledišta. Uzmimo iskaznu funkciju „*R* i *S* su identične relacije, a relacija *R* ne važi između *R* i *S*“. Ona sadrži dve promenljive, *R* i *S*; pretpostavimo da je ekvivalentna sa „*R* stoji u relaciji *T* prema *S*“. Tada zamenom *R* i *S* sa *T* dobijamo, pošto je *T* identično sa *T*, da je „*T* nije u relaciji *T* prema *T*“ ekvivalentno sa „*T* stoji u relaciji *T* prema *T*“. Ovo je protivrečnost koja pokazuje da ne postoji neka takva relacija kao sto je *T*. Frege bi mogao da odbaci ovaj primer na osnovu njegovog tretiranja relacija kao termina; ali, njegovi dvostruki domeni koje, slično pojedinačnim domenima, smatra stvarima, vodiće istom rezultatu. Poenta koja je ovde uključena jeste analogna onoj koja je uključena u protivrečnosti [iz Glave X]: tamo je pokazano da izvesne iskazne funkcije sa jednom promenljivom nisu ekvivalentne ikojoj iskaznoj funkciji koja tvrdi pripadnost nekoj fiksiranoj klasi, dok je ovde pokazano da izvesne iskazne funkcije koje sadrže dve promenljive nisu ekvivalentne tvrđenju ikoje fiksirane relacije. Ali, pobijanje u slučaju relacija je isto kao i u prethodnom slučaju. Postoji jedna hijerarhija relacija u zavisnosti od tipa objekata koji konstituišu njihova polja. Tako su relacije između termina različite od relacija između klasa, a ove su, sa svoje strane, različite od relacija između relacija. Tako nijedna relacija ne može sebe samu da ima i kao referenciju i kao relat, jer ako je ona istog reda kao jedna, ona bi morala da bude višeg reda od druge; predložena iskazna funkcija je stoga besmislena za sve vrednosti promenljivih R i S.

Tvrdi se (na str. 291) da Frege definiše samo pojmove 0 i 1, a ne i same objekte. Ali, ako prihvatimo da je domen nekog *Begriff* objekat, to ne može da se tvrdi jer će pripisavanje pojma doneti i pripisavanje njegovog domena. Keri ne uviđa da je jedinstvenost od 1 dokazana (*ib*).: on misli da po Fregeovoj definiciji može da bude nekolikih 1. Ne razumem kako on može da pretpostavi tako nešto: dokaz jedinstvenosti je precizan i formalan.

Definicija neposrednog sledovanja u nizu prirodnih brojeva je takođe oštro kritikovana (str. 292ff). Ona zavisi od opšte teorije nizova koja je izložena u Bs. Keri primećuje da je Frege definisao „F je nasleđeno u f-nizu“, ali da nije definisao „f-niz“ niti „F je nasleđeno“. Ovo drugo ne bi ni trebalo da se definiše pošto nema precizan smisao; ono prvo je lako definiljivo ako je to neophodno, kao polje relacije f. Ova primedba je stoga trivijalna. Dalje, postoji napad na definiciju: „y sledi za x u f-nizu, ako y ima sva svojstva nasleđena u f-nizu, a koja pripadaju svim terminima prema kojima x stoji u relaciji f[1]“. Ovaj kriterijum je, kaže nam se, sumnjive vrednosti zato što nijedan katalog takvih svojstava ne postoji, i još zato što je, kao što i

[1] Keri greši kada izostavlja poslednji deo uslova; jer, ne pripadaju sva svojstva koja su nasleđena u f-nizu svim njegovim terminima; na primer, svojstvo „biti veći od 100“ je nasleđeno u nizu brojeva.

sam Frege dokazuje, sleđenje za *x* i samo već jedno od ovih svojstava, te otuda i začarani krug. Ovaj argument, po mom mišljenju, radikalno deformiše prirodu dedukcije. U dedukciji se dokazuje da neki iskaz važi za *svaki* član klase, te da dakle može da se tvrdi o pojedinačnom članu: ali iskaz koji se odnosi na *svaki* ne proizlazi nužno iz nabrajanja onoga što je katalogizovano. Kerijevo stanovište podrazumeva da on prihvata primedbe koje je Mil uputio silogizmu Barbara, a prema kojem je Sokratova smrtnost nužna premisa za smrtnost svih ljudi. Naravno, činjenica je da opšti iskazi često mogu da se ustanove tamo gde nema nikakvog sredstva koje bi omogućilo katalogizaciju termina klase za koju oni važe; i, kao što smo već mnogo puta videli, u celosti izraženi opšti iskazi važe za *sve* termine ili, kao u prethodnom slučaju, za *sve* funkcije za koje nijedan katalog ne može da se zamisli. Stoga Kerijev argument treba odbaciti na osnovu tačne teorije dedukcije, a logička teorija aritmetike je oslobođena njegovih kritika.

Napomena. Drugi tom Gg. koji se pojavio isuviše kasno kako bih ga uvrstio u ovaj Apendiks sadrži zanimljivu raspravu o protivrečnosti [iz Glave X] (str. 253–255), koja sugeriše da rešenje mora da se pronađe u poricanju da dve iskazne funkcije koje određuju jednake klase moraju da budu ekvivalentne. Pošto izgleda da je ovo vrlo verovatno pravo rešenje, čitaocu svesrdno preporučujem da ispita Fregeov argument u ovom pogledu.

Apendiks B

TEORIJA TIPOVA

497. Teorija tipova je ovde predstavljena kao pokušaj da se pruži moguće rešenje protivrečnosti*; ali, po svoj prilici, ova teorija bi morala da bude transformisana u neku suptilniju formu pre nego što bi mogla da pruži odgovor na sve teškoće. Međutim, ukoliko bi ona trebalo da bude prvi korak ka istini, u ovom Apendiksu ću nastojati da je izložim u glavnim crtama, kao i neke probleme koje ona ne uspeva da razreši. Svaka iskazna funkcija $\phi(x)$ – tako se barem tvrdi – osim njenog domena istine ima i domen značenja, to jest domen unutar kojeg x mora da se nalazi ako $\phi(x)$ uopšte treba da bude iskaz, bilo istinit bilo lažan. Ovo je prva važna stvar u teoriji tipova, druga je da domeni značenja formiraju *tipove*, to će reći ako x pripada domenu značenja od $\phi(x)$, onda postoji klasa objekata *tipa x* koji svi moraju da pripadaju domenu značenja od $\phi(x)$, ma kako da se ϕ varira, a domen značenja je uvek ili neki određeni tip ili pak zbir nekoliko celih tipova. Ova druga stvar je manje precizna od prve, a slučaj brojeva stvara teškoće; ali, nadam se da će u nastavku njen značaj i značenje postati jasniji.

---

* Rasel ovde, naravno, misli na protivrečnost iz Glave X, o kojoj je bilo reči i prethodno u Apendiksu A (prim. stručnih redaktora prevoda).

Termin ili *individua* je bilo koji objekat koji nije domen. To je najniži tip objekta. Ako takav objekat – recimo izvesna tačka u prostoru – figurira na neki način u iskazu, bilo koja druga individua *uvek* može da se zameni bez gubitka značenja. Ono što smo u Glavi VI nazvali klasom kao jedno jeste individua, pod uslovom da su njeni članovi takođe individue: objekti svakodnevnog života, osobe, stolovi, stolice, jabuke itd. jesu klase kao jedno. (Osoba je klasa psihičkih egzistenata, a ostali predstavljaju klase materijalnih tačaka, sa mogućim ukazivanjem na sekundarne kvalitete). Dakle, ovi objekti su istog tipa kao i jednostavne individue. Izgleda da su svi objekti koji su dezignirani jednom rečju, bilo da su stvari ili pojmovi, ovog tipa. Tako su, na primer, relacije koje se javljaju u aktualnim relacionim iskazima istog tipa kao i stvari, mada su relacije u ekstenziji, one koje se koriste u simboličkoj logici, različitog tipa. (Intenzionalne relacije koje se javljaju u običnim relacionim iskazima nisu određene onda kada su njihove ekstenzije date, ali su ekstenzionalne relacije simboličke logike klase parova). Individue su jedini objekti o kojima brojevi ne mogu smisleno da se tvrde.

Sledeći tip se sastoji od domena ili od klasa individua. (Sa rečju *domen* ne treba da se povezuje nikakav ordinalni pojam). Tako „Braun i Džons" jeste objekat ovog tipa i, uopšte uzev, neće se dobiti nikakav smisleni iskaz ukoliko Brauna zamenimo u bilo kojem istinitom ili lažnom iskazu čiji je Braun konstituent. (Ovo na izvestan način predstavlja opravdanje za gramatičko razlikovanje jednine i množine, ali analogija nije bliska pošto domen može da ima jedan termin ili više, a kada ih ima više, on ipak može da se javi u jednini u izvesnim iskazima). Ako je u domen koji je određen iskaznom funkcijom $\phi(x)$, ne-u neće obuhvatati sve objekte za koje je $\phi(x)$ lažno, tako da je ne-u sadržano u domenu značenja od $\phi(x)$ i sadrži samo objekte istog tipa kojeg su i članovi od u. U vezi sa ovim postoji teškoća koja proizlazi iz činjenice da dve iskazne funkcije $\phi(x)$ i $\psi(x)$ mogu da imaju isti domen istine u, dok njihovi domeni značenja mogu da budu različiti; tako ne-*u* postaje dvosmisleno. Uvek će da postoji jedan minimalni tip unutar kojeg je sadržano *u*, a ne-*u* može da se definiše kao ostatak tog tipa. (Zbir dvaju ili više tipova jeste jedan tip; minimalni tip jeste tip koji nije takav zbir). U pogledu protivrečnosti*, ovo stanovište izgleda kao najbolje zato što ne-*u* mora da bude domen lažnosti od „*x* je jedno *u*", a „*x* je jedno *u*" generalno mora da bude besmisleno; sledstveno, „*x* je jedno *u*" mora zahtevati da *x* i *u* budu različiti tipovi. Sumnjivo je da li ovaj rezlutat može da se osigura a da se s tim u vezi ne ograničimo na minimalne tipove.

Postoji jedan neizbežni sukob sa zdravim razumom u vezi sa neophodnošću da se poriče da mešovita klasa (ona čiji članovi nisu svi istog minimalnog tipa) ikad može da bude istog tipa kao što je tip jednog od njenih članova. Uzmimo, na primer, izraz „Hajne i Francuzi (*the French*)"**. Ako je ovde reč o klasi koja sadrži dve individue, „Francuzi (*the French*)" mora da se razume kao „francuska nacija", to jest kao klasa kao jedno. Ako govorimo o Francuzima kao o mnogo, onda dobijamo klasu koja se ne sastoji od dva člana već od jednog više nego što ima Francuza (*Frenchmen*). Da li je moguće formirati klasu čiji je jedan član Hajne a drugi Francuzi (*the French*) kao mnogo jeste problem na koji ću se vratiti kasnije zato što je za sada dovoljno primetiti da ako postoji neka takva klasa, onda ona mora, da bi se izbegla protivrečnost, biti različitog tipa i od klase induividua i od klasa klasâ individua.

Sledeći tip nakon klasa individua sastoji se od klasa klasâ individua. Takve su, na primer, asocijacije klubova, a članovi takvih

---

* I ovde Rasel naravno ima u vidu protivrečnost iz Glave X i čak u engleskom originalu piše *Contradiction*, mada to ne radi sistematično (prim. stručnih redaktora prevoda).

** Rasel na ovom mestu pravi razliku između *the French* i *Frenchmen,* pri čemu se prvo odnosi na klasu kao jedno, a drugo na klasu kao mnogo, bez obzira što bi se na srpski jezik i jedno i drugo prevelo kao *Francuzi* (prim. stručnih redaktora prevoda).

asocijacija, naime, klubovi, sami jesu klase individua. Pogodno je da govorimo o *klasama* samo onda kada imamo klase individua, a o *klasama klasa* samo onda kada imamo klase klasa individua, itd. Za opšti pojam upotrebiću reč domen. Postoji progresija takvih tipova pošto domen može da se formira od objekata bilo kojeg datog tipa, a rezultat će biti višeg tipa nego što su njegovi članovi.

Novi niz tipova otpočinje parom sa smerom. Domen takvih tipova jeste ono što simbolička logika tretira kao relaciju: to je ekstenzionalno shvatanje relacija. Onda možemo da formiramo domene relacija, ili relacija relacijâ ili relacija parova (kao što je razdvajanje u projektivnoj geometriji[1]), ili relacija individua prema parovima itd., i tako dobijamo ne samo pojedinačnu progresiju već čitav bekonačni niz progresija. Takođe imamo i tipove koji su formirani od trija koji predstavljaju članove trostrukih relacija uzetih u ekstenziji kao domena; ali, postoji više vrsta trija koji su svodivi na prethodne tipove. Tako, ako je $\phi(x, y, z)$ iskazna funkcija, ona može da bude proizvod iskaza $\phi_1(x)$, $\phi_2(y)$ i $\phi_3(z)$ ili pak proizvod $\phi_1(x) \cdot \phi_2(y, z)$, ili iskaz o x i o paru (y, z) , ili može da bude analizabilno na druge analogne načine. U takvim slučajevima ne nastaje neki novi tip. Ali, ako naš iskaz nije na takav način analizabilan – a nema nikakvog *a priori* razloga zašto bi uvek bilo tako – onda dobijamo novi tip, naime, trio. Možemo da formiramo domene trija, parove trija, trija trija, parove od (jednog) trija i jedne individue itd. Svi ovi daju nove tipove. Tako dobijamo jednu ogromnu hijerarhiju tipova, i teško je odrediti njihov broj, ali metod dobijanja novih tipova sugeriše da je njihov ukupni broj samo α_0 (broj konačnih celih brojeva) pošto je dobijeni niz manje-više sličan nizu racionalnih brojeva u poretku 1, 2, ..., n, ..., 1/2, 1/3, ..., 1/n, ..., 2/3, ..., 2/5, ..., 2/(2n+1), ... Međutim, ovo je samo hipoteza.

[1] Cf. §203.

Svaki od gore nabrojanih tipova predstavlja *minimalni* tip; to će reći, ako je $\phi(x)$ iskazna funkcija koja ima značenje za svaku vrednost od x, a koja pripada jednom od prethodnih tipova, onda $\phi(x)$ ima značenje za svaku vrednost od x koja pripada tipu o kome je reč. Ali, izgledalo bi – mada u to sumnjam – da je zbir bilo kojeg broja minimalnih tipova takođe tip, to jest da je domen značenja za izvesne iskazne funkcije. Bilo da je ovo univerzalno istinito ili ne, *svi domeni* zasigurno formiraju tip pošto svaki domen ima broj; i tako to čine svi objekti pošto je svaki objekat identičan samom sebi.

Izvan ovih nizova tipova nalazi se tip *iskaz* i moglo bi se poverovati da bi polazeći od njega mogla da započne jedna nova hijerarhija; ali, postoje izvesne teškoće koje stoje na putu takvom gledištu i čine sumnjivim da li iskazi mogu da se tretiraju kao i drugi objekti.

498. Brojevi takođe predstavljaju tip koji leži izvan gorenavedenog niza i koji proizvodi izvesne teškoće usled toga što svaki broj bira izvesne objekte iz svakog drugog tipa domena, naime, one domene koji imaju dati broj članova. Ovo čini očiglednu definiciju broja 0 pogrešnom zato što će svaki tip domena da ima svoj sopstveni nulti-domen koji će biti član od 0 posmatran kao domen, domena tako da ne možemo da kažemo da je 0 domen čiji je jedini član *baš ovaj* nulti-domen. Brojevi takođe zahtevaju da se u obzir uzme i totalitet tipova i domena, a u tom razmatranju može biti teškoća.

Pošto svi domeni imaju brojeve, i domeni su jedan domen; sledstveno, $x \in x$ ponekada ima značenje, a u tim slučajevima i njegovo poricanje takođe ima značenje. Sledstveno, postoji domen w domena za koji je $x \in x$ lažno: dakle, protivrečnost [iz Glave X] dokazuje da ovaj domen w ne pripada domenu značenja od $x \in x$. Možemo da primetimo da $x \in x$ jedino može da ima značenje kada je x tipa beskonačnog poretka pošto u $x \in u$ u uvek mora da bude tipa koji je za jedan stepen viši od x; ali naravno, domen svih domena jeste tipa beskonačnog poretka.

Pošto su brojevi tip, iskazna funkcija „*x* nije jedno *u*“, gde je *u* domen brojeva, mora da znači „*x* je broj koji nije jedno *u*“, osim zaista, ako da bismo izbegli ovaj donekle paradoksalan rezultat, ne kažemo da, mada su brojevi tip s obzirom na izvesne iskaze, oni ne treba da budu tip s obzirom na takve izkaze kao što je „*u* je sadržano u *v*“ ili „*x* je jedno *u*“. Jedno takvo gledište je sasvim održivo, mada po svemu sudeći vodi komplikacijama kojima je teško videti kraj.

To da iskazi predstavljaju tip proizlazi iz činjenice – ako je to uopšte činjenica – da samo za iskaze smisleno može da se tvrdi da su istiniti ili lažni. Izgleda izvesno da istiniti iskazi formiraju tip pošto jedino oni mogu da se tvrde (vidi Apendiks A, §479). Ali, ako je tako, broj iskaza je velik koliko i broj svih objekata apsolutno, pošto je svaki objekat identičan sa samim sobom, a „*x* je identično sa *x*“ stoji u jedan-jedan relaciji prema *x*. U ovome pak postoje dve teškoće. Prvo, izgleda da je ono što nazivamo iskaznim pojmom uvek individua; sledstveno, tu onda nemamo više posla sa iskazima nego sa individuama. Drugo, ako je moguće, kao što izgleda da jeste, formirati domene iskaza, onda mora biti više takvih domena nego što ima iskaza, mada su takvi domeni samo neki među objektima (vidi §343). Ove dve teškoće su vrlo ozbiljne i zahtevaju zasebnu raspravu.

499. Prva stvar može da se ilustruje pomoću drugih jednostavnijih. Postoji, to znamo, više klasa nego individua; ali, predikati su individue. Sledstveno, nemaju sve klase definišuće predikate. Ovaj rezultat koji takođe može da se izvede iz protivrečnosti [iz Glave X] pokazuje u kojoj meri je neophodno razlikovati klase od predikata i prihvatiti ekstenzionalno shvatanje klasa. Slično prethodnom, postoji više domena parova nego što postoji parova, te stoga više nego što ima individua; ali glagoli koji izražavaju relacije intenzionalno jesu individue. Sledstveno, ne formira svaki domen parova ekstenziju glagola, mada svaki takav domen formira ekstenziju iskazne funkcije koja sadrži dve promenljive. Dakle, iako su glagoli suštinski za logičku genezu takvih iskaznih funkcija, intenzionalno stanovište je neadekvatno da dâ sve objekte koje simbolička logika smatra relacijama.

Ipak, u slučaju iskaza izgleda kao da uvek postoji neka asocirana glagolska imenica koja je individua. Imamo „x je identično sa x" i „samoidentitet od x", „x se razlikuje od y" i „razlika od x i y" itd. Izgleda da je glagolska imenica koja je ono što smo nazvali iskaznim pojmom, kada se bliže ispita, zapravo individua; ali to je nemoguće jer „samoidentitet od x" ima onoliko vrednosti koliko ima objekata te stoga ima više vrednosti nego što ima individua. Ovo proizlazi iz činjenice da postoje iskazi koji se odnose na svaki od pojmljivih objekata, a definicija identiteta pokazuje (§26) da je svaki objekat o kojem ima iskaza identičan sa samim sobom. Jedini metod koji izbegava ovu teškoću jeste poricanje da su iskazni pojmovi individue, i upravo to je postupak na koji smo navedeni. Međutim, neporecivo je da su iskazni pojam i boja dva objekta, te ćemo otuda morati da priznamo da je moguće formirati mešovite domene čiji članovi nisu svi istog tipa, ali takvi domeni će uvek biti različitog tipa od onog koji možemo nazvati čistim domenima, to jest domenima čiji su članovi samo jednog tipa. Izgleda da iskazni pojam u stvari nije ništa drugo do sâm iskaz, pri čemu je razlika između njih samo psihološka, koja se sastoji u tome da mi ne tvrdimo iskaz u jednom slučaju, ali ga tvrdimo u drugom.

500. Drugi problem ispostavlja još ozbiljnije teškoće. Ne možemo poreći da postoje domeni iskaza, jer često želimo da tvrdimo logički proizvod takvih domena; ali ipak ne možemo prihvatiti da postoji više domena nego što ima iskaza. Na prvi pogled bi se moglo pomisliti da teškoća može da se razreši time što postoji iskaz koji je povezan sa svakim domenom iskazâ koji nije nulti, naime, sa logičkim proizvodom izkazâ tog domena[1]; ali, ovo ne obara Kantorov

---

[1] Moglo bi se posumnjati da li je relacija domena iskaza prema logičkim proizvodima jedan-jedan ili mnogo-jedan. Da li je, na primer, logički proizvod od *p* i *q* i *r* različit od proizvoda *pq* i *r*? Pozivanje na definiciju logičkog proizvo-

dokaz da domen ima više pod-domena nego članova. Primenimo ovaj dokaz pretpostavljanjem neke pojedinačne jedan-jedan relacije koja povezuje svaki iskaz *p* koji nije logički proizvod sa domenom čiji je jedini član *p*, dok povezuje proizvod svih iskaza sa nultim domenom iskaza, i povezuje svaki drugi logički proizvod iskaza sa domenom njegovih sopstvenih činilaca. Tada domen *w* koji na osnovu opšteg principa Kantorovog dokaza nije koreliran sa bilo kojim iskazom jeste domen iskaza koji su logički proizvodi, ali ne i činioci sebe samih. Ali, posredstvom definicije korelirajuće relacije, w bi trebalo da bude korelirano sa logičkim proizvodom od *w*. Videćemo da se stara protivrečnost ponovo javlja zato što možemo da dokažemo da logički proizvod od *w* i jeste i nije član od *w*. Izgleda da ovo pokazuje da ni nema takvog domena kao što je *w*, ali teorija tipova ne pokazuje zašto ne postoji takav domen. Izgleda da sledi da protivrečnost zahteva dodatne suptilnosti kako bi bila rešena, ali koje bi to suptilnosti bile ne mogu ni da zamislim.

Formulišimo potpunije novu protivrečnost. Ako je *m* klasa iskaza, iskaz „svako *m* je istinito“ može, a može i da ne bude sâmo *m*. Ali, postoji jedan-jedan relacija ovih iskaza prema *m*; ako se *n* razlikuje od *m*, „svako *n* je istinito“ nije isti iskaz kao i „svako *m* je istinito“. Razmotrimo sada celu klasu iskaza oblika „svako *m* je istinito“ koji imaju to svojstvo da nisu članovi svojih odgovarajućih *m*-ova. Neka je ta klasa *w* i neka je *p* iskaz „svako *w* je istinito“. Ako je *p* neko *w*, *p* onda mora da ima definišuće svojstvo od *w*; ali, ovo svojstvo zahteva da *p* ne bude *w*. Sa druge strane, ako *p* nije *w*, onda *p* ima definišuće svojstvo od *w* i stoga jeste *w*. Ova protivrečnost izgleda neizbežno.

Kako bismo se suočili sa ovom protivrečnošću, poželjno je da ponovo otvorimo pitanje o identitetu ekvivalentnih iskaznih funkcija i

---

da (str. 21) ublažiće ovu sumnju zato što dva logička proizvoda o kojima je reč, mada su ekvilvalentni, nipošto nisu identični. Sledstveno, postoji jedan-jedan relacija svih domena iskaza prema nekim iskazima, što direktno protivreči Kantorovoj teoremi.

o prirodi logičkog proizvoda dva iskaza. Ove dve teškoće nastaju na sledeći način. Ako je *m* klasa iskaza, njihov logički proizvod je iskaz „svako *m* je istinito“ i označiću ga ^'*m*. Ako, zatim, razmotrimo logički proizvod klase iskaza koja je sastavljena od m zajedno sa ^'*m*, to je onda ekvivalentno sa „svako *m* je istinito i svako *m* je istinito“, to jest sa „svako *m* je istinito“, to jest, sa ^'*m*. Tako je logički proizvod nove klase iskaza ekvivalentan članu te nove klase koji je isti kao i logički proizvod od *m*. Tako, ako identifikujemo ekvivalentne iskazne funkcije (pri čemu je ^'*m* iskazna funkcija od *m*) dokaz gorenavedene protivrečnosti propada pošto je svaki iskaz oblika ^'*m* logički proizvod i klase čiji je član i klase čiji član nije.

Ali, takvo izvrdavanje je zapravo nesprovodivo zato što je sasvim samoočigledno da ekvivalentne iskazne funkcije često nisu identične. Ko bi tvrdio, na primer, da je „*x* je prost parni broj različit od 2“ identično sa „*x* je jedno od mudrih dela ili budalastih izreka Čarlsa II“? Ipak, ovi iskazi su ekvivalentni ako je verovati poznatom epitafu[*]. Logički proizvod svih iskaza klase koja je sastavljena od *m* i ^'*m* jeste „svaki iskaz koji je ili jedno *m* ili tvrdi da je svako *m* istinito jeste istinit“, što nije identično sa „svako *m* je istinito“ iako su ova dva iskaza ekvivalentni. Tako izgleda da ni nema nikakvog jednostavnog načina da se izbegne protivrečnost o kojoj je reč.

Bliska analogija između ove protivrečnosti i one koju smo razmatrali u Glavi X strogo ukazuje na to da obe treba da imaju isto rešenje ili barem slična rešenja. Naravno, moguće je smatrati da su sami iskazi različitih tipova i da logički proizvodi moraju da imaju iskaze samo

---

* Epitaf posvećen Čarlsu II glasi:

„Here lies our Sovereign Lord the King,
Whose word no man relies on,
Who never said a foolish thing,
Nor ever did a wise one“.

(prim. stručnih redaktora prevoda)

jednog tipa za činioce. Ali, izgleda da je ova sugestija isuviše radikalna i krajnje veštačka.

Da rezimiramo: izgleda da je specifična protivrečnost iz Glave X razrešena teorijom tipova, ali postoji barem još jedna blisko analogna protivrečnost koja verovatno ne može da se razreši ovom teorijom. Izgleda da totalitet svih logičkih objekata ili svih iskaza uključuje jednu fundamentalnu logičku teškoću. Nisam uspeo da otkrijem ono što bi moglo da bude potpuno rešenje te teškoće; ali pošto ona zadire u same osnove rasuđivanja, svesrdno je preporučujem pažnji svih onih koji se bave logikom.

POJMOVNI I IMENSKI REGISTAR

BERTRAND RASEL
PRINCIPI MATEMATIKE

Izdavači
Arhiv Vojvodine
21000 Novi Sad
Žarka Vasiljevića 2A
www.arhivvojvodine.org.rs

Izdavačka knjižarnica Zorana Stojanovića
21000 Novi Sad
Trg Marije Trandafil 5
www.ikzs.com

Za izdavače
Dr Nebojša Kuzmanović, direktor Arhiva Vojvodine
Sreten Stojanović

Štampa
SAJNOS, Novi Sad

Tiraž
300 primeraka

ISBN 978-86-6178-091-2 (Arhiv Vojvodine)
ISBN 978-86-7543-404-7 (IKZS)

CIP - Каталогизација у публикацији
Библиотеке Матице српске, Нови Сад

51:1

РАСЕЛ, Бертранд, 1872-1970

Principi matematike / Bertrand Rasel ; s uvodom Džona G. Slejtera ; preveo s engleskog Vladislav Nikolić ; stručna redakcija prevoda Miloš Arsenijević, Saša Popović. - Novi Sad : Arhiv Vojvodine ; Sremski Karlovci ; Novi Sad : Izdavačka knjižarnica Zorana Stojanovića, 2024 (Novi Sad : Sajnos). - XLIII, 757 str. ; 20 cm. - (Biblioteka Graditelji filozofske misli ; knj. 9)

Prevod dela: Principles of Mathematics / Bertrand Russell. - Tiraž 300. - Uvod Džona G. Slejtera uz izdanje iz 1992. godine: str. XV-XX. - Napomene i bibliografske reference uz tekst. - Registar.

ISBN 978-86-6178-091-2 (Arhiv Vojvodine)
ISBN 978-86-7543-404-7 (IKZS)

а) Математика -- Филозофски аспект

COBISS.SR-ID 138087689